

B.M. YAVORSKI y A.A. DETLAF

PRONTUARIO
DE FÍSICA

Б. М. Яворский, А. А. Детлаф

Справочник по физике

Издательство «Наука»



B. M. Yavorski
A. A. Detlaf

Prontuario de física



Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso
por el ingeniero
Antonio Molina García.

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000584-6



© Издательство «Наука», 1985
© traducido al español de la edición rusa revisada y ampliada, editorial Mir, 1988

ВООМ иМ Издоттис

Índice

Prólogo a la segunda edición

I PARTE. MECÁNICA

Capítulo I.1.	Cinemática	17
§ I.1.1.	Movimiento mecánico. Objeto de la mecánica	17
§ I.1.2.	Sistema de referencia. Trayectoria, espacio recorrido y vector traslación de un punto	18
§ I.1.3.	Velocidad	22
§ I.1.4.	Aceleración	24
§ I.1.5.	Movimiento de traslación y de rotación de un sólido*	27
Capítulo I.2.	Leyes de Newton	31
§ I.2.1.	Primera ley de Newton. Sistemas inerciales de referencia	31
§ I.2.2.	Fuerza	33
§ I.2.3.	Masa. Impulso	35
§ I.2.4.	Segunda ley de Newton	37
§ I.2.5.	Tercera ley de Newton. Movimiento del centro de inercia	39
§ I.2.6.	Movimiento de un cuerpo de masa variable	41
§ I.2.7.	Ley de conservación del impulso	43
§ I.2.8.	Transformaciones de Galileo. Principio mecánico de la relatividad	45
Capítulo I.3.	Trabajo y energía mecánica	49
§ I.3.1.	Energía, trabajo y potencia	49
§ I.3.2.	Energía cinética	54
§ I.3.3.	Energía potencial	56
§ I.3.4.	Ley de conservación de la energía mecánica	60
§ I.3.5.	Choque perfectamente elástico e inelástico	63

Capítulo I.4.	Dinámica del movimiento de rotación	67
§ I.4.1.	Momento de fuerza y momento de impulso	67
§ I.4.2.	Momento de inercia	71
§ I.4.3.	Ley fundamental de la dinámica del movimiento de rotación	74
§ I.4.4.	Ley de conservación del momento de impulso	78
Capítulo I.5.	Fundamentos de la teoría especial de la relatividad	81
§ I.5.1.	Postulados de la teoría especial de la relatividad	81
§ I.5.2.	Simultaneidad de sucesos. Sincronización de relojes	84
§ I.5.3.	Transformaciones de Lorentz	86
§ I.5.4.	Relatividad de las longitudes y de los intervalos de tiempo. Intervalo entre dos sucesos	87
§ I.5.5.	Transformación de las velocidades y aceleraciones en la cinemática relativista	93
§ I.5.6.	Ley fundamental de la dinámica relativista	96
§ I.5.7.	Ley de la relación entre masa y energía	98
Capítulo I.6.	Gravitación	102
§ I.6.1.	Ley de la gravitación universal	102
§ I.6.2.	Campo de gravitación	104
§ I.6.3.	Leyes de Kepler. Velocidades cósmicas	109
Capítulo I.7.	Movimiento en sistemas de referencia no inerciales	112
§ I.7.1.	Cinemática del movimiento relativo	112
§ I.7.2.	Fuerzas de inercia	114
§ I.7.3.	Movimiento relativo en un sistema de referencia asociado a la Tierra. Fuerza de gravedad y peso de un cuerpo	116
§ I.7.4.	Principio de la equivalencia	120

II PARTE. FUNDAMENTOS DE LA FÍSICA MOLECULAR Y DE LA TERMODINÁMICA

Capítulo II.1.	Gases perfectos	123
§ II.1.1.	Objeto de la física molecular. Movimiento térmico	123
§ II.1.2.	Métodos estadístico y termodinámico de investigación	124
§ II.1.3.	Parámetros termodinámicos. Ecuaciones de estado. Procesos termodinámicos	126
§ II.1.4.	Ecuación de estado del gas perfecto	129

INDICE

Capítulo II.2.	Primera ley (primer principio) de la termodinámica	131
§ II.2.1.	Energías total e interna de un sistema	131
§ II.2.2.	Calor y trabajo	134
§ II.2.3.	Primera ley (primer principio) de la termodinámica	137
§ II.2.4.	Representación gráfica de los procesos termodinámicos y del trabajo	138
§ II.2.5.	Capacidad calorífica de una substancia. Aplicación del primer principio de la termodinámica a los procesos "iso" en un gas perfecto	140
Capítulo II.3.	Teoría cinética de los gases	147
§ II.3.1.	Conocimientos generales de física estadística clásica	147
§ II.3.2.	Ecuación fundamental de la teoría cinética de los gases	148
§ II.3.3.	Ley de Maxwell de distribución de las moléculas por velocidades y energías	150
§ II.3.4.	campo de fuerzas potencial (distribución de las partículas en un campo de Boltzmann)	154
§ II.3.5.	Recorrido libre medio de las moléculas	156
§ II.3.6.	Ley de equipartición de la energía por grados de libertad. Energía interna de un gas perfecto	157
§ II.3.7.	Capacidades caloríficas de los gases monoatómicos, diatómicos y poliatómicos	160
§ II.3.8.	Fenómenos de transporte en los gases	165
§ II.3.9.	Nociones de las propiedades de los gases enrarecidos	170
Capítulo II.4.	Segunda ley (segundo principio) de la termodinámica	171
§ II.4.1.	Transformaciones cerradas (ciclos). Ciclo de Carnot	171
§ II.4.2.	Transformaciones reversibles e irreversibles	175
§ II.4.3.	Segunda ley (segundo principio) de la termodinámica	177
§ II.4.4.	Entropía y energía libre	180
§ II.4.5.	Interpretación estadística de la segunda ley de la termodinámica	182
§ II.4.6.	Fluctuaciones	184
§ II.4.7.	Movimiento browniano	186
§ II.4.8.	Tercera ley de la termodinámica	187
Capítulo II.5.	Gases reales y vapores	189
§ II.5.1.	Fuerzas intermoleculares	189
§ II.5.2.	Ecuación de van der Waals	193

§ II.5.3.	Isotermas de los gases reales. Transiciones de fase	199
§ II.5.4.	Superfluidez del helio	201
Capítulo II.6.	Líquidos	201
§ II.6.1.	Algunas propiedades de los líquidos	201
§ II.6.2.	Teoría de los huecos del estado líquido	202
§ II.6.3.	Fenómenos de difusión y de rozamiento interno en los líquidos	204
§ II.6.4.	Tensión superficial de los líquidos	206
§ II.6.5.	Mojabilidad y fenómenos capilares	208
§ II.6.6.	Evaporación y ebullición de los líquidos	211
III PARTE. ELECTRODINÁMICA		
Capítulo III.1.	Cargas eléctricas. Ley de Coulomb	214
§ III.1.1.	Introducción	214
§ III.1.2.	Ley de Coulomb	215
Capítulo III.2.	Intensidad y desplazamiento del campo eléctrico	218
§ III.2.1.	Campo eléctrico. Intensidad del campo	218
§ III.2.2.	Principio de la superposición de los campos eléctricos	220
§ III.2.3.	Desplazamiento eléctrico. Teorema de Ostrogradski—Gauss	224
Capítulo III.3.	Potencial del campo electrostático	227
§ III.3.1.	Trabajo realizado al trasladar una carga eléctrica en un campo electrostático	227
§ III.3.2.	Potencial de un campo electrostático	229
§ III.3.3.	Relación entre el potencial y la intensidad de un campo electrostático	233
§ III.3.4.	Conductores en un campo electrostático	235
Capítulo III.4.	Capacidad eléctrica	237
III.4.1.	Capacidad eléctrica de un conductor aislado	237
III.4.2.	Capacidad mutua. Condensadores	238
Capítulo III.5.	Dieléctricos en un campo eléctrico	242
§ III.5.1.	Momentos dipolares de las moléculas de un dieléctrico	242

§ III.5.2.	Polarización de los dieléctricos	244
§ III.5.3.	Relación entre los vectores de desplazamiento, intensidad y polarización	248
§ III.5.4.	Ferroelectricos	251
Capítulo III.6.	Energía del campo eléctrico	253
§ III.6.1.	Energía de un conductor cargado y del campo eléctrico**	253
§ III.6.2.	Ley de conservación de la energía para un campo eléctrico en un medio no ferroelectrico	258
Capítulo III.7.	Corriente eléctrica continua	260
§ III.7.1.	Concepto de corriente eléctrica	260
§ III.7.2.	Intensidad y densidad de la corriente	262
§ III.7.3.	Fundamentos de la teoría electrónica clásica de la conductibilidad de los metales	264
Capítulo III.8.	Leyes de la corriente continua	267
§ III.8.1.	Fuerzas exteriores	267
§ III.8.2.	Leyes de Ohm y de Joule-Lenz	268
§ III.8.3.	Leyes de Kirchhoff	272
Capítulo III.9.	Corriente eléctrica en los líquidos y en los gases	275
§ III.9.1.	Leyes de la electrólisis de Faraday. Disociación electrolítica	275
§ III.9.2.	Atomicidad de las cargas eléctricas	277
§ III.9.3.	Conducción electrolítica de los líquidos	277
§ III.9.4.	Conducción de la electricidad por los gases	279
§ III.9.5.	Nociones sobre los distintos tipos de descarga a través de un gas	280
§ III.9.6.	Algunos conocimientos sobre el plasma	283
Capítulo III.10.	Campo magnético de la corriente continua	287
§ III.10.1.	Campo magnético. Ley de Ampère	287
§ III.10.2.	Ley de Biot—Savart—Laplace	290
§ III.10.3.	Algunos casos simples de campo magnético generado por corrientes continuas	293
§ III.10.4.	Interacción de conductores. Acción del campo magnético sobre los conductores con corriente	298

§ III.10.5.	Ley de la corriente total. Circuitos magnéticos	300
§ III.10.6.	Trabajo de traslación de un conductor con corriente en un campo magnético	305
Capítulo III.11.	Movimiento de las partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético	306
§ III.11.1.	Fuerza de Lorentz	306
§ III.11.2.	Efecto Hall	311
§ III.11.3.	Carga específica de las partículas. Espectrometría de masas	313
§ III.11.4.	Aceleradores de partículas cargadas	314
Capítulo III.12.	Inducción electromagnética	319
§ III.12.1.	Ley fundamental de la inducción electromagnética	319
§ III.12.2.	Fenómeno de autoinducción	323
§ III.12.3.	Inducción mutua	326
§ III.12.4.	Energía del campo magnético de la corriente eléctrica	328
Capítulo III.13.	Materiales magnéticos en un campo magnético	331
§ III.13.1.	Momentos magnéticos de los electrones y de los átomos	331
§ III.13.2.	Átomo del campo magnético	334
§ III.13.3.	Diamagnéticos y paramagnéticos en un campo magnético uniforme	337
§ III.13.4.	Campo magnético de los cuerpos magnéticos	340
§ III.13.5.	Ferromagnéticos	343
Capítulo III.14.	Fundamentos de la teoría de Maxwell	346
§ III.14.1.	Característica general de la teoría de Maxwell	346
§ III.14.2.	Primera ecuación de Maxwell	347
§ III.14.3.	Corriente de desplazamiento. Segunda ecuación de Maxwell	349
§ III.14.4.	Sistema completo de ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético	354

IV PARTE. OSCILACIONES Y ONDAS

Capítulo IV.1.	Oscilaciones armónicas libres	358
§ IV.1.1.	Oscilaciones armónicas	358
§ IV.1.2.	Oscilaciones armónicas mecánicas	362

§ IV.1.3.	Oscilaciones armónicas libres en un circuito oscilante	367
§ IV.1.4.	Composición de oscilaciones armónicas	369
Capítulo IV.2.	Oscilaciones amortiguadas y forzadas	378
§ IV.2.1.	Oscilaciones amortiguadas	378
§ IV.2.2.	Oscilaciones mecánicas forzadas	383
§ IV.2.3.	Oscilaciones eléctricas forzadas	387
Capítulo IV.3.	Ondas elásticas	392
§ IV.3.1.	Ondas longitudinales y transversales en un medio elástico	392
§ IV.3.2.	Ecuación de una onda móvil	395
§ IV.3.3.	Velocidad de fase y energía de las ondas elásticas	400
§ IV.3.4.	Principio de la superposición de las ondas. Velocidad de grupo	405
§ IV.3.5.	Interferencia de ondas. Ondas estacionarias	408
§ IV.3.6.	El efecto Doppler en la acústica	414
Capítulo IV.4.	Ondas electromagnéticas	416
§ IV.4.1.	Propiedades de las ondas electromagnéticas	416
§ IV.4.2.	Energía de las ondas electromagnéticas	422
§ IV.4.3.	Emisión de ondas electromagnéticas	424
§ IV.4.4.	Escala de las ondas electromagnéticas	427
§ IV.4.5.	Reflexión y refracción de las ondas electromagnéticas en la superficie de separación de los medios dieléctricos	430
§ IV.4.6.	Efecto Doppler	434

V PARTE. ÓPTICA

Capítulo V.1.	Interferencia de la luz	438
§ V.1.1.	Monocromatismo y coherencia de tiempo de la luz	438
§ V.1.2.	Interferencia de la luz. Coherencia espacial	440
§ V.1.3.	Interferencia de la luz en películas delgadas	447
§ V.1.4.	Interferencia de muchas ondas	452
Capítulo V.2.	Difracción de la luz	456
§ V.2.1.	Principio de Huygens—Fresnel	458
§ V.2.2.	Difracción de Fresnel	460

§ V.2.3.	Difracción de Fraunhofer	462
§ V.2.4.	Difracción en una red espacial	468
§ V.2.5.	Poder resolutivo de los instrumentos ópticos	471
§ V.2.6.	Holografía	472
Capítulo V.3.	Absorción, difusión y dispersión de la luz. Radiación de Vavlov—Cherenkov	475
§ V.3.1.	Interacción de la luz con la sustancia	475
§ V.3.2.	Absorción de la luz	477
§ V.3.3.	Difusión de la luz	480
§ V.3.4.	Dispersión normal y anómala de la luz	482
§ V.3.5.	Teoría electrónica clásica de la dispersión de la luz	483
§ V.3.6.	Radiación de Vavlov—Cherenkov	487
Capítulo V.4.	Polarización de la luz	489
§ V.4.1.	Polarización de la luz al reflejarse y refractarse en el límite de separación de dos medios dieléctricos	489
§ V.4.2.	Doble refracción	492
§ V.4.3.	Interferencia de la luz polarizada	498
§ V.4.4.	Anisotropía óptica artificial	502
§ V.4.5.	Rotación del plano de polarización	503
Capítulo V.5.	Radiación térmica	505
§ V.5.1.	Radiación térmica. Ley de Kirchhoff	505
§ V.5.2.	Leyes de Stefan—Boltzmann y de Wien	509
§ V.5.3.	Fórmula de Planck	511
§ V.5.4.	Pirometría óptica	514
Capítulo V.6.	Fundamentos de la óptica cuántica	517
§ V.6.1.	Efecto fotoeléctrico externo	517
§ V.6.2.	Masa e impulso del fotón. Presión de la luz	521
§ V.6.3.	Efecto Compton	522
§ V.6.4.	Dualidad ondulatoria-corpúscular de las propiedades de la luz	525

VI PARTE. FÍSICA DE LOS ÁTOMOS Y MOLECULAS

Capítulo VI.1.	Elementos de la mecánica cuántica	527
§ VI.1.1.	Dualidad ondulatoria-corpúscular de las propiedades de las partículas de la sustancia	527

§ VI.1.2.	Ecuación de Schrödinger	530
§ VI.1.3.	Movimiento de una partícula libre	532
§ VI.1.4.	Partícula en un pozo de potencial unidimensional de profundidad infinita	533
§ VI.1.5.	Oscilador lineal armónico	535
§ VI.1.6.	Relaciones de incertidumbre de Heisenberg	540
§ VI.1.7.	Efecto túnel	543
Capítulo VI.2.	Estructura de los átomos y moléculas y sus propiedades ópticas	546
§ VI.2.1.	Átomo de hidrógeno e iones hidrogenoides	546
§ VI.2.2.	Cuantificación espacial	551
§ VI.2.3.	Principio de Pauli. Sistema periódico de los elementos de Mendeléiev	552
§ VI.2.4.	Enlaces químicos y estructura de las moléculas	555
§ VI.2.5.	Algunas propiedades ópticas de las moléculas	558
§ VI.2.6.	Radiaciones forzadas. Generadores cuánticos ópticos	566

VII PARTE. FUNDAMENTOS DE FÍSICA DE LOS SÓLIDOS

Capítulo VII.1.	Estructura y algunas propiedades de los sólidos	570
§ VII.1.1.	Estructura de los sólidos	570
§ VII.1.2.	Dilatación de los sólidos	572
§ VII.1.3.	Breve información acerca de las propiedades elásticas de los sólidos	573
§ VII.1.4.	Nociones acerca de las transiciones de fase de los sólidos	577
Capítulo VII.2.	Algunos conocimientos acerca de la física cuántica de los sólidos	580
§ VII.2.1.	Nociones de estadísticas cuánticas	580
§ VII.2.2.	Funciones de distribución de Bose—Einstein y Fermi—Dirac	581
§ VII.2.3.	Degeneración de los sistemas de partículas descritos por las estadísticas cuánticas	584
§ VII.2.4.	Gas de Fermi electrónico degenerado en los metales	586
§ VII.2.5.	Noción de la teoría cuántica de la conductibilidad eléctrica de los metales	590
§ VII.2.6.	Fenómeno de superconductividad	592

§ VII.2.7.	Capacidad calorífica de los sólidos	596
§ VII.2.8.	Nociones acerca de la teoría de las bandas en los sólidos	602
§ VII.2.9.	Metales y dieléctricos en la teoría de las bandas	605
§ VII.2.10.	Conductibilidad eléctrica de los semiconductores	607
§ VI.2.11.	Nociones sobre los fenómenos eléctricos de contacto en los metales y semiconductores	612

VIII PARTE. FÍSICA DEL NÚCLEO Y DE LAS PARTÍCULAS ELEMENTALES

Capítulo VIII.1.	Estructura y propiedades principales de los núcleos atómicos	618
§ VIII.1.1.	Propiedades fundamentales y estructura del núcleo	618
§ VIII.1.2.	Energía de enlace de los núcleos. Defecto de masa	620
§ VIII.1.3.	Fuerzas nucleares	624
§ VIII.1.4.	Radiactividad	625
§ VIII.1.5.	Desintegración α	629
§ VIII.1.6.	Desintegración beta	630
§ VIII.1.7.	Rayos gamma	633
§ VIII.1.8.	Efecto Mössbauer	636
§ VIII.1.9.	Reacciones nucleares	639

Capítulo VIII.2.	Partículas elementales	640
§ VIII.2.1.	Nociones generales acerca de las partículas elementales	649
§ VIII.2.2.	Transmutación de las partículas elementales. Interacciones fundamentales	654
§ VIII.2.3.	Leptones y hadrones	659
§ VIII.2.4.	Partículas fundamentales	660

IX PARTE. APÉNDICES

§ IX.1.	Sistemas de unidades de las magnitudes físicas	672
§ IX.2.	Constantes físicas fundamentales	683
§ IX.3.	Errores de medición de las magnitudes físicas	683
§ IX.4.	Cálculos aproximados sin tener exactamente en cuenta los errores	696
	Índice alfabético de materias	699

Prólogo a la segunda edición

En la preparación de ingenieros para las diversas ramas de la economía nacional desempeñan un gran papel las ciencias fundamentales y, en particular, la física. Por eso, en los centros de enseñanza técnica superior (CETS), el curso de física ha sufrido durante los últimos años serios cambios. En él se han reflejado las direcciones fundamentales de desarrollo de la física moderna, y el volumen y nivel científico del curso han crecido considerablemente. A causa de esto, todos los materiales didácticos de física para dichos centros de enseñanza son ediciones en tres tomos del orden de 75 a 80 pliegos de imprenta. Al mismo tiempo se siente la necesidad de tener un compendio del curso de física para los CETS.

El volumen de este Prontuario está de acuerdo con el programa actual del curso de física de los CETS. Los conocimientos contenidos en él abarcan todas las partes de dicho programa: se dan las definiciones de los conceptos físicos, se enuncian sucintamente las leyes y regularidades físicas, se hacen las aclaraciones necesarias y en una serie de casos se sacan también las conclusiones. El material experimental se ha excluido, a pesar del importante papel que desempeña en el curso de física. Esto responde al deseo de limitar el volumen del Prontuario. Las unidades de las magnitudes físicas y los sistemas de unidades se dan en un breve apéndice (IX parte).

En esta segunda edición del Prontuario se han escrito de nuevo el capítulo VIII.2, «Partículas elementales» y los §§ IX.3 y IX.4. En otras partes se han hecho pequeñas correcciones.

El Prontuario se destina en primer lugar a los estudiantes de los CETS, pero puede ser útil a los técnicos, ingenieros y aspirantes al doctorado no especializados en algún campo de la física, así como a los profesores de las escuelas medias y superiores.

Los conocimientos de matemáticas necesarios para el manejo del manual corresponden al nivel del curso ordinario de matemáticas superiores de los CETS. El detallado índice alfabético de materias y el sistema de llamadas utilizado facilitan la búsqueda de los conocimientos necesarios. En las llamadas se indica la parte del libro, el capítulo, el párrafo y el punto en que se encuentra la información referente a la cuestión dada. En las llamadas que afectan al material del mismo párrafo sólo se indica el punto, y en las que se refieren a apéndice se da únicamente el número de la parte (IX).

De las partes I, IV, V y IX es autor A. A. Detlaf, de las II, VI, VII y del capítulo VIII.1, B. M. Yavorski, de la III parte, A. A. Detlaf y B. M. Yavorski, y del capítulo VIII.2, A. L. Naúmov.

Capítulo I.1. Cinemática

§ I.1.1. Movimiento mecánico. Objeto de la mecánica

1°. La forma más simple de movimiento que hay en la naturaleza es el *movimiento mecánico*, que consiste en la variación de la posición recíproca de los cuerpos o de sus partes en el espacio en el transcurso del tiempo. La parte de la física que se ocupa del estudio de las leyes del movimiento mecánico se llama *mecánica*. En un sentido más estrecho de la palabra, se suele entender por mecánica la *mecánica clásica*, en la cual se estudian los movimientos de los cuerpos macroscópicos que se efectúan con velocidades muchísimo menores que la velocidad de la luz en el vacío. La base de la mecánica clásica son las leyes de Newton. Por esto también suele dársele el nombre de *mecánica newtoniana*. Las leyes del movimiento de los cuerpos con velocidades próximas a la de la luz en el vacío son objeto del estudio de la *mecánica relativista* (I.5.1.1°), y las leyes del movimiento de las micropartículas (por ejemplo, de los electrones en los átomos, moléculas, cristales, etc.) lo son de la *mecánica cuántica* (VI.1.1.1°).

2°. La mecánica clásica tiene tres partes principales: estática, cinemática y dinámica. En la *estática* se estudian las leyes de la composición de las fuerzas y las condiciones de equilibrio de los cuerpos. En la cinemática se da la descripción matemática de todos los tipos posibles de movimiento mecánico sin relacionarla con las causas que determinan cada tipo concreto de movimiento. En la *dinámica* se analiza la influencia de las interacciones entre los cuerpos sobre su movimiento mecánico.

3°. Las propiedades mecánicas de los cuerpos se determinan por su naturaleza química, estructura interna y estado, cuyo estudio no es objeto de la mecánica, sino de otras partes de la física. Por esto, para describir los cuerpos móviles reales de acuerdo con las condiciones de cada problema concreto, se utilizan en la mecánica diversos modelos simplificados: el punto

material, el cuerpo rígido o sólido invariable, el cuerpo perfectamente elástico, el cuerpo plástico o absolutamente inelástico, etc.

Se llama *punto material* un cuerpo cuya forma y dimensiones carecen de importancia en las condiciones del problema dado. Por ejemplo, el movimiento de un buque de un punto a otro se puede considerar en primera aproximación como movimiento de un punto material. Pero en el caso en que sea necesario tener en cuenta un «detalle» de este movimiento, como el balanceo del barco cuando el mar está agitado, el buque debe considerarse como cuerpo extenso de forma determinada. En la literatura, en vez de «punto material» suele llamarse simplemente «punto».

Cualquier cuerpo extenso o sistema de cuerpos de este tipo que formen un *sistema mecánico* que se haya de investigar puede considerarse como un *sistema de puntos materiales*. Para esto todos los cuerpos del sistema deben dividirse mentalmente en un número de partes tan grande, que las dimensiones de cada una de ellas sean despreciables por su pequeñez en comparación con las dimensiones de los mismos cuerpos.

4°. Se da el nombre de *cuerpo rígido o sólido invariable* a aquél, cuyas deformaciones pueden despreciarse en las condiciones de un problema dado. La distancia entre dos puntos cualesquiera de un cuerpo rígido no varía sean cuales fueran las acciones que se ejerzan sobre él. El cuerpo rígido se puede considerar como un sistema de puntos materiales rígidamente unidos entre sí.

Se llama *cuerpo perfectamente elástico* aquel, cuya deformación se subordina a la ley de Hooke (VII.1.3.4°). Una vez que cesa la acción del esfuerzo exterior, este cuerpo recupera totalmente sus dimensiones iniciales y su forma.

Se dice que un cuerpo es *absolutamente inelástico o plástico* si, cuando cese la acción de la fuerza exterior, conserva totalmente el estado deformado provocado por dicha acción.

§ I.1.2. Sistema de referencia. Trayectoria, espacio recorrido y vector traslación de un punto

1°. La posición de un cuerpo en el espacio sólo puede determinarse con respecto a otros cuerpos. Por ejemplo, tiene sentido hablar de la posición de los planetas con respecto al Sol; de un avión o de una motonave con respecto a la Tierra, pero

no puede indicarse su posición en el espacio «en general», sin relacionarla con cualquier cuerpo concreto. El cuerpo rígido, con el cual está asociado invariablemente un sistema de coordenadas provisto de relojes, que se utiliza para determinar la posición en el espacio de los cuerpos y partículas que se estudian en diferentes instantes, se llama *sistema de referencia*. A veces se llama sistema de referencia al mismo sistema de coordenadas provisto de relojes, y el cuerpo rígido del cual es solidario se denomina *cuerpo de referencia*. En cada problema concreto el sistema de referencia se elige de tal modo que simplifique lo más posible su solución. En física se utilizan generalmente sistemas de referencia inerciales (1.2.1.2°).

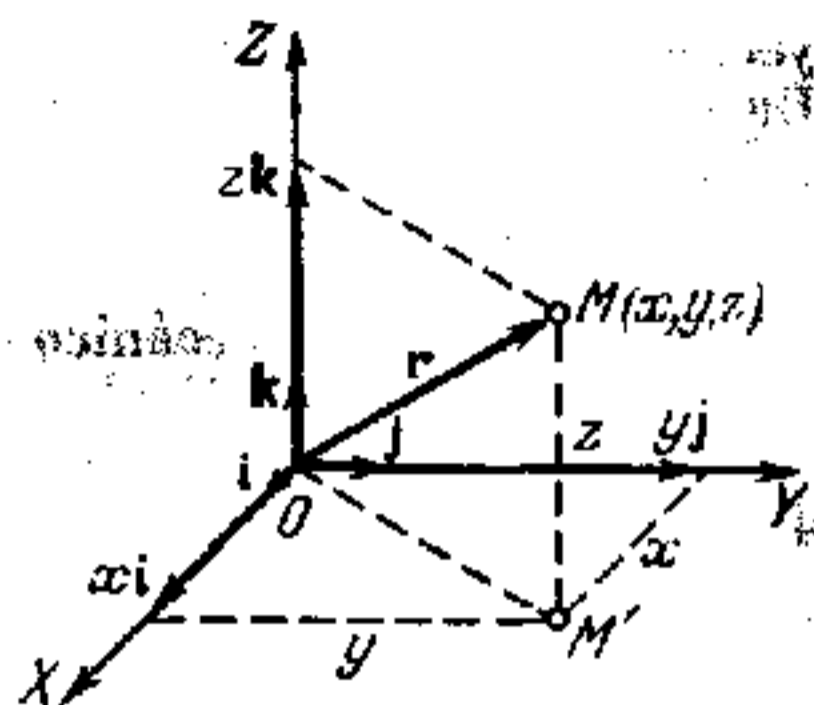


FIG. 1.1.1.

2°. El sistema de coordenadas que más se usa es el cartesiano rectangular (fig. 1.1.1) cuya *base ortonormalizada* está constituida por tres vectores unitarios por el módulo y recíprocamente ortogonales i , j y k , trazados desde el origen de coordenadas O . La posición de un punto arbitrario M se caracteriza por el radio vector r que une el origen de coordenadas O con el punto M . El vector r se puede descomponer según la base i , j , k :

$$r = xi + yj + zk,$$

donde xi , yj y zk son las componentes del vector r a lo largo de los ejes de coordenadas. Los coeficientes de descomposición x , y , z son las coordenadas cartesianas del punto M y también, en virtud de la ortogonalidad de los vectores de la base, las proyecciones del radio vector r sobre los correspondientes ejes de coordenadas.

El movimiento de un punto material estará completamente determinado si se dan las tres funciones continuas y unívocas del tiempo t :

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad y \quad z = z(t),$$

que definen la variación de las coordenadas del punto con el tiempo.

Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones cinemáticas del movimiento del punto*. Son equivalentes a la ecuación vectorial del movimiento del punto: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

3°. La línea que describe en el espacio un punto en movimiento se llama *trayectoria* de dicho punto. Las ecuaciones cinemáticas del movimiento del punto dan la ecuación de su trayectoria en forma paramétrica (el parámetro es el tiempo t). En dependencia de la forma de la trayectoria, el movimiento del punto puede ser *rectilíneo* o *curvilíneo*. El movimiento del punto se dice que es *plano*, si su trayectoria se encuentra totalmente en un plano.

El movimiento mecánico de un cuerpo es relativo, es decir, su carácter y, en particular, la forma de las trayectorias de los puntos de dicho cuerpo dependen del sistema de referencia que se elija.

4°. En el caso general, la trayectoria de un punto material no es plana, sino una curva espacial. Para esta curva se introduce el concepto de plano osculador. Se llama *plano osculador* en un punto arbitrario M de una curva, la posición límite del plano que pasa por tres puntos cualesquiera de la curva cuando estos tres puntos se aproximan ilimitadamente al punto M . Recibe el nombre de *círculo osculador* en un punto M de una curva, el límite de la circunferencia que pasa por tres puntos de la curva considerada cuando estos tres puntos se aproximan ilimitadamente al punto M . El círculo osculador se encuentra en el plano osculador. El centro del círculo osculador y su radio se llaman respectivamente *centro de curvatura* y *radio de curvatura* de la curva correspondiente en el punto M . La recta que une el punto M con el centro de curvatura se llama *normal principal* a la curva en el punto M . La tangente a la curva en el punto M es perpendicular a la normal principal en este punto y también se encuentra en el plano osculador.

5°. El *espacio recorrido* por un punto es la suma de las longitudes de todos los tramos de la trayectoria recorridos por este punto en el intervalo de tiempo que se considere. El instante $t = t_0$ antes del cual el movimiento no se estudia, se llama *instante inicial*, y la posición del punto en este instante (punto A en la fig. 1.1.2), *posición inicial*. En virtud del modo arbitrario en que se elige el punto de referencia del tiempo, se suele suponer que $t_0 = 0$. El espacio s recorrido por el punto desde su posición inicial es una función escalar del tiempo: $s = s(t)$ y, como se ve por la misma definición, el espacio recorrido por el punto no puede ser una magnitud negativa. Si el punto se mueve por un arco de trayectoria AB (fig. 1.1.2) siempre en

la misma dirección y en un instante t se encuentra en el punto M , entonces $s(t) = \overline{AM}$. En cambio, si el punto se mueve por la trayectoria de un modo más complejo, por ejemplo, en el instante $t_1 < t$ se traslada de A a B y después, moviéndose en sentido contrario, en el instante t retorna al punto M , será $s(t) = \overline{AB} + \overline{BM}$.

6°. Se llama *vector traslación* de un punto en un intervalo de tiempo entre $t = t_1$ y $t = t_2$, el vector trazado desde la posición del punto en el instante t_1 a su posición en el instante t_2 . Este vector es igual al incremento del radio vector del punto durante el espacio de tiempo considerado,

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1).$$

El vector traslación siempre está dirigido a lo largo de la cuerda que une los extremos del tramo de trayectoria correspondiente.

En la fig. 1.1.2 se muestra el vector traslación del punto en el intervalo de tiempo entre t_0 y t , igual a $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$.

El vector traslación del punto en el lapso de t a $t + \Delta t$ es igual a

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \Delta x \cdot \mathbf{i} + \Delta y \cdot \mathbf{j} + \Delta z \cdot \mathbf{k}$$

donde Δx , Δy y Δz son los incrementos (variaciones) de las coordenadas del punto durante el intervalo de tiempo considerado.

7°. Un punto material, moviéndose libremente en el espacio, sólo puede efectuar tres *movimientos independientes*, es decir, tales que cada uno de ellos no puede representarse en forma de combinación de los demás. En efecto, el movimiento del punto a lo largo de cada uno de los ejes del sistema de coordenadas rectangulares cartesianas no puede realizarse a expensas de su movimiento a lo largo de los otros dos ejes. El número de movimientos independientes que puede efectuar un sistema mecánico se llama *número de grados de libertad* de este sistema. Así, pues, un punto material libre tiene tres grados de libertad.

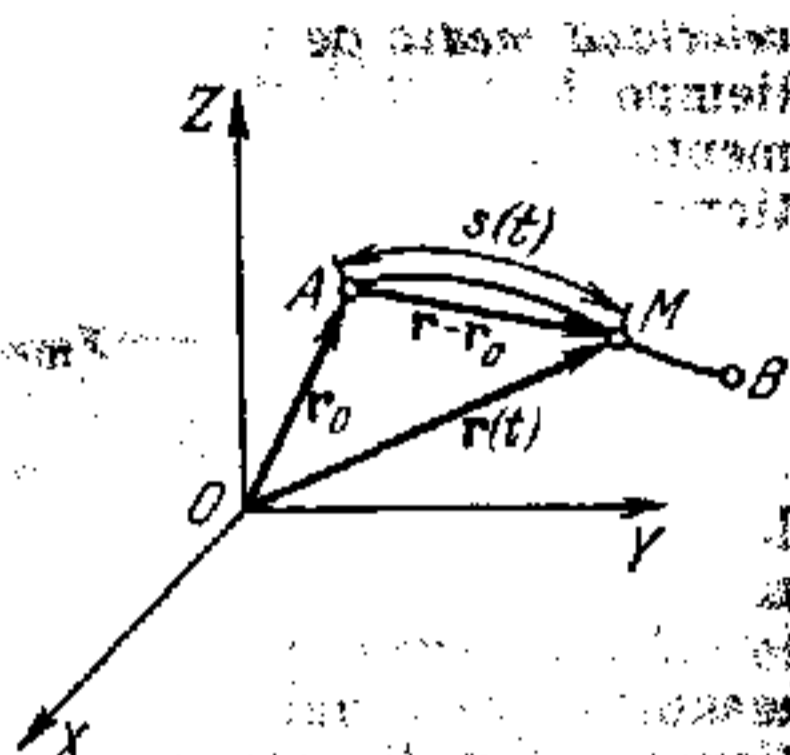


FIG. 1.1.2.

§ 1.1.3. Velocidad

1°. Para caracterizar la rapidez del movimiento de los cuerpos se introduce en mecánica el concepto de velocidad. Se llama *velocidad media* de un punto en movimiento en un intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$, el vector \mathbf{v}_{med} igual a la razón del incremento $\Delta \mathbf{r}$ del radio vector del punto durante este intervalo de tiempo, a su duración Δt :

$$\mathbf{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

El vector \mathbf{v}_{med} tiene la misma dirección que $\Delta \mathbf{r}$, es decir, a lo largo de la cuerda que une los extremos del tramo de trayectoria correspondiente.

2°. *Velocidad* (o *velocidad instantánea*) de un punto es una magnitud vectorial \mathbf{v} igual a la primera derivada respecto del tiempo del radio vector \mathbf{r} del punto que se considera:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

La velocidad de un punto en un instante t es igual al límite de la velocidad media \mathbf{v}_{med} cuando la duración del intervalo Δt disminuye ilimitadamente

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{med}}.$$

El vector \mathbf{v} , velocidad del punto, está dirigido según la tangente a la trayectoria en el sentido del movimiento, lo mismo que el vector $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ de una pequeña traslación del punto en un intervalo de tiempo muy pequeño dt .

El espacio ds recorrido por el punto en un tiempo dt es igual al módulo del vector traslación: $ds = |d\mathbf{r}|$. Por esto el módulo del vector velocidad del punto es igual a la primera derivada del espacio recorrido respecto del tiempo:

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}.$$

3°. La descomposición del vector \mathbf{v} según la base de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares tiene la forma:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}.$$

La proyección de la velocidad del punto sobre los ejes de coordenadas es igual a las primeras derivadas respecto del tiempo de las correspondientes coordenadas del punto:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

y el módulo del vector velocidad

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

4°. Si el movimiento del punto es rectilíneo, la dirección de su vector velocidad permanece invariable. Se dice que el movimiento del punto es *uniforme* si el módulo de su velocidad no varía con el tiempo: $v = ds/dt = \text{const.}$ Cuando el movimiento del punto es uniforme, el espacio s recorrido por él depende linealmente del tiempo: $s = vt$ (con la condición de que $t_0 = 0$, véase I.1.2.5°).

Si el módulo de la velocidad del punto aumenta con el tiempo ($dv/dt > 0$), el movimiento se llama *acelerado*, y si disminuye ($dv/dt < 0$), se denomina *retardado*.

5°. Se da el nombre de *velocidad absoluta media del movimiento variado* de un punto en un tramo determinado de su trayectoria, a la magnitud escalar v_{med} igual a la razón de la longitud Δs de este tramo de trayectoria, al tiempo Δt que tarda el punto en recorrerlo:

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Esta velocidad es igual al módulo del vector velocidad de un movimiento uniforme tal, que en recorrer este mismo espacio Δs tarde el punto el mismo tiempo que con el movimiento variado.

Cuando el movimiento del punto es curvilíneo $|\Delta \mathbf{r}| < \Delta s$. Por esto, en el caso general, la velocidad absoluta media de punto v_{med} no es igual al módulo de la velocidad media del punto v_{med} en este mismo tramo de trayectoria (I.1.3.1°): $v_{\text{med}} \geq |v_{\text{med}}|$, donde el signo igual corresponde a la parte rectilínea de la trayectoria.

6°. En el caso del movimiento plano de un punto M (I.1.2.3°) conviene frecuentemente utilizar las coordenadas polares r y φ ,

donde r es la distancia desde el polo O hasta el punto M , y φ , el ángulo polar medido desde el eje polar OA (fig. 1.1.3). La velocidad v del punto M se puede descomponer en dos componentes perpendiculares entre sí: la *velocidad radial* v_r y la *velocidad tangencial* v_φ :

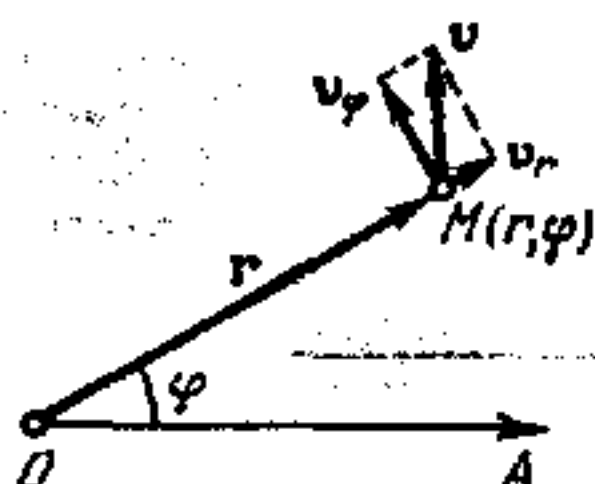


FIG. 1.1.3.

$$v = v_r + v_\varphi,$$

siendo

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} r \quad \text{y} \quad v_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} [kr].$$

Aquí r es el radio vector polar de punto M , y k , el vector unitario dirigido perpendicularmente al plano del movimiento del punto, de forma que desde su extremo se vea efectuarse la rotación del vector r , al aumentar el ángulo polar φ , en sentido contrario al de las agujas del reloj.

El módulo del vector velocidad v de un punto M que realiza un movimiento plano:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

Durante un tiempo pequeño dt el radio vector polar r del punto que realiza el movimiento plano barre un sector circular de área $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. Por esto la magnitud

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r v_\varphi$$

se llama *velocidad sectorial*.

§ 1.1.4. Aceleración

1°. Para caracterizar la rapidez con que varía el vector velocidad de un punto se introduce en mecánica el concepto de *aceleración*. Se llama *aceleración media* de un punto en un intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$, el vector a_{med} igual a la razón del incremento: Δv del vector velocidad del punto en este lapso, a la duración Δt de dicho intervalo:

$$a_{\text{med}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

2°. *Aceleración (o aceleración instantánea)* de un punto es la magnitud vectorial \mathbf{a} igual a la primera derivada respecto del tiempo de la velocidad \mathbf{v} del punto considerado o, lo que es lo mismo a la segunda derivada respecto del tiempo del radio vector, \mathbf{r} de dicho punto:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

La aceleración del punto en un instante t es igual al límite de la velocidad media \mathbf{a}_{med} cuando la duración del intervalo Δt disminuye ilimitadamente:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{a}_{\text{med}}.$$

3°. Descomposición del vector \mathbf{a} según la base de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Las proyecciones de la aceleración sobre los ejes de coordenadas son iguales a las primeras derivadas respecto del tiempo de las correspondientes proyecciones de la velocidad o, lo que es lo mismo, a las segundas derivadas respecto del tiempo de las correspondientes coordenadas del punto:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

El módulo del vector aceleración

$$\begin{aligned} a = |\mathbf{a}| &= \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

4°. El vector aceleración del punto se encuentra en el plano osculador (I.1.2.4°) que pasa por el punto considerado M de la trayectoria, y está dirigido hacia la parte cóncava de la misma, BC (fig. 1.1.4). En este plano el vector aceleración \mathbf{a} se puede descomponer en las dos componentes perpendiculares entre sí \mathbf{a}_τ y \mathbf{a}_n :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n.$$

5°. La componente a_τ se llama *aceleración tangencial* del punto y está dirigida según la tangente a la trayectoria del punto

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \tau \quad \text{y} \quad a_\tau = \frac{dv}{dt},$$

donde $\tau = v/v$ es el vector tangencial unidad trazado por el punto M de la trayectoria en la dirección de la velocidad v del punto, y a_τ es la proyección de la aceleración tangencial sobre la dirección del vector v . La aceleración tangencial caracteriza la rapidez con que varía el módulo del vector velocidad del punto. Los vectores a_τ y v coinciden por su dirección, es decir, $a_\tau > 0$, cuando el movimiento del punto es acelerado



FIG. I.1.4.

(I.1.3.4°); los vectores a_τ y v tienen la misma dirección y sentidos opuestos, o sea, $a_\tau < 0$, cuando el movimiento del punto es retardado, y $a_\tau = 0$, cuando su movimiento es uniforme. Si $a_\tau = \text{const} \neq 0$, el movimiento se llama *uniformemente variado*. Cuando el movimiento es uniforme, el módulo de la velocidad del punto depende linealmente del tiempo:

$$v = v_0 + a_\tau t,$$

donde $v_0 = v(0)$ es el módulo de la velocidad inicial, es decir, de la velocidad en el instante inicial $t = 0$. Si $a_\tau = \text{const} > 0$, el movimiento del punto se dice que es *uniformemente acelerado*, y si $a_\tau = \text{const} < 0$, el movimiento del punto se denomina *uniformemente retardado*.

6°. La componente a_n de la aceleración a se llama *aceleración normal* del punto. Está dirigida según la normal principal a la trayectoria en el punto M considerado y hacia el centro de curvatura de la trayectoria (I.1.2.4°). Por esto a_n suele llamarse también *aceleración centrípeta* del punto. La aceleración normal

$$a_n = \frac{v^2}{R} n,$$

donde n es el vector unidad de la normal principal, y R es el radio de curvatura de la trayectoria. La aceleración normal caracteriza la rapidez con que varía la dirección del vector velocidad del punto.

Si el punto se mueve rectilíneamente, la aceleración normal $a_n = 0$ y la aceleración del punto es igual a su aceleración tangencial: $a = a_t$.

§ 1.1.5. Movimiento de traslación y de rotación de un sólido*

1°. Se llama *movimiento de traslación* de un sólido aquel, durante el cual cualquier recta asociada rígidamente a dicho sólido (por ejemplo, la recta AB , de la fig. 1.1.5) se traslada permaneciendo paralela a su dirección inicial (A_0B_0). Tienen movimiento de traslación con respecto a la Tierra, por ejemplo, la cabina de un ascensor, la cuchilla de un torno, la aguja de una brújula cuando su caja se desplaza en un plano horizontal, etc.

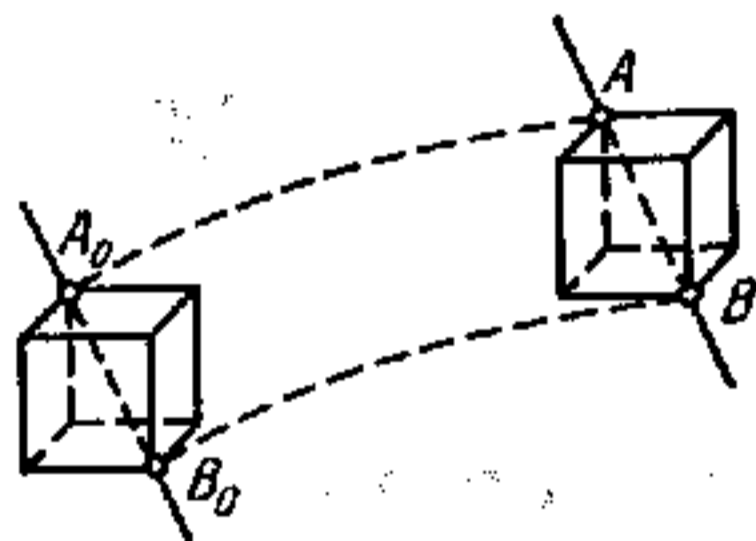


FIG. 1.1.5.

Cuando un sólido se traslada, todos sus puntos se desplazan exactamente lo mismo: en un tiempo pequeño dt , los radios vectores de estos puntos varían en una misma magnitud dr . Respectivamente, en cada instante todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad, igual a dr/dt , y, por consiguiente, también son iguales sus aceleraciones. Por esto el estudio cinemático del movimiento de traslación de un sólido se reduce al estudio del movimiento de cualquiera de sus puntos. En la dinámica se estudia el movimiento del centro de inercia del sólido (1.2.3.3°). Todo cuerpo sólido que se mueve libremente en el espacio tiene tres grados de libertad de traslación (1.1.2.7°), que corresponden a sus traslaciones a lo largo de los tres ejes de coordenadas.

2°. El movimiento de un sólido durante el cual dos de sus puntos A y B permanecen fijos, se llama *rotación* (o *movimiento de rotación*) del sólido alrededor de un eje fijo. La recta en reposo AB recibe el nombre de *eje de rotación* del sólido. Al girar

*) En este párrafo se consideran únicamente sólidos invariables o cuerpos rígidos.

alrededor del eje fijo, todos los puntos del sólido describen circunferencias, cuyos centros se encuentran en el eje de rotación y cuyos planos son perpendiculares a él. Este tipo de movimiento, con respecto a la Tierra, lo efectúan, por ejemplo, los rotores de las turbinas, de los motores eléctricos y de los generadores sujetos a ella.

El sólido que gira alrededor de un eje fijo sólo tiene un grado de libertad (I.1.2.7°). Su posición en el espacio se determina totalmente por el valor φ del ángulo de rotación a partir de una posición determinada (inicial).

3°. Para caracterizar la rapidez y el sentido de la rotación del sólido alrededor del eje sirve la velocidad angular. Se llama *velocidad angular* el vector ω , igual numéricamente a la primera derivada del ángulo de rotación φ , respecto del tiempo t , y dirigido a lo largo del eje de rotación fijo, de tal modo que desde su extremo se vea que el sólido gira en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. I.1.6)*):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} .$$

Aquí $d\varphi$ es el vector rotación elemental (pequeña) del sólido durante el tiempo dt , dirigido a lo largo del eje de rotación de acuerdo también con la regla del tornillo (fig. I.1.6).

Los vectores axiales $d\varphi$ y ω no tienen puntos de aplicación determinados: pueden tomarse desde cualquier punto del eje de rotación. En la fig. I.1.6 están trazados desde cierto punto O del eje de rotación fijo, el cual se toma al mismo tiempo como origen de coordenadas del sistema de referencia.

*) La dirección del vector ω puede determinarse también por la *regla del tornillo*: dicha dirección coincide con la del movimiento de avance de un tornillo roscado a derechas que se mueva junto con el sólido. Los vectores semejantes al ω , cuya dirección está relacionada con el sentido de una rotación y se invierte al pasar del sistema de coordenadas dextrósum al sistema de coordenadas sinestrósum, se llaman *seudovectores* o *vectores axiales* (para diferenciarlos de los ordinarios o *vectores polares*, que no cambian de sentido cuando se efectúa la transformación de coordenadas antedicha). Por ejemplo, el producto vectorial de dos vectores polares es un pseudovector, mientras que el producto vectorial de un pseudovector por un vector polar es un vector polar.

La rotación del cuerpo se dice que es *uniforme* si el valor numérico de su velocidad angular no varía con el tiempo: $\omega = \text{const.}$ En este caso el ángulo de rotación del sólido depende linealmente del tiempo: $\varphi = \omega t$.

4°. Un punto arbitrario M de un sólido que gira alrededor de un eje fijo OZ con la velocidad angular ω , describe una circunferencia de radio ρ con centro en el punto O' (fig. 1.1.7). La velocidad v del punto M , a diferencia de la velocidad angular del sólido, se llama frecuentemente *velocidad lineal*. Esta velocidad tiene dirección perpendicular al eje de rotación (es decir, al vector ω) y al radio vector ρ trazado al punto M desde el centro de la circunferencia O' , e igual a su producto vectorial:

$$\mathbf{v} = [\omega \rho] := [\omega \mathbf{r}] \quad \text{y} \quad v = \omega \rho.$$

Aquí $\mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \rho$ es el radio vector del punto M trazado desde el punto O del eje de rotación tomado como origen de coordenadas.

5°. Se llama *período de rotación* el intervalo de tiempo T durante el cual el sólido, girando uniformemente con la velocidad ω , da una vuelta completa alrededor del eje de rotación (es decir, gira un ángulo $\varphi = 2\pi$): $T = 2\pi/\omega$.

La *frecuencia de rotación* $n = 1/T = \omega/2\pi$ indica el número de vueltas (revoluciones) que da el sólido en la unidad de tiempo, cuando la rotación es uniforme y la velocidad angular es ω .

6°. El movimiento de un sólido en el cual uno de sus puntos permanece fijo, se denomina *rotación del sólido alrededor de un punto fijo*. Por lo general, este punto se toma como origen de coordenadas del sistema de referencia en reposo. En la rotación alrededor de un punto fijo todos los puntos del cuerpo se mueven por superficies de esferas concéntricas cuyos centros se hallan en el punto fijo. Este movimiento del sólido se puede considerar en cada instante como rotación alrededor de cierto eje que pasa por el punto fijo y recibe el nombre de *eje instantáneo de rotación*. En el caso general, la posición del eje instantáneo de rotación varía tanto con respecto a un sistema de referencia fijo, como con respecto a un sistema de referencia solidario del sistema que gira.

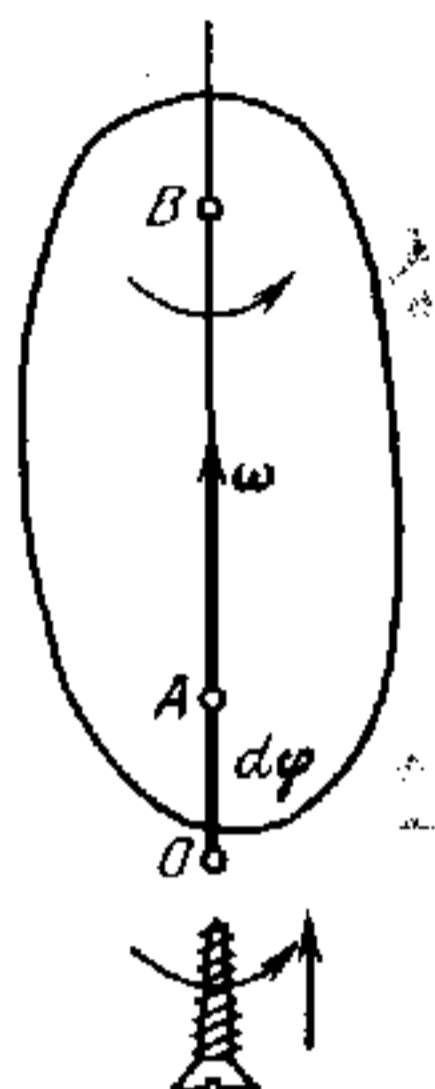


FIG. 1.1.6.

La velocidad v de un punto arbitrario M del sólido es:

$$v = [\omega r] \text{ y } v = \omega \rho.$$

Aquí $\omega = d\varphi/dt$ es la velocidad angular del cuerpo, dirigida a lo largo del eje instantáneo de rotación, lo mismo que el vector $d\varphi$ de la rotación elemental del sólido durante el pequeño tiempo dt ; r es el radio vector trazado al punto M desde el punto fijo O , alrededor del cual gira el sólido, y ρ es la distancia desde el punto M hasta el eje instantáneo de rotación. El sólido, en este caso, puede realizar tres movimientos independientes, a saber: girar alrededor de cada uno de los tres ejes perpendiculares entre sí que pasan por el punto fijo O . Por consiguiente, tiene tres grados de libertad (I.1.2.7°).

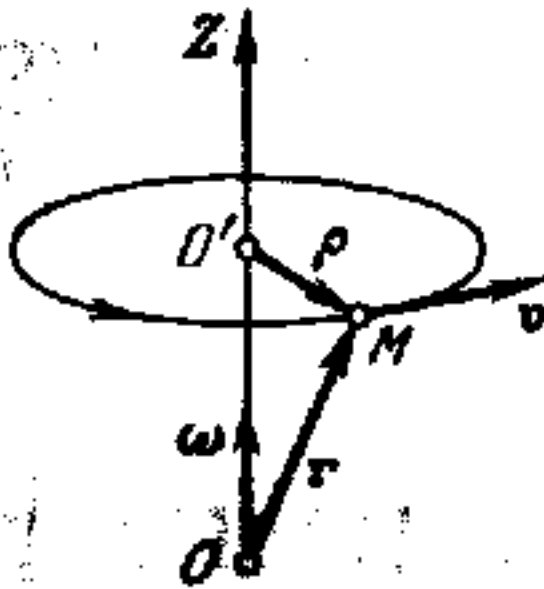


FIG. I.1.7.

7°. Para caracterizar la rapidez con que varía el vector velocidad angular del sólido durante la rotación no uniforme del cuerpo alrededor de un eje fijo o de un punto fijo, se introduce el vector *aceleración angular* ϵ del sólido, igual a la primera derivada de su velocidad angular ω respecto del tiempo t ,

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Si el sólido gira alrededor de un eje fijo, el vector ϵ está dirigido a lo largo de este eje, en el mismo sentido que ω cuando la rotación es acelerada ($d\omega/dt > 0$) y en sentido contrario si la rotación es retardada ($d\omega/dt < 0$). La proyección de la aceleración angular sobre el eje de rotación fijo OZ es igual a

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt},$$

donde ω_z es la proyección sobre este mismo eje del vector ω .

8°. La aceleración a de un punto arbitrario M del sólido que gira alrededor de un punto fijo O o de un eje fijo que pasa por dicho punto suele llamarse, para diferenciarla de la aceleración angular del sólido, *aceleración lineal*. Esta aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [\omega r] = a_{\text{rot}} + a_{\text{axip}},$$

donde $a_{\text{rot}} = [\epsilon r]$ es la *aceleración circular* o de rotación del punto y $a_{\text{axip}} = [\omega \{\omega r\}]$ es su *aceleración axípeta* y está dirigida hacia el eje de rotación instantáneo.

Si el sólido gira alrededor de un eje fijo OZ (fig. 1.1.7), la aceleración circular del punto M coincide con su aceleración tangencial a_{τ} (1.1.4.5°), y la aceleración axípeta, con la aceleración normal a_n (1.1.4.6°):

$$a_{\tau} = [\epsilon r] = [\epsilon \rho], \quad a_n = -\omega^2 \rho.$$

9°. Todo movimiento complejo de un sólido se puede descomponer en dos movimientos simples: uno de traslación, con la velocidad v_A de cierto punto arbitrario A del sólido, y otro de rotación alrededor de un eje instantáneo que pase por dicho punto. La velocidad angular ω no depende del punto A que se elija. La velocidad de un punto arbitrario M del sólido

$$v = v_A + [\omega (r - r_A)],$$

donde r y r_A son, respectivamente, los radios vectores de los puntos M y A .

En la dinámica del sólido suele ser conveniente considerar el movimiento complejo del cuerpo como la composición de dos movimientos simultáneos: uno de traslación con la velocidad del centro de inercia (1.2.3.3°) y otro de rotación alrededor de dicho centro.

El caso más simple de movimiento complejo de un sólido es el *movimiento plano* o *planoparalelo*, en el cual todos los puntos del sólido se mueven en planos paralelos. Este movimiento lo efectúa, por ejemplo, un cilindro circular homogéneo que rueda por un plano inclinado. En el movimiento plano no varía la dirección del eje instantáneo de rotación del sólido alrededor de punto A , y los vectores ω y v_A son perpendiculares entre sí.

Capítulo 1.2. Leyes de Newton

§ 1.2.1. Primera ley de Newton. Sistemas inerciales de referencia

1°. Como *primera ley de la dinámica* tomó Newton la ley, establecida ya por Galileo, según la cual un punto material conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme mientras la acción de otros cuerpos no le obligue a salir de dicho estado.

La primera ley de Newton indica que el estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme no requiere para su conservación ninguna acción externa. En esto se pone de manifiesto una propiedad dinámica particular de los cuerpos que se llama *inercia*. Por esto a la primera ley de Newton se le da también el nombre de *ley o principio de la inercia*, y al movimiento de un cuerpo en ausencia de acciones por parte de otros cuerpos, el de *movimiento por inercia*.

2°. El movimiento mecánico es relativo: para un mismo cuerpo su carácter puede ser diferente en distintos sistemas de referencia (I.1.2.1°) que se muevan el uno con respecto al otro. Por ejemplo, un cosmonauta que se halle a bordo de un satélite artificial de la Tierra estará en reposo en el sistema de referencia solidario del satélite. Al mismo tiempo, con respecto a la Tierra se moverá junto con dicho satélite siguiendo una órbita elíptica, es decir, su movimiento no será uniforme ni rectilíneo. Es natural por esto que la primera ley de Newton deba cumplirse no en cualquier sistema de referencia. Por ejemplo, una esfera que se encuentre en el suelo liso del camarote de un barco que marche con movimiento uniforme y rectilíneo, puede comenzar a moverse por el suelo sin que sobre ella actúe ningún cuerpo externo. Para esto es suficiente que la velocidad del barco empiece a variar.

El sistema de referencia con respecto al cual un punto material, libre de acciones externas, está en reposo o se mueve uniforme y rectilíneamente, se llama *sistema de referencia inercial*. El contenido de la primera ley de Newton se reduce en esencia a dos afirmaciones: primera, que todos los cuerpos tienen la propiedad de la inercia y, segunda, que existen sistemas de referencia inerciales.

3°. Dos sistemas de referencia inerciales cualesquiera sólo pueden moverse el uno con respecto al otro con movimiento de traslación uniforme y rectilíneo. Se ha establecido experimentalmente que en la práctica es inercial el *sistema heliocéntrico de referencia* cuyo origen de coordenadas se halla en el centro de inercia (I.2.3.3°) del Sistema Solar (aproximadamente en el centro del Sol) y cuyos ejes están trazados en las direcciones de tres estrellas lejanas elegidas, por ejemplo, de tal manera, que los ejes de coordenadas sean perpendiculares entre sí.

El sistema de referencia del laboratorio, cuyos ejes de coordenadas están asociados rígidamente a la Tierra no es inercial, a causa principalmente de la rotación diaria de la Tierra. No obstante, la Tierra gira tan despacio, que la aceleración normal máxima (I.1.4.6°) de los puntos de su superficie en la

rotación diaria no excede de $0,034 \text{ m/s}^2$. Por esto, en la mayoría de los problemas prácticos, el sistema de referencia del laboratorio se puede considerar inercial aproximadamente.

4°. Los sistemas inerciales de referencia desempeñan un papel particular no sólo en la mecánica, sino también en todas las demás partes de la física. Esto se debe a que, según el principio de la relatividad de Einstein (I.5.1.2°), la expresión matemática de cualquier ley física debe tener la misma forma en todos los sistemas inerciales de referencia. Por esto, en adelante utilizaremos, sin advertirlo cada vez, únicamente sistemas inerciales de referencia. Las leyes del movimiento de un punto material con respecto a un sistema de referencia no inercial se estudian en el capítulo 1.7.

§ 1.2.2. Fuerza

1°. Se llama *fuerza* la magnitud vectorial que sirve de medida de la acción mecánica que sobre el cuerpo considerado ejercen otros cuerpos. La interacción mecánica puede efectuarse tanto entre cuerpos en contacto directo (por ejemplo, en el rozamiento o cuando los cuerpos presionan entre sí), como entre cuerpos separados unos de otros. La forma particular de la materia que liga las partículas de substancia en sistemas únicos y que transmite con velocidad finita la acción de unas partículas sobre otras, se llama *campo físico* o simplemente *campo*. La interacción entre cuerpos separados se realiza por medio de los campos gravitatorios y electromagnéticos creados por ellos (por ejemplo, la atracción de los planetas hacia el Sol, la interacción de los cuerpos cargados eléctricamente, de los conductores con corriente, etc.). La acción mecánica que sobre un cuerpo dado ejercen otros cuerpos se manifiesta de dos formas. Primera, es capaz de provocar la variación del estado de movimiento mecánico del cuerpo considerado y, segunda, su deformación. Estas dos manifestaciones de la acción de la fuerza pueden servir de base para medir las fuerzas. Por ejemplo, la medición de las fuerzas por medio del dinamómetro de resorte se basa en la ley de Hooke (VII.1.3.4°) para la tracción longitudinal.

Aplicando el concepto de fuerza, en la mecánica suele hablarse de movimiento y de deformación del cuerpo por la acción de las fuerzas aplicadas a él. Como es natural, se sobrentiende que a cada fuerza le corresponde siempre algún cuerpo que actúa sobre el considerado con dicha fuerza.

Una fuerza F está totalmente definida si se dan su módulo, su dirección en el espacio y su punto de aplicación. La recta, a lo

largo de la cual está dirigida la fuerza, se llama *directriz* o *línea de acción de la fuerza*.

El campo que actúa sobre un punto material con la fuerza F , se llama *campo estacionario* si no varía con el tiempo t , es decir, si en cualquier punto del campo la fuerza F no depende explícitamente del tiempo: $\partial F/\partial t \equiv 0$. Para que un campo sea estacionario es preciso que los cuerpos que lo crean estén en reposo con respecto al sistema de referencia inercial que se utiliza para estudiar el campo.

2°. La acción simultánea de varias fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n (fig. 1.2.1, a) sobre un punto material M es equivalente a la

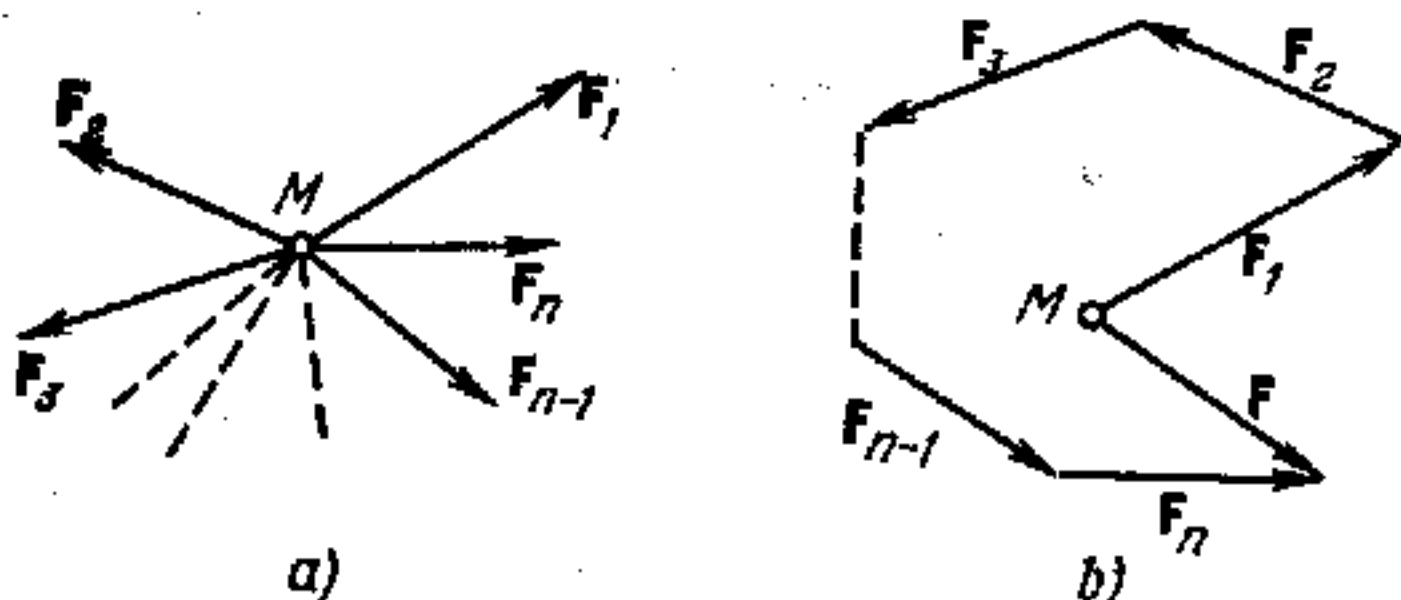


FIG. 1.2.1.

acción de una sola fuerza, llamada *resultante*, igual a la suma geométrica de aquéllas

$$F = \sum_{i=1}^n F_i.$$

La resultante cierra el polígono de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n (fig. 1.2.1. b).

Si el cuerpo es rígido, la acción de la fuerza sobre él no varía si el punto de aplicación de ésta se traslada a lo largo de su línea de acción dentro de los límites del cuerpo. En otras palabras, las fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido se pueden considerar como vectores deslizantes.

3°. Un cuerpo se llama *libre* si sobre su posición y movimiento en el espacio no se imponen ningunas limitaciones. Por ejemplo, un avión en vuelo es un cuerpo libre, lo mismo que un submarino navegando sumergido. En la mayoría de los casos nos encontramos con cuerpos no libres: sobre sus posibles posiciones y movimientos se imponen unas u otras limitaciones

que en mecánica reciben el nombre de *ligaduras*. Por ejemplo, una bolita colgada de un hilo inextensible no puede alejarse del punto de suspensión a una distancia mayor que la longitud del hilo; un tranvía sólo puede moverse a lo largo de los raíles. Las ligaduras se efectúan en virtud de la acción que sobre el cuerpo considerado ejercen otros cuerpos que están sujetos o en contacto con él (por ejemplo, el hilo atado a la bolita, los raíles del tranvía, etc.).

Al estudiar el comportamiento de los cuerpos o sistemas de cuerpos no libres se utiliza en la mecánica el *principio de liberación*: un cuerpo (o sistema de cuerpos) que no sea libre se puede considerar como libre si la acción que sobre él ejercen los cuerpos que efectúan las ligaduras se sustituyen por las fuerzas respectivas. Estas fuerzas se llaman *reacciones de ligadura*, y todas las demás fuerzas que actúan sobre el cuerpo se denominan *fuerzas activas*. Así, el movimiento de la bolita colgada del hilo puede considerarse como el de una bola libre sobre la cual, además de todas las fuerzas activas aplicadas a ella (por ejemplo, la gravedad), actúa la reacción del hilo.

A diferencia de las fuerzas activas, que en cada problema concreto deben darse, las reacciones de ligadura se desconocen de antemano. Tienen que ser determinadas durante la solución del problema. Sus valores deben ser tales, que, bajo la acción común de las fuerzas activas y las reacciones de ligadura, el cuerpo «liberado» realice un movimiento que esté plenamente de acuerdo con las restricciones impuestas por las ligaduras al cuerpo no libre considerado. Entre las reacciones de ligadura y las fuerzas activas no existen otras diferencias.

4°. Los cuerpos que no entran en la composición del sistema mecánico que se considera se llaman *cuerpos externos*. Las fuerzas que sobre el sistema ejercen los cuerpos externos se denominan *fuerzas externas*. Respectivamente, se da el nombre de *fuerzas internas* a las de interacción entre las partes del sistema en cuestión.

Un sistema mecánico se llama *cerrado* o *aislado* si no interacciona con cuerpos externos. Ninguno de los cuerpos de un sistema cerrado sufre la acción de las fuerzas externas.

§ 1.2.3. Masa. Impulso

1°. En la mecánica clásica (newtoniana) se llama *masa de un punto material* la magnitud escalar positiva que sirve de medida a la inercia de dicho punto. Bajo la acción de una fuerza

la velocidad del punto material no varía inmediatamente, sino *poco a poco*, es decir, el punto adquiere una aceleración, *finita* por su magnitud, tanto menor cuanto mayor es la masa del punto material. Para comparar las masas m_1 y m_2 de dos puntos materiales basta medir los módulos a_1 y a_2 de las aceleraciones adquiridas por estos puntos bajo la acción de una misma fuerza: $m_2/m_1 = a_1/a_2$. Por lo general la masa de un cuerpo se determina pesándolo en una balanza de brazos.

En la mecánica clásica (newtoniana) se considera que:

a) la masa de un punto material no depende de su estado de movimiento y es una característica invariable del punto;

b) la masa es una magnitud aditiva, o sea, la masa de un sistema (por ejemplo, de un cuerpo) es igual a la suma de las masas de todos los puntos materiales que entran en la composición de este sistema;

c) la masa de un sistema cerrado (I.2.2.4°) permanece invariable cualesquiera que sean los procesos que tengan lugar en este sistema (*ley de conservación de la masa*).

Estos postulados de la mecánica newtoniana fueron revisados y precisados por la mecánica relativista (I.5.6.1°, I.5.6.2°, I.5.7.3° y I.5.7.6°).

2°. Se da el nombre de densidad ρ de un cuerpo en un punto dado M del mismo, a la razón de la masa dm del elemento pequeño de cuerpo que incluye al punto M , a la magnitud dV del volumen de este elemento:

$$\rho = \frac{dm}{dV}.$$

Las dimensiones del elemento considerado deben ser tan pequeñas, que la variación de la densidad dentro de sus límites se pueda despreciar. Por otra parte, deben ser mucho mayores que las distancias intermoleculares.

Se dice que un cuerpo es *homogéneo* si en todos sus puntos la densidad es la misma. La masa de un cuerpo homogéneo es igual al producto de su densidad por su volumen: $m = \rho V$.

La masa de un cuerpo no homogéneo

$$m = \int_{(V)} \rho dV,$$

donde ρ es función de las coordenadas, y la integral se extiende a todo el volumen del cuerpo. La *densidad media* ($\langle \rho \rangle$) de un cuerpo no homogéneo es la razón de su masa a su volumen: $\langle \rho \rangle = m/V$.

3°. Se llama *centro de inercia* o *centro de masa* de un sistema de puntos materiales un punto C cuyo radio vector r_C es igual a

$$r_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i r_i,$$

donde m_i y r_i son, respectivamente, la masa y el radio vector del i -ésimo punto material; n , el número total de puntos materiales

que hay en el sistema, y $m = \sum_{i=1}^n m_i$ es la masa de todo el sistema.

La velocidad del centro de inercia

$$v_C = \frac{dr_C}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i v_i.$$

4°. La magnitud vectorial p_i , igual al producto de la masa m_i de un punto material por su velocidad v_i , se llama *impulso* o *cantidad de movimiento* de dicho punto material. Se da el nombre de *impulso de un sistema* de puntos materiales a un vector p igual a la suma geométrica de los impulsos de todos los puntos materiales que componen el sistema:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i.$$

El impulso de un sistema es igual al producto de la masa de todo el sistema por la velocidad de su centro de inercia:

$$p = m v_C.$$

§ 1.2.4. Segunda ley de Newton

1°. La ley fundamental de la dinámica del punto material es la segunda ley de Newton, que trata de cómo varía el movimiento mecánico de un punto material bajo la acción de las fuerzas a él aplicadas. *La segunda ley de Newton* dice: la velocidad con que varía el impulso p de un punto material es igual a la fuerza F que actúa sobre él, o sea,

$$\frac{dp}{dt} = F \quad \text{o} \quad \frac{d}{dt} (m v) = F,$$

donde m y v son, respectivamente, la masa y la velocidad del punto material.

Si sobre un punto material actúan simultáneamente varias fuerzas, en la segunda ley de Newton debe entenderse por fuerza F la suma geométrica de todas las fuerzas actuantes, tanto activas como reacciones de ligadura (I.2.2.3°), es decir, la fuerza resultante (I.2.2.2°).

2°. La magnitud vectorial Fdt recibe el nombre de *impulso elemental de la fuerza* F en un pequeño intervalo de tiempo dt de su actuación. El impulso de la fuerza F en un intervalo finito de tiempo desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$ es igual a la integral definida

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt, \text{ donde } F, \text{ en el caso general, depende del tiempo.}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la variación del impulso de un punto material es igual al impulso de la fuerza que actúa sobre él:

$$dp = F dt \quad \text{y} \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt,$$

donde $p_2 = p(t_2)$ y $p_1 = p(t_1)$ son, respectivamente, los impulsos del punto material al final ($t = t_2$) y al principio ($t = t_1$) del intervalo de tiempo considerado.

3°. Como en la mecánica newtoniana la masa m del punto material no depende del estado de movimiento de éste, $dm/dt = 0$. Por lo que la expresión matemática de la segunda ley de Newton puede representarse también en la forma

$$a = \frac{F}{m},$$

donde $a = dv/dt = d^2r/dt^2$ es la aceleración del punto material; r , su radio vector. El enunciado correspondiente de la *segunda ley de Newton dice*: la aceleración de un punto material coincide en dirección con la fuerza que actúa sobre él y es igual a la razón de esta fuerza a la masa del punto material.

Las aceleraciones tangencial y normal de un punto material (I.1.4.4°—I.1.4.6°) se determinan por las respectivas componentes de la fuerza F :

$$a_\tau = \frac{F_\tau}{m}, \quad a_n = \frac{dv}{dt} = \frac{F_n}{m}$$

$$a_n = \frac{F_n}{m}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{F_n}{m},$$

siendo v el módulo del vector velocidad del punto material, y R el radio de curvatura de su trayectoria. La fuerza F_n que imprime al punto material la aceleración normal está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria del punto (I.1.2.4°), por lo que se llama *fuerza centrípeta*.

4°. Si sobre un punto material actúan simultáneamente varias fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n , su aceleración

$$a = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^n F_l = \sum_{l=1}^n a_l,$$

donde $a_l = F_l/m$. Por consiguiente, cada una de las fuerzas que actúan simultáneamente sobre el punto material le comunica la misma aceleración que si las demás fuerzas no existieran (*principio de la independencia de la acción de las fuerzas*).

Se llama *ecuación diferencial del movimiento de un punto material* la ecuación

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = \sum_{l=1}^n \mathbf{F}_l.$$

En proyecciones sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, esta ecuación tiene la forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z$$

donde x, y, z son las coordenadas del punto en movimiento.

§ 1.2.5. Tercera ley de Newton. Movimiento del centro de inercia

1°. La influencia mecánica de unos cuerpos sobre otros tiene carácter de *interacción*. Sobre esto la *tercera ley de Newton* dice: dos puntos materiales actúan entre sí con fuerzas numéricamente iguales y dirigidas en sentidos opuestos a lo largo de la recta que los une.

Si F_{ik} es la fuerza que el punto material k -ésimo ejerce sobre el i -ésimo, y F_{ki} , la fuerza que el punto material i -ésimo ejerce sobre el k -ésimo, según la tercera ley de Newton,

$$F_{ki} = -F_{ik}.$$

Las fuerzas F_{ik} y F_{ki} están aplicadas a distintos puntos materiales y sólo pueden equilibrarse en aquellos casos en que estos puntos pertenezcan a un mismo cuerpo rígido.

2°. La tercera ley de Newton es un complemento importante de las leyes primera y segunda. Permite pasar de la dinámica de los puntos materiales aislados a la dinámica de un sistema mecánico arbitrario (sistema de puntos materiales). De la tercera ley de Newton se deduce que en cualquier sistema mecánico la suma geométrica de todas las fuerzas internas (I.2.2.4°) es igual a cero:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{ik} = 0,$$

siendo n el número de puntos materiales que entran en la composición del sistema, y $F_{ii} = 0$.

El vector F^{ext} , igual a la suma geométrica de todas las fuerzas externas (I.2.2.4°) que actúan sobre el sistema, recibe el nombre de *vector resultante de las fuerzas externas*:

$$F^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n F_i^{\text{ext}},$$

donde F_i^{ext} es la resultante de las fuerzas externas aplicadas al i -ésimo punto material.

3°. De las leyes segunda y tercera de Newton se deduce que la primera derivada, respecto del tiempo t , del impulso p de un sistema mecánico (I.2.3.4°) es igual al vector resultante de todas las fuerzas externas aplicadas al sistema,

$$\frac{dp}{dt} = F^{\text{ext}}.$$

Esta ecuación expresa la *ley de la variación del impulso del sistema*.

Como $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$, siendo m la masa del sistema y \mathbf{v}_C la velocidad de su centro de inercia, la *ley del movimiento del centro de inercia* de un sistema mecánico tiene la forma

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad \text{o} \quad m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}^{\text{ext}},$$

donde $\mathbf{a}_C = d\mathbf{v}_C/dt$ es la aceleración del centro de inercia. De este modo, el centro de inercia de un sistema mecánico se mueve como un punto material cuya masa es igual a la de todo el sistema y sobre el cual actúa una fuerza igual al vector resultante de las fuerzas externas aplicadas a dicho sistema.

Si el sistema considerado es un sólido animado de movimiento de traslación (I.1.5.1°), las velocidades \mathbf{v}_i de todos los puntos del sólido y de su centro de inercia \mathbf{v}_C son iguales entre sí y a la velocidad \mathbf{v} del sólido. La aceleración propia o intrínseca del cuerpo $\mathbf{a} = \mathbf{a}_C$, y la *ecuación fundamental de la dinámica del movimiento de traslación del sólido* tiene la forma

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{ext}},$$

§ 1.2.6. Movimiento de un cuerpo de masa variable

1°. En la mecánica newtoniana la masa del cuerpo puede variar únicamente como resultado de que se separen o se adhieran a él partículas de substancia. Un ejemplo de cuerpo de este tipo es un cohete. Durante el vuelo de éste su masa va disminuyendo poco a poco, ya que los productos gaseosos de la combustión del propulsante en el motor del cohete son expulsados por la tobera.

La *ecuación del movimiento de traslación de un cuerpo de masa variable (ecuación de Mescherski)* es:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ext}} + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt},$$

donde m y \mathbf{v} son, respectivamente, la masa y la velocidad del cuerpo en el instante que se considera; \mathbf{F}^{ext} , el vector resultante de las fuerzas externas (I.2.5.2°) que actúan sobre el cuerpo; \mathbf{v}_1 , la velocidad de las partículas que se separan, *después de la separación*, $\left(\text{si } \frac{dm}{dt} < 0\right)$, o de las que se adhieren,

después de unirse $\left(\text{si } \frac{dm}{dt} > 0\right)$.

2°. El segundo término del segundo miembro de la ecuación de Mescherski es la fuerza adicional que actúa sobre el cuerpo de masa variable. Esta fuerza se llama *fuerza reactiva*:

$$F_r = (v_1 - v) \frac{dm}{dt} = u \frac{dm}{dt},$$

donde $u = v_1 - v$ es la velocidad relativa de las partículas que se separan o que se adhieren, o sea, sus velocidades con respecto al sistema de referencia que se traslada junto con el cuerpo.

La fuerza reactiva caracteriza la acción mecánica que ejercen sobre el cuerpo las partículas que se separan o adhieren a él (por ejemplo, la acción sobre el cohete del chorro de gases que sale de él).

3°. Ecuación del movimiento de un cohete en ausencia de fuerzas externas:

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}.$$

Si la velocidad inicial del cohete era igual a cero, éste se moverá rectilíneamente en dirección inversa a la velocidad relativa u del chorro de gases a la salida de la tobera del motor. En este caso

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt}$$

y cuando $u = \text{const}$ la relación entre la velocidad del cohete y su masa se expresa por la *fórmula de Tsiolkovski*

$$v = u \ln \frac{m_0}{m},$$

siendo m_0 la masa inicial (de despegue) del cohete.

4°. La velocidad máxima que puede desarrollar un cohete en ausencia de fuerzas externas recibe el nombre de *velocidad característica*. Esta velocidad la alcanza en el instante en que termina de funcionar el motor por agotamiento total de las reservas de combustible y oxidante que llevaba a bordo el cohete,

$$v_{\text{máx}} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_p},$$

donde m_p es la masa inicial de combustible y oxidante (propulsante).

La influencia de la atracción de la Tierra y de la resistencia del aire ocasionan una considerable disminución de la velocidad máxima que realmente adquiere el cohete durante el proceso de funcionamiento del motor, en comparación con su velocidad característica.

5°. *La velocidad característica de un cohete compuesto (de varias etapas) es*

$$v_{\text{máx}} = \sum_{i=1}^n u_i \ln \frac{m_{0i}}{m_{0i} - m_{pi}},$$

siendo n el número total de etapas del cohete, m_{pi} la masa de combustible y oxidante destinada al funcionamiento del motor de la i -ésima etapa, u_i la velocidad relativa de salida de los gases por la tobera del motor de la i -ésima etapa, m_{0i} la masa de despegue de la parte del cohete compuesto formada por todas las etapas del mismo desde la i -ésima hasta la n -ésima. El aumento de la velocidad característica del cohete compuesto, en comparación con el de una etapa de igual masa de despegue y las mismas reservas de combustible y oxidante, se debe a la disminución adicional de la masa del cohete por la sucesiva separación de él de las etapas primera, segunda y siguientes una vez consumido todo el combustible existente en cada una.

§ 1.2.7. Ley de conservación del impulso

1°. *Ley de conservación del impulso:* el impulso p de un sistema cerrado no varía con el tiempo, es decir,

$$\frac{dp}{dt} \equiv 0 \quad \text{y} \quad p = \text{const.}$$

A diferencia de las leyes de Newton, la ley de conservación del impulso es válida no sólo dentro del marco de la mecánica clásica. Esta ley es una de las más fundamentales de la física, ya que está relacionada con una propiedad determinada de la simetría del espacio, su homogeneidad. La *homogeneidad del espacio se manifiesta* en que las propiedades físicas de un sistema cerrado y las leyes de su movimiento no dependen de la elección que se haga de la posición del origen de coordenadas del sistema iner-

cial de referencia, es decir, no varían cuando el sistema cerrado en conjunto se traslada paralelamente en el espacio. De acuerdo con las ideas modernas, pueden tener impulso no sólo las partículas y los cuerpos, sino también los campos. Por ejemplo, la luz ejerce presión sobre la superficie del cuerpo que la refleja o absorbe precisamente porque el campo electromagnético de la onda luminosa tiene impulso.

2°. Con arreglo a los sistemas que describe la mecánica clásica (newtoniana), la ley de conservación del impulso se puede considerar como una consecuencia de las leyes de Newton. Para un sistema mecánico cerrado el vector resultante de las fuerzas externas $F^{\text{ext}} \equiv 0$, y de (1.2.5.3°) se sigue la ley de conservación del impulso

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{const.},$$

siendo m_i y \mathbf{v}_i , la masa y la velocidad del i -ésimo punto material del sistema compuesto por n puntos.

Respectivamente tampoco varían las proyecciones del impulso del sistema cerrado sobre los ejes de coordenadas cartesianas del sistema inercial de referencia:

$$p_x = \sum_{i=1}^n m_i v_{ix} = \text{const.},$$

$$p_y = \sum_{i=1}^n m_i v_{iy} = \text{const.},$$

$$p_z = \sum_{i=1}^n m_i v_{iz} = \text{const.}$$

El impulso de un sistema $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$, donde m es la masa de todo el sistema y \mathbf{v}_C , la velocidad de su centro de inercia (1.2.3.4°). Por esto, de la ley de conservación del impulso se deduce que cualesquiera que sean los procesos que tengan lugar en un sistema cerrado, la velocidad de su centro de inercia no varía: $\mathbf{v}_C = \text{const.}$

3°. Si el sistema no es cerrado, pero la acción que sobre él ejercen las fuerzas externas es tal, que su vector resultante es idénticamente igual a cero ($F^{\text{ext}} \equiv 0$), de acuerdo con las leyes de Newton (1.2.5.3°) el impulso del sistema no varía con el tiempo: $\mathbf{p} = \text{const.}$

Por lo general $F^{\text{ext}} \neq 0$ y $p \neq \text{const.}$ Pero si la proyección del vector resultante de las fuerzas externas sobre cualquier eje fijo es idénticamente igual a cero, la proyección sobre este mismo eje del vector impulso del sistema no varía con el tiempo. Así, pues, $p_x = \text{const.}$ a condición de que $F^{\text{ext}} \equiv 0$. Por ejemplo, si sobre el sistema no actúa más fuerza externa que la gravedad, la componente horizontal del impulso del sistema, perpendicular a la dirección de esta fuerza, no varía.

4°. En algunos procesos (por ejemplo, de choque o disparo) los impulsos de las partes del sistema sufren grandes variaciones durante intervalos de tiempo relativamente cortos. Esto se debe a que en el sistema surgen fuerzas internas de interacción entre las partes del mismo, de poca duración pero de magnitud muy considerable, en comparación con las cuales todas las fuerzas externas que actúan permanentemente sobre el sistema (por ejemplo, la gravedad) resultan pequeñas. En los procesos de este tipo se puede despreciar, por lo general, la acción que ejercen sobre el sistema las fuerzas externas, o sea, se puede considerar aproximadamente que el impulso de todo el sistema en conjunto no varía durante el proceso examinado.

§ 1.2.8. Transformaciones de Galileo. Principio mecánico de la relatividad

1°. Se llaman *transformaciones de Galileo* las transformaciones de coordenadas y del tiempo que se utilizan en la mecánica newtoniana al pasar de un sistema inercial de referencia $K(x, y, z, t)$ a otro $K'(x', y', z', t')$ animado con respecto a K de movimiento de traslación y velocidad constante V . Las transformaciones de Galileo se basan en los axiomas sobre el carácter absoluto de los intervalos de tiempo y de las longitudes. El primer axioma afirma que la marcha del tiempo (y, respectivamente, el intervalo de tiempo entre dos sucesos cualesquiera) es igual en todos los sistemas inerciales de referencia. De acuerdo con el segundo axioma las dimensiones de los cuerpos no dependen de la velocidad con que se mueven respecto al sistema de referencia.

Si los ejes homólogos de las coordenadas cartesianas de los sistemas de referencia inerciales K y K' están trazados paralelamente entre sí de dos en dos y si en el instante inicial ($t = t' = 0$), los orígenes de coordenadas O y O' coinciden

(fig. I.2.2.), las transformaciones de Galileo tienen la forma

$$x' = x - V_x t, \quad y' = y - V_y t, \quad z' = z - V_z t \quad \text{y} \quad t' = t,$$

o bien

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \quad \text{y} \quad t' = t,$$

donde x, y, z y x', y', z' son las coordenadas del punto M en los sistemas de referencia K (en el instante t) y K' (en el instante $t' = t$); \mathbf{r} y \mathbf{r}' son los radios vectores del punto M en los

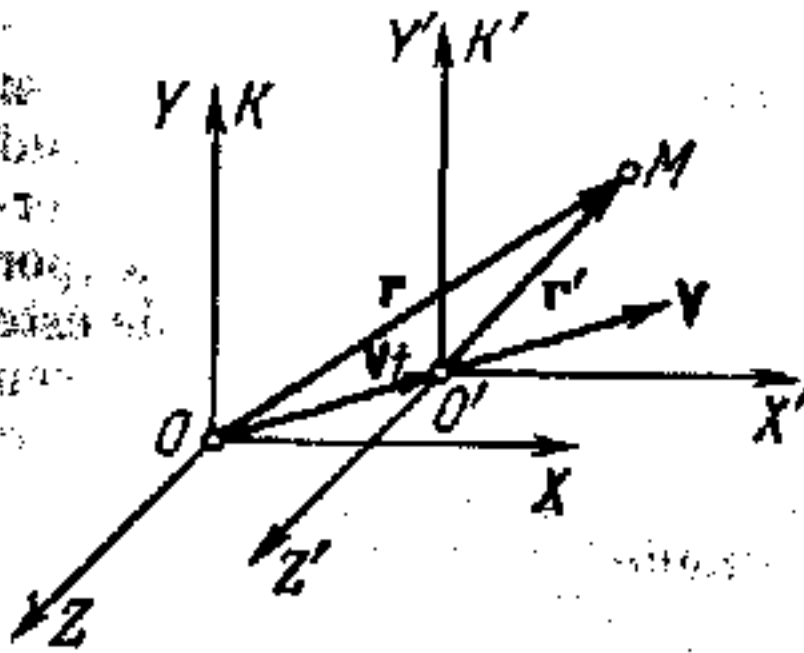


FIG. I.2.2.

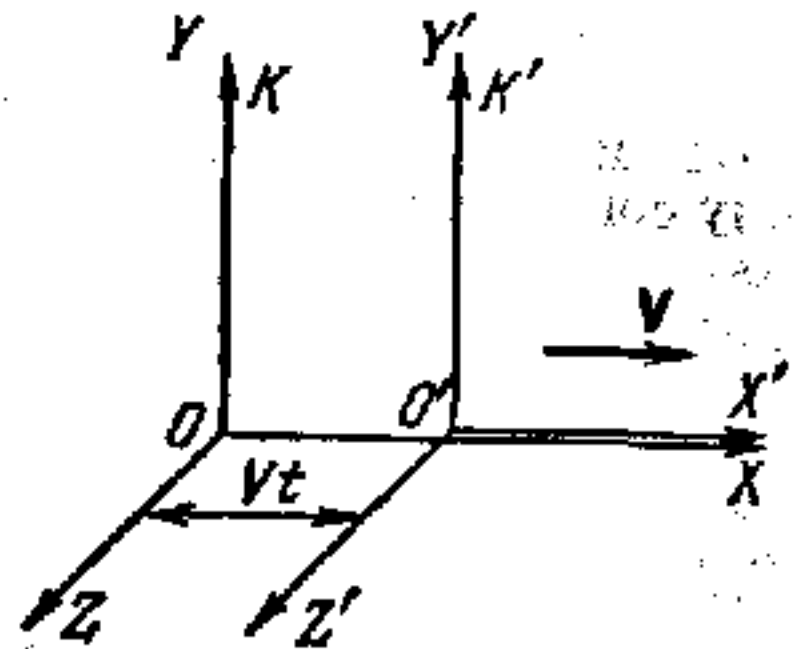


FIG. I.2.3.

mismos sistemas de referencia, y V_x, V_y, V_z son las proyecciones de la velocidad \mathbf{V} del sistema K' sobre los ejes de coordenadas del sistema K .

De ordinario los ejes de coordenadas se trazan de manera que el sistema K' se mueva a lo largo del sentido positivo del eje OX (fig. I.2.3). En este caso las transformaciones de Galileo tienen una forma más simple:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{y} \quad t = t'.$$

2°. De las transformaciones de Galileo se deduce la siguiente ley de transformación de la velocidad de un punto arbitrario M (fig. I.2.2) al pasar de un sistema inercial de referencia K (velocidad del punto $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$) a otro K' (velocidad del mismo punto $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$):

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Respectivamente se transforman también las proyecciones de la velocidad sobre los ejes de coordenadas:

$$v'_x = v_x - V_x, \quad v'_y = v_y - V_y, \quad v'_z = v_z - V_z.$$

En particular, cuando el sistema K' se mueve a lo largo del sentido positivo del eje OX (fig. 1.2.3)

$$v'_{x'} = v_x - V, \quad v'_{y'} = v_y, \quad v'_{z'} = v_z.$$

Las aceleraciones del punto M en los sistemas de referencia K ($\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$) y K' ($\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt$) son iguales: $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

Así, pues, la aceleración de un punto material es independiente del sistema inercial de referencia que se elija, es decir, es invariante respecto de las transformaciones de Galileo.

3°. Las fuerzas de interacción de los puntos materiales dependen únicamente de sus posiciones mutuas y de la velocidad del movimiento relativo entre ellos. La posición mutua de dos puntos cualesquiera 2 y 1 se caracteriza por un vector igual a la diferencia de los radios vectores de estos puntos, o sea, en el sistema K el vector $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, y en el sistema K' , el vector $\mathbf{r}'_{21} = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$. De las transformaciones de Galileo se sigue que $\mathbf{r}'_{21} = \mathbf{r}_{21}$. Por esto las distancias entre los puntos 1 y 2 en los sistemas K y K' son iguales:

$$\begin{aligned} r'_{21} = r_{21} \quad \text{ó} \quad (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = \\ = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

La velocidad del movimiento del punto 2 con relación al punto 1 es igual a la diferencia entre las velocidades de estos puntos: $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ (en el sistema K) y $\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1$ (en el sistema K'). De las transformaciones de Galileo se deduce que $\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$.

Por lo tanto, la posición mutua y la velocidad del movimiento relativo de dos puntos materiales cualesquiera no depende del sistema inercial de referencia que se elija, es decir, son invariantes respecto de las transformaciones de Galileo. Respectivamente, son también invariantes respecto de dichas transformaciones las fuerzas que actúan sobre el punto material: $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

4°. Las ecuaciones que expresan las leyes de Newton (1.2.4.3°) y (1.2.5.1°) son invariantes respecto de las transformaciones de Galileo, o sea, no cambian de forma al transformar las coordenadas y el tiempo de un sistema inercial de referencia (K) a otro (K'):

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik} \quad (\text{en el sistema } K), \\ m'\mathbf{a}' = \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \mathbf{F}'_{ki} = -\mathbf{F}'_{ik} \quad (\text{en el sistema } K'). \end{aligned}$$

siendo $m' = m$ la masa del punto material considerado, igual en todos los sistemas de referencia.

De esta forma, en la mecánica clásica es válido el *principio mecánico de la relatividad* (o *principio de la relatividad de Galileo*): las leyes de la mecánica son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia. Esto quiere decir, que en distintos sistemas inerciales de referencia todos los procesos mecánicos, si las condiciones son las mismas, se desarrollan igualmente. Por lo tanto, por medio de experimentos mecánicos cualesquiera, efectuados en un sistema cerrado de cuerpos, es imposible establecer si dicho sistema está en reposo o si se mueve uniforme y rectilíneamente (con relación a cualquier sistema inercial de referencia).

El principio mecánico de la relatividad pone de manifiesto que en la mecánica todos los sistemas inerciales de referencia son totalmente equivalentes. Entre ellos es imposible destacar uno especial, o sistema inercial de referencia («principal», con respecto al cual el movimiento de los cuerpos pudiera considerarse como su «movimiento absoluto».

5°. La generalización del principio de la relatividad a todos los fenómenos físicos fue realizada por Albert Einstein en la teoría especial de la relatividad (I.5.1.2°). Al hacerlo, se puso de manifiesto que las coordenadas y el tiempo en distintos sistemas inerciales de referencia se relacionan mediante las transformaciones de Lorentz (I.5.3.2°), y no de Galileo. Pero cuando las velocidades del movimiento relativo de los sistemas de referencia son pequeñas (en comparación con la velocidad de la luz en el vacío), las transformaciones de Lorentz se convierten en transformaciones de Galileo.

Capítulo I.3.

Trabajo y energía mecánica

§ I.3.1. Energía, trabajo y potencia

1°. *La energía* es una magnitud física escalar que sirve de medida general a las distintas formas de movimiento de la materia que se estudian en la física. La energía de un sistema caracteriza cuantitativamente a éste con respecto a las posibles transformaciones del movimiento que pueden ocurrir en él. Estas transformaciones se producen en virtud de la interacción de las partes del sistema, tanto entre sí como con los cuerpos externos (medio exterior). Para analizar las formas cualitativamente

distintas del movimiento y las interacciones que les corresponden, en física se introducen diversas formas de la energía: mecánica (I.3.4.1°), interna o intrínseca (II.2.1.2°), electromagnética (IV.4.2.1°), nuclear (VIII.1.2.2°), etc.

2°. La variación del movimiento mecánico de un cuerpo es provocada por la acción de las fuerzas que sobre él ejercen otros cuerpos. Para describir cuantitativamente este proceso de intercambio de energía entre los cuerpos que interaccionan se utiliza en mecánica el concepto de trabajo de la fuerza aplicada al cuerpo que se considera. Se llama *trabajo elemental de una fuerza F* en un desplazamiento pequeño dr , la magnitud escalar

$$\delta A = F dr = Fv dt.$$

donde r y $v = dr/dt$ son, respectivamente, el radio vector y la velocidad del punto de aplicación de la fuerza, y dt es el pequeño intervalo de tiempo durante el cual la fuerza F realiza el trabajo δA (sobre el sentido de la designación δA véase I.3.1.8°)

En coordenadas cartesianas rectangulares

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) dt,$$

siendo x, y, z las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza, y F_x, F_y, F_z y v_x, v_y, v_z , las proyecciones, sobre los ejes de coordenadas, de los vectores F y v .

3°. La expresión para el trabajo elemental también se puede representar de la forma

$$\delta A = F ds \cos \alpha = F_\tau ds,$$

en la que $ds = |dr|$ es la longitud elemental del espacio recorrido por el punto de aplicación de la fuerza durante el pequeño intervalo de tiempo dt ; α , el ángulo entre los vectores F y dr , y $F_\tau = F \cos \alpha$, la proyección de la fuerza sobre la dirección del desplazamiento dr . Una fuerza normal a la trayectoria de su punto de aplicación no realiza trabajo.

La fuerza F se llama *fuerza motriz* si $F_\tau > 0$, de manera que $\delta A > 0$. En cambio, si $F_\tau < 0$ ($\delta A < 0$), la fuerza F recibe el nombre de *fuerza de frenado* o *de resistencia*.

4°. Si sobre un sistema mecánico actúan al mismo tiempo las fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n , el trabajo δA realizado por ellas durante un pequeño intervalo de tiempo dt será igual a la suma algebraica de los trabajos realizados durante el mismo tiempo dt por cada una de las fuerzas separadamente,

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n F_i dr_i = \sum_{i=1}^n F_i v_i dt,$$

siendo r_i y v_i , respectivamente, el radio vector y la velocidad del punto de aplicación de la fuerza F_i .

Por ejemplo, para un punto material $r_i = r$ es el radio vector de este punto y $v_i = v$ es su velocidad. Respectivamente,

$$\delta A = F dr = Fv dt, \text{ donde } F = \sum_{i=1}^n F_i \text{ es la fuerza resultante}$$

(I.2.2.2°). De la segunda ley de Newton (I.2.4.1°) se deduce que para un punto material

$$\delta A = v dp,$$

siendo $p = mv$ el impulso del punto, y m su masa.

En el caso del movimiento de traslación de un cuerpo rígido $dr_i = dr_C$ y $v_i = v_C$, donde r_C y v_C son, respectivamente, el radio vector y la velocidad del centro de inercia del cuerpo (I.2.3.3°).

El trabajo de las fuerzas intrínsecas en cualquier movimiento de un cuerpo rígido es igual a cero. Por esto, cuando el movimiento de dicho cuerpo es de traslación, $\delta A = F^{ext} dr_C = F^{ext} v_C dt$, donde F^{ext} es el vector resultante de las fuerzas externas (I.2.5.2°). De la ley del movimiento del centro de inercia (I.2.5.3°) se deduce que

$$\delta A = v_C dp,$$

siendo $p = mv_C$ el impulso de un sólido de masa m que se mueve con la velocidad de traslación $v = v_C$.

5°. El trabajo A realizado por una fuerza F en un trozo finito de la trayectoria L de su punto de aplicación, es igual a la suma algebraica de los trabajos realizados en todas las partes pequeñas de este trozo, es decir, se expresa por la integral curvilínea

$$A = \int_{(L)} F dr = \int_0^s F_\tau ds,$$

en la que s es el espacio recorrido a lo largo de la trayectoria desde el comienzo del trozo considerado, y F_τ , la proyección sobre la dirección del desplazamiento dr de su punto de aplicación. Para calcular esta integral hay que conocer la dependencia de F_τ respecto de s a lo largo de la trayectoria L . Si esta dependencia está representada gráficamente (fig. 1.3.1), el trabajo buscado A se mide por el área rayada en la fig. 1.3.1.

6°. Se llaman *fuerzas potenciales* aquellas cuyo trabajo sólo

depende de las posiciones iniciales y finales de sus puntos de aplicación, y no de la forma de las trayectorias de estos puntos ni de las leyes de su movimiento por éstas.

Por ejemplo, las fuerzas de interacción de las partes de un sistema (puntos materiales) son potenciales si sólo dependen de la configuración del sistema, es decir, de la posición mutua

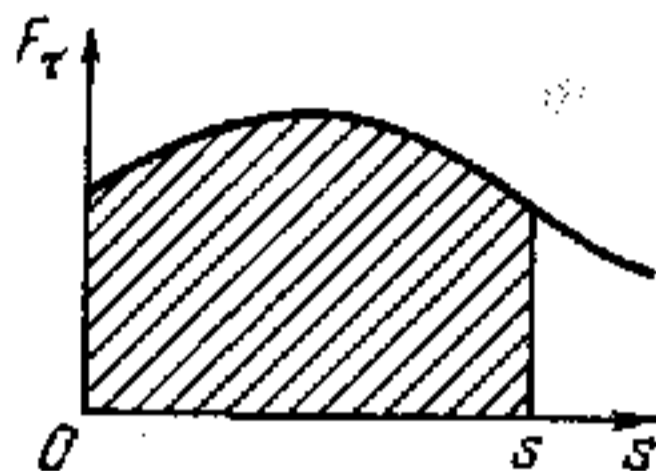


FIG. 1.3.1.

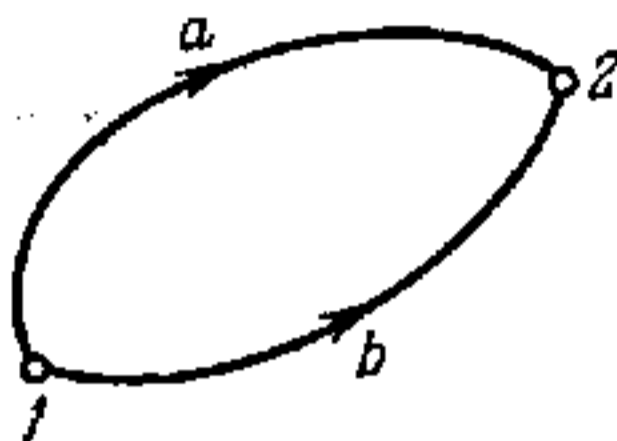


FIG. 1.3.2.

de todos los puntos del sistema y al mismo tiempo, el trabajo de estas fuerzas al desplazarse el sistema desde una posición arbitraria a otra, no depende del procedimiento de traslación, sino que se define totalmente por las configuraciones inicial y final del sistema. De ejemplos de este tipo de fuerzas pueden servir las fuerzas de interacción electrostáticas y gravitatorias.

Un campo estacionario (1.2.2.1°) se dice que es *potencial* si la fuerza F con que actúa sobre un punto material situado en él es potencial. Esto quiere decir que la fuerza F sólo depende de la posición del punto material en el campo y que el trabajo que realiza dicha fuerza F al trasladar el punto de una posición arbitraria 1 a otra 2 (fig. 1.3.2) a lo largo de cualesquiera dos trayectorias, por ejemplo, 1a2 (trabajo A_{1a2}) y 1b2 (trabajo A_{1b2}) es el mismo:

$$A_{1a2} = A_{1b2} = \int_1^2 F dr.$$

Respectivamente, el trabajo de la fuerza potencial al trasladar su punto de aplicación a lo largo de cualquier trayectoria L cerrada (por ejemplo, 1a2b1) es nulo:

$$\oint_{(L)} F dr \equiv 0.$$

En el caso general, los cuerpos externos que crean el campo considerado pueden moverse con relación al sistema inercial de referencia, de manera que su campo no es estacionario, es decir, la fuerza F depende explícitamente del tiempo: $\partial F/\partial t \neq 0$. Un campo *no estacionario* es *potencial*, si el trabajo que realiza la fuerza F al trasladar *instantáneamente* su punto de aplicación a lo largo de cualquier trayectoria cerrada L es nulo:

$$\oint_{(L)} F dr \equiv 0.$$

Aquí F no sólo depende de las coordenadas del punto, sino también del tiempo, pero, al calcular esta integral, el tiempo debe considerarse como parámetro fijo.

7°. A las fuerzas no potenciales pertenecen las disipativas y las giroscópicas. Se llaman *fuerzas disipativas* aquellas cuyo trabajo total, cualesquiera que sean los desplazamientos del sistema cerrado, es siempre negativo. Así son, por ejemplo, las fuerzas de rozamiento por deslizamiento y las de resistencia al movimiento de los cuerpos en los líquidos y los gases. Las fuerzas disipativas, a diferencia de las potenciales, dependen no sólo de la posición mutua de los cuerpos que interactúan, sino también de sus velocidades relativas.

Se dice que son *fuerzas giroscópicas* las que dependen de la velocidad del punto material sobre el cual actúan y están dirigidas perpendicularmente a esta velocidad. Un ejemplo de fuerza giroscópica es la fuerza de Lorentz (III.11.1.1°), que ejerce el campo magnético sobre una partícula con carga que se mueve en él. El trabajo de las fuerzas giroscópicas es siempre nulo, independientemente de cómo se desplace el punto material.

Un sistema mecánico (sistema de puntos materiales) se llama *conservativo*, si todas las fuerzas no potenciales que actúan sobre él no realizan trabajo, y todas las fuerzas potenciales externas son estacionarias. Los sistemas que no satisfacen las condiciones indicadas se dice que son *no conservativos*.

8°. El trabajo elemental de la fuerza F que ejerce sobre un punto material un campo potencial estacionario se puede representar en forma de diferencial total de la función escalar de las coordenadas $\Phi(x, y, z)$ llamada *función de la fuerza de*

este campo:

$$F dr = d\Phi, \quad \text{o} \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz.$$

Por consiguiente,

$$F_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad \text{y} \quad F = \text{grad } \Phi.$$

Las últimas relaciones son válidas también para un campo potencial no estacionario, cuya función de la fuerza no sólo dependa de las coordenadas, sino también del tiempo: $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$. Pero en este caso

$$F dr = d\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial t} dt.$$

El trabajo elemental de la fuerza no potencial no se puede representar en forma de diferencial total de una función cualquiera de las coordenadas. Precisamente por esto el trabajo elemental de una fuerza arbitraria se ha representado por δA .

9°. Para caracterizar el trabajo realizado en la unidad de tiempo se utiliza en la mecánica el concepto de potencia. La potencia (*potencia instantánea*) es una magnitud física escalar N igual a la razón del trabajo elemental δA al pequeño intervalo de tiempo dt , durante el cual se realiza este trabajo,

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

Si F es la fuerza que efectúa el trabajo δA , la potencia es igual al producto escalar de la fuerza F por la velocidad v de su punto de aplicación:

$$N = Fv = F_{\tau}v.$$

En el caso general la potencia puede variar con el tiempo. Se llama *potencia media* en un intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$, la magnitud física $\langle N \rangle$ igual a la razón del trabajo A realizado en este intervalo de tiempo, a su duración Δt :

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}.$$

§ 1.3.2. Energía cinética

1°. Se da el nombre de *energía cinética* de un cuerpo a la energía de su movimiento mecánico. La variación de la energía cinética W_c de un punto material por la acción de una fuerza F , es igual al trabajo realizado por esta fuerza,

$$dW_c = \delta A = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p},$$

siendo $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ el impulso del punto material, y m y \mathbf{v} , respectivamente, su masa y velocidad. En la mecánica newtoniana $m = \text{const}$ y la expresión para la energía cinética del punto material tiene la forma

$$W_c = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

De la energía cinética en la mecánica relativista se trata en 1.5.7.1°.

2°. La energía cinética de un sistema mecánico es igual a la suma de las energías cinéticas de todas las partes del sistema. Por ejemplo, para un sistema compuesto de n puntos materiales,

$$W_c = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2},$$

donde m_i y v_i son, respectivamente, la masa y la velocidad del i -ésimo punto del sistema.

La energía cinética de un cuerpo

$$W_c = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho v^2 dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho v^2 dV,$$

en que \mathbf{v} es la velocidad de los puntos de un pequeño elemento de volumen dV del cuerpo, cuya densidad es ρ y su masa $dm = \rho dV$. La integración se extiende a todo el volumen V del cuerpo. Si éste es rígido, tiene la masa m y está animado de movimiento de traslación con la velocidad \mathbf{v} , su energía cinética $W_c = mv^2/2$. La energía cinética del cuerpo en rotación se estudia en 1.4.3.3° y 1.3.3.5°.

3°. La variación de la energía cinética de un sistema mecánico es igual a la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas externas e internas que actúan sobre dicho sistema

(1.2.2.4°),

$$dW_c = \delta A^{\text{ext}} + \delta A^{\text{int}}.$$

Por ejemplo, para un sistema compuesto por n puntos materiales

$$dW_c = \sum_{i=1}^n F_i^{\text{ext}} dr_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n F_{ik} dr_i,$$

donde r_i es el radio vector del i -ésimo punto; F_i^{ext} , la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre este punto, y $F_{ii} = 0$.

Si el sistema es indeformable, el trabajo de las fuerzas internas

$$\delta A^{\text{int}} = 0 \quad \text{y} \quad dW_c = \delta A^{\text{ext}}.$$

Por ejemplo, la variación de la energía cinética de un cuerpo rígido animado de movimiento de traslación

$$dW_c = F^{\text{ext}} dr,$$

siendo F^{ext} el vector resultante de las fuerzas externas (1.2.5.2°), y dr , el vector desplazamiento elemental del cuerpo.

4°. La energía cinética de un sistema mecánico depende del sistema de referencia que se elija. Si en el sistema inercial de referencia K la energía cinética del sistema es W_c , y en el sistema de referencia K' , animado de movimiento de traslación con la velocidad V respecto de K , es igual a W'_c , entonces

$$W_c = W'_c + \frac{mV^2}{2} + p'V,$$

donde m es la masa del sistema; $p' = mv'_c$, el impulso del sistema en su movimiento con respecto al sistema de referencia K' ; v'_c , la velocidad del centro de inercia del sistema con respecto a K' . Esta relación es válida tanto para $V = \text{const}$, es decir, cuando K' es un sistema inercial de referencia, como para $dV/dt \neq 0$.

En particular, si el sistema de referencia K' , se desplaza con respecto a K con movimiento de traslación de velocidad v_c del centro de inercia del sistema, o sea, si $V = v_c$, entonces $v'_c = 0$ y

$$W_c = \frac{mV_c^2}{2} + W'_c.$$

Esta igualdad expresa el *teorema de Koenigs*: la energía cinética de un sistema mecánico es igual a la suma de la energía cinética que tendría un punto material de masa igual a la de todo el sistema y que se moviera con la velocidad de su centro de inercia, y de la energía cinética del mismo sistema en su movimiento con respecto al sistema de referencia móvil con origen en el centro de inercia.

Del teorema de Koenigs se deduce que la energía cinética de un cuerpo rígido es igual a la suma de la energía cinética del movimiento de traslación de este cuerpo con la velocidad de su centro de inercia, y de la energía cinética de la rotación del cuerpo alrededor del centro de inercia.

§ 1.3.3. Energía potencial

1°. Se llama *energía potencial* la parte de la energía de un sistema mecánico que sólo depende de su *configuración*, es decir de la posición mutua de todas las partículas (puntos materiales del sistema y de sus posiciones en el campo de potencial externo (I.3.1.6°). La disminución de la energía potencial al trasladarse el sistema desde una posición arbitraria 1 a otra posición arbitraria 2 se mide por el trabajo A_{12} que realizan al ocurrir esto todas las fuerzas potenciales (internas y externas) que actúan sobre el sistema,

$$W_p(1) - W_p(2) = A_{12},$$

aquí $W_p(1)$ y $W_p(2)$ son los valores de la energía potencial del sistema en las posiciones inicial y final. Respectivamente, el trabajo de las fuerzas potenciales durante una pequeña variación de la configuración del sistema $\delta A = dW_p$.

Observación. Se supone que las fuerzas potenciales externas son *estacionarias*, o sea, pueden variar con el tiempo solamente como consecuencia del cambio de posición del sistema considerado con respecto al sistema de referencia. En el caso contrario

$$dW_p = -\delta A + \frac{\partial W_p}{\partial t} dt.$$

En el caso más simple, en que el sistema es un punto material situado en un campo de potencial, la relación entre la fuerza F que actúa sobre el punto y la energía potencial W_p de este

punto en el campo tiene la forma

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y},$$

$$F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = -\text{grad } W_p.$$

La energía potencial del punto material W_p está ligada con la función de la fuerza (1.3.1.9°) del campo de potencial correspondiente por la relación:

$$dW_p = -d\Phi \quad \text{o} \quad W_p(x, y, z, t) = -\Phi(x, y, z, t) + C,$$

siendo C la constante de integración.

2°. Las relaciones del p. 1° permiten hallar la dependencia de la energía potencial del sistema respecto de su configuración solamente con la exactitud de hasta un sumando constante arbitrario que no influye en la *variación* de la energía. Para obtener la dependencia unívoca de la energía potencial del sistema respecto de su configuración, en cada caso concreto se elige la llamada *configuración de referencia o nula*, en la cual la energía potencial del sistema se considera convencionalmente igual a cero. De este modo la energía potencial del sistema en un estado arbitrario es igual al trabajo que realizan todas las fuerzas potenciales que actúan sobre él al pasar del estado que se considera al estado correspondiente a la configuración de referencia.

3°. **Ejemplo 1.** *Energía potencial de un punto material en un campo de fuerzas homogéneo.* Supongamos que \mathbf{F} es la fuerza que ejerce el campo sobre el punto y que está dirigida a lo largo del eje OZ , es decir, $\mathbf{F} = F_z \mathbf{k}$, donde \mathbf{k} es el versor del eje OZ , y la proyección F_z de la fuerza \mathbf{F} sobre el eje OZ no depende de las coordenadas del punto. Entonces

$$dW_p = -\mathbf{F} d\mathbf{r} = -F_z dz \quad \text{y} \quad W_p(z) = -F_z z + W_p(0),$$

donde $W_p(0)$ es el valor de la energía potencial del punto material al nivel de $z = 0$.

En particular, la energía potencial de un punto material de masa m que se encuentra en el campo homogéneo de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra (si el eje OZ está dirigido verticalmente hacia arriba y $F_z = -mg$, siendo g la aceleración de caída libre) es igual a

$$W_p(z) = mgz + W_p(0).$$

4°. **Ejemplo 2.** *Energía potencial de un punto material en un campo de fuerzas centrales.* En un campo de potencial de fuerzas centrales sobre el punto material actúan unas fuerzas F que en todas partes están dirigidas a lo largo de rectas que pasan por un mismo punto fijo, llamado *centro de fuerzas*, y que sólo dependen de la distancia r hasta dicho centro:

$$\mathbf{F} = F_r(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Aquí r es el radio vector trazado desde el centro de fuerzas hasta el punto considerado del campo, y $F_r(r)$ es la proyección de la fuerza F sobre la dirección del vector r , que sólo depende de la distancia r . Si el punto material es atraído hacia el centro de fuerzas, $F_r(r) = -|F| < 0$, si por el contrario, el punto es repelido por dicho centro, $F_r(r) = |F| > 0$. El trabajo elemental de la fuerza F

$$\delta A = F dr = F_r(r) dr.$$

La energía potencial del punto material

$$W_p(r) = \int_r^{\infty} F_r(r) dr + W_p(\infty).$$

Por lo general, como punto de referencia de la energía potencial se toma la energía de un punto material que se halla a una distancia infinita del centro de fuerzas, es decir, se supone que $W_p(\infty) = 0$:

$$W_p(r) = \int_r^{\infty} F_r(r) dr.$$

De ejemplos de campo de fuerzas central, en el cual la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia hasta el centro de fuerzas ($F_r(r) \sim r^{-2}$), pueden servir los campos gravitatorios de un punto material y de una bola homogénea, el campo electrostático de una carga puntual, así como los de una esfera y una bola en las que, respectivamente, la carga esté repartida con uniformidad por la superficie y por el volumen.

5°. **Ejemplo 3.** *Energía potencial de un sistema de dos puntos materiales* entre los cuales actúan fuerzas centrales, es decir fuerzas que dependen de la distancia entre los puntos y están

dirigidas a lo largo de la recta que los une entre sí. En la fig. 1.3.3 se muestran las fuerzas de repulsión mutua F_{12} y $F_{21} = -F_{12}$:

$$F_{21} = F_{\rho}(\rho) \frac{\rho}{\rho},$$

donde $\rho = r_2 - r_1$ es el radio vector trazado desde el punto 1 hasta el punto 2, y $F_{\rho}(\rho)$, la proyección de la fuerza F_{21} sobre

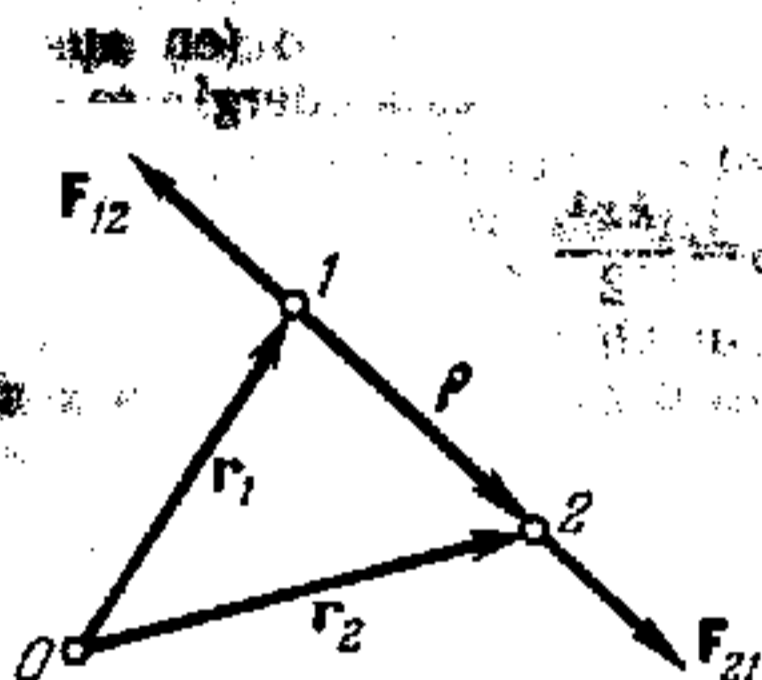


FIG. 1.3.3.

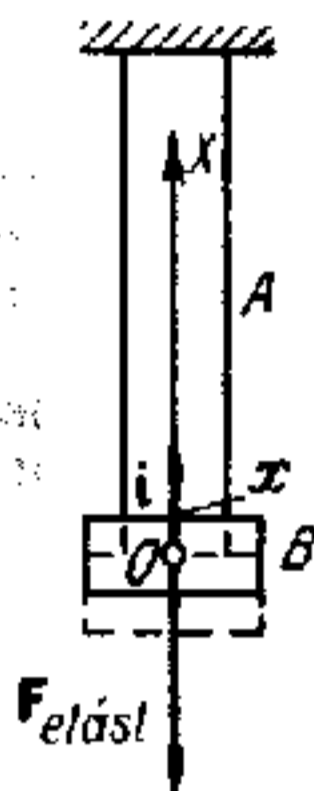


FIG. 1.2.4.

la dirección del vector ρ , que sólo depende de la distancia ρ entre los puntos. Una pequeña variación de la energía potencial del sistema

$$dW_p = - (F_{12} dr_1 + F_{21} dr_2) = - F_{21} d\rho = - F_{\rho}(\rho) d\rho.$$

Si admitimos que $W_p \rightarrow 0$ cuando $\rho \rightarrow \infty$, entonces

$$W_p(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} F_{\rho}(\rho) d\rho.$$

Esta energía suele llamarse *energía potencial mutua de dos puntos materiales*.

6°. Ejemplo 4. *Energía potencial de un cuerpo elástico* (por ejemplo, de un muelle) *al estirarse o comprimirse longitudinalmente*. Cuando un cuerpo elástico se deforma surgen en él fuerzas potenciales internas (fuerzas de elasticidad) que dificultan su deformación. Según la ley de Hooke la fuerza elástica $F_{\text{elást}}$ con que el cuerpo que se deforma A (fig. 1.3.4) actúa so-

bre el cuerpo B que provoca la deformación, es proporcional a la magnitud de la deformación:

$$F_{\text{elást}} = -kx.$$

Aquí x es el vector traslación del cuerpo B , que caracteriza la deformación del cuerpo A (en estado no deformado $x = 0$ durante la compresión $x > 0$ y durante la extensión $x < 0$); $k > 0$ es el coeficiente que caracteriza las propiedades elásticas del cuerpo A .

La energía potencial del cuerpo deformado (en ausencia de la deformación, o sea, cuando $x = 0$, esta energía se considera nula)

$$W_p = \frac{kx^2}{2}.$$

§ 1.3.4. Ley de conservación de la energía mecánica

1° Se llama *energía mecánica* o *energía mecánica total*, la energía del movimiento mecánico y de la interacción. La energía mecánica W de un sistema de puntos materiales es igual a la suma de su energía cinética W_c y de la energía potencial W_p de la interacción de estos puntos entre sí y con los cuerpos externos:

$$W = W_c + W_p.$$

El incremento elemental de la energía mecánica del sistema durante un pequeño intervalo de tiempo dt

$$dW = \delta A_{n.p} + \frac{\partial W_p}{\partial t} dt,$$

donde $\delta A_{n.p}$ es la suma algebraica de los trabajos elementales realizados durante el tiempo dt por todas las fuerzas no potenciales, externas e internas, que actúan sobre el sistema. El $\frac{\partial W_p}{\partial t} dt$ es la variación que durante el tiempo dt experimenta la energía potencial del sistema y, respectivamente, su energía mecánica total, debida al carácter no estacionario de las fuerzas potenciales externas (I.3.3.1°).

2°. Si el sistema es *conservativo* (I.3.1.7°), $\delta A_{n.p} \equiv 0$ y $\frac{\partial W_p}{\partial t} \equiv 0$. Respectivamente, la energía mecánica de este sistema $W = \text{const}$, es decir, es válida la siguiente *ley de conservación de la energía mecánica*: cuando un sistema conservativo se mueve, su energía mecánica no varía.

En particular esta ley es justa para los sistemas conservativos cerrados: la energía mecánica de un sistema cerrado no varía con el tiempo, si todas las fuerzas internas que actúan en dicho sistema son potenciales o no realizan trabajo.

La ley de conservación de la energía mecánica está relacionada con la *homogeneidad del tiempo*. Esta propiedad del tiempo se manifiesta en que las leyes del movimiento de un sistema cerrado (o de un sistema que se encuentra en un campo exterior estacionario) no dependen del punto (instante) de referencia del tiempo que se elija. Por ejemplo, en la caída libre de un cuerpo en el campo potencial estacionario de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra, la velocidad del cuerpo y el espacio recorrido por él sólo dependen de lo que dure la caída libre y de la velocidad inicial, pero no del instante concreto en que el cuerpo empezó a caer.

3°. La energía mecánica de un sistema cerrado *no conservativo* varía a expensas del trabajo que realizan todas las fuerzas internas no potenciales:

$$dW = \delta A_{n.p.}$$

Las fuerzas giroscópicas (1.3.1.7°) no realizan trabajo ni hacen aportación a $\delta A_{n.p.}$, es decir, la existencia de estas fuerzas en el sistema no provoca variación de su energía mecánica.

La acción de las fuerzas disipativas (1.3.1.7°), por ejemplo las fuerzas de rozamiento, ocasiona una disminución paulatina de la energía mecánica del sistema cerrado. Este proceso se llama *disipación de la energía*. Respectivamente, un sistema cuya energía mecánica disminuye continuamente con el tiempo, recibe el nombre de *sistema disipativo*. Durante la disipación de la energía se produce la transformación de la energía mecánica del sistema en otras formas de energía (por ejemplo, en energía del movimiento desordenado de las moléculas). La transformación de la energía mecánica se efectúa de acuerdo con una de las leyes generales de la naturaleza, la ley de conservación de la energía (II.2.2.7°).

Según esta ley, la energía puede pasar de una forma a otra y redistribuirse dentro del sistema, pero su cantidad total en un sistema cerrado debe permanecer constante. De la ley de conservación y transformación de la energía se deduce que la variación de la energía de un sistema no cerrado que se produce al interaccionar éste con el medio exterior (con los cuerpos y campos externos), debe ser numéricamente igual y de signo contrario a la variación de la energía del medio exterior. En otras palabras, la variación de la energía del sistema al interaccionar con el

medio exterior debe ser igual a la energía que dicho sistema recibe del exterior en el proceso que se considere.

4°. En todos los sistemas mecánicos reales actúan fuerzas de resistencia y de rozamiento, como consecuencia de lo cual todos estos sistemas son no conservativos. Pero en algunos casos se pueden considerar aproximadamente como conservativos y aplicarles la ley de conservación de la energía mecánica. Esto es posible si en el proceso considerado el trabajo $A_{n.p}$ de todas las fuerzas no potenciales que actúan sobre el sistema son despreciables por su pequeñez en comparación con la energía

mecánica W del sistema, es decir, si $\left| \frac{A_{n.p}}{W} \right| \ll 1$, de manera que

$\left| \frac{\Delta W}{W} \right| \ll 1$, donde $\Delta W = A_{n.p}$ es la variación de la energía mecánica del sistema.

5°. Se llama estado de *equilibrio mecánico de un sistema* el estado del cual dicho sistema sólo puede ser sacado como resultado de la acción de una fuerza exterior. En este estado todos los puntos materiales del sistema se hallan en reposo, ya que la energía cinética del sistema es igual a cero. El estado de equilibrio mecánico se dice que es *estable* si una pequeña acción exterior sobre el sistema sólo produce una pequeña variación de su estado. Al ocurrir esto surgen en el sistema fuerzas que tienden a restituirlo a su estado de equilibrio. El estado de equilibrio mecánico se llama *inestable* si el sistema, por pequeña que sea la acción externa que se ejerza sobre él, sale de dicho estado y no retorna más a él. En este caso surgen fuerzas que hacen que el sistema se siga desviando del estado de equilibrio.

La ley de conservación de la energía mecánica permite indicar las condiciones de equilibrio de los sistemas conservativos: en los estados de equilibrio estable la energía potencial del sistema tiene mínimos, y en los estados de equilibrio inestable, máximos.

6°. Basándose en la ley de conservación de la energía mecánica se puede esclarecer cuál es la región de las posibles configuraciones del sistema conservativo (I.3.3.1°). La energía cinética del sistema $W_c \geq 0$. Por esto, si se da el valor W de la energía mecánica del sistema, este último sólo puede encontrarse en los estados que satisfacen la condición $W_p \leq W$. La fig. I.3.5 corresponde al caso más simple, en que un punto material efectúa un movimiento unidimensional a lo largo del eje OX en un campo externo de potencial estacionario. La energía potencial del punto es función solamente de una coordenada

x , es decir, $W_p = W_p(x)$. La gráfica de esta dependencia, representada en la fig. 1.3.5, se llama *curva de potencial*. Si se fija el valor W de la energía mecánica del punto material que muestra la fig. 1.3.5, dicho punto se puede mover permaneciendo en una de las tres regiones siguientes: $x \leq x_1$ (región I), $x_2 \leq x \leq x_3$ (región III) y $x \geq x_4$ (región V). Éstas se encuentran

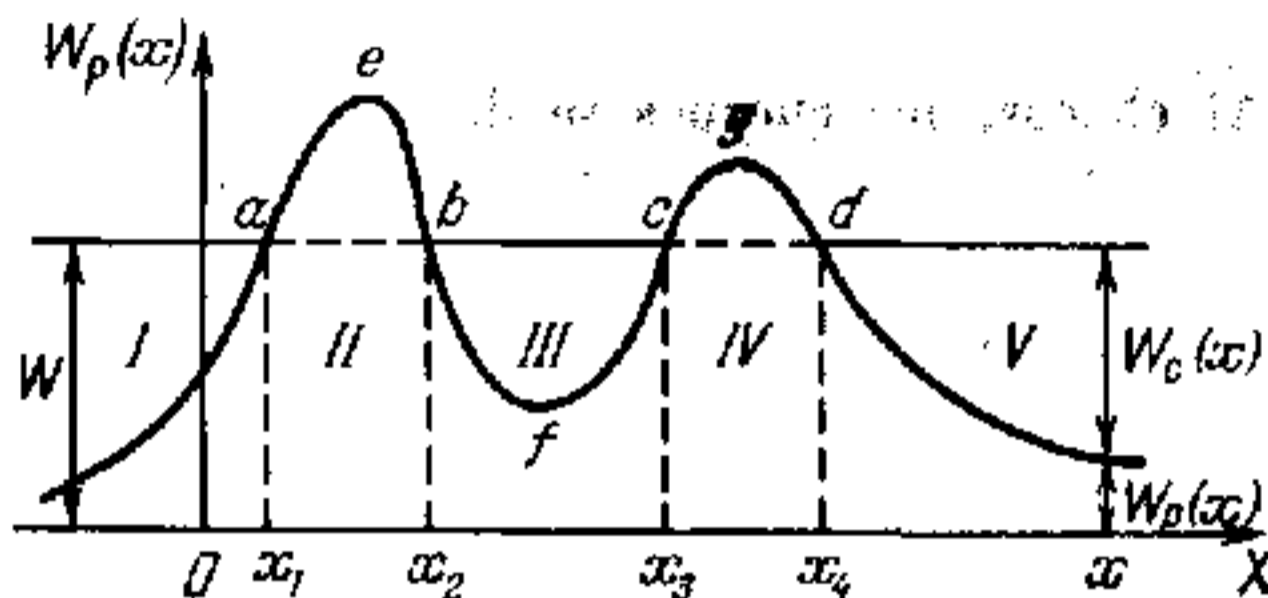


FIG. 1.3.5.

separadas entre sí por las regiones II y IV de las llamadas *barreras de potencial aeb y cgd*, dentro de cuyas fronteras no puede hallarse el punto. En las fronteras de las barreras de potencial (puntos a , b , c y d) el punto material invierte el sentido de su movimiento, con la particularidad de que en la región I el punto puede alejarse indefinidamente hacia la izquierda desde la frontera a de la barrera, y en la región V, hacia la derecha desde la frontera d . En la región III el punto material oscila entre los puntos b y c , encontrándose en el llamado *pozo de potencial bfc*.

§ 1.3.5. Choque perfectamente elástico e inelástico

1°. Se llama *choque, colisión o percusión* el encuentro de cuerpos en el cual, durante un pequeño intervalo de tiempo, se produce una importante variación de sus velocidades. Son ejemplos de choque el golpe descargado con un martillo sobre una pieza puesta en el yunque para ser forjada o sobre la cabeza de un clavo para clavarlo, etc.

Se da el nombre de *línea de choque* a la normal común trazada a las superficies de los cuerpos que participan en la colisión en el punto en que entran en contacto durante el choque. Se dice

que el choque es *central*, si en el instante de la colisión los centros de inercia (I.2.3.3°) de los cuerpos percutientes se encuentran en la línea de choque. De ejemplo de este choque sirve la colisión de dos esferas. El choque recibe el nombre de *directo* si, antes de la colisión, las velocidades de los centros de inercia de los cuerpos que se encuentran están dirigidas paralelamente a la línea de choque. En el caso contrario se dice que el choque es *oblicuo*.

2°. Al chocar, los cuerpos se deforman y en los puntos de contacto surgen fuerzas, de acción efímera pero muy importantes, llamadas *fuerzas de choque*. Para los sistemas de cuerpos que chocan estas fuerzas son internas *), es decir, no varían el impulso total del sistema. Las fuerzas externas que actúan continuamente sobre el sistema (como, por ejemplo, la gravedad) son generalmente muy pequeñas en comparación con las de choque. Por esto, aunque los impulsos de las fuerzas de choque (I.2.4.2°), durante el tiempo τ que dura la colisión, son comparables con los impulsos de los cuerpos que chocan (I.2.3.4°), el impulso resultante de todas las fuerzas externas que actúan continuamente durante este mismo intervalo de tiempo τ , es pequeño comparado con los impulsos de los cuerpos. Respectivamente, el trabajo que realizan las fuerzas externas sobre el sistema durante el tiempo τ , también es pequeño en comparación con la energía mecánica del sistema. De este modo, en el proceso de la colisión, el sistema de cuerpos se puede considerar aproximadamente como cerrado (I.2.2.4°), y para calcular los resultados del choque hay que utilizar las leyes de conservación del impulso (I.2.7.1°), del momento del impulso (momento de la cantidad de movimiento) (I.4.4.1°) y de la energía (II.2.2.7°). Si durante el choque los cuerpos se deforman como perfectamente elásticos, las fuerzas de choque son potenciales y en el sistema se cumple la ley de conservación de la energía mecánica (I.3.4.2°).

3°. El choque de dos cuerpos se llama *absolutamente inelástico* si después de él ambos cuerpos se mueven como si fueran uno sólo. Ejemplos bastante aproximados de choque absolutamente inelástico son los procesos como el golpe de la maza de un martinete en el pilote que se clava, o el impacto de una bala en una carretilla cargada de arena, en la cual se atasca aquélla. El choque inelástico se produce en los cuerpos que se encuen-

*) Se supone que los cuerpos que chocan son libres (I.2.2.3°) o que las ligaduras que se les imponen son tales, que no surgen reacciones de ligadura por el choque.

tran procesos de distinto tipo (deformación plástica, rozamiento, etc.) como resultado de los cuales la energía cinética del sistema se transforma parcialmente en energía interna del mismo (II.2.1.2°).

Si dos cuerpos de masas m_1 y m_2 animados de movimiento de traslación con las velocidades v_1 y v_2 sufren un *choque central, directo, absolutamente inelástico*, después de él estarán también animados de movimiento de traslación con la velocidad

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Observación. En el caso de un choque absolutamente inelástico arbitrario que sea directo y central, esta fórmula permite hallar la velocidad del centro de inercia de los cuerpos que se unen al chocar. Pero como resultado de esta colisión se puede producir también una rotación del sistema alrededor de su centro de inercia, de acuerdo con la ley de conservación del momento del impulso (I.4.4.1°).

4°. La variación de la energía cinética de un sistema de dos cuerpos que se encuentran produciéndose un choque central, directo, absolutamente inelástico, es

$$\begin{aligned} \Delta W_c &= \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 - \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{m_2}{2} v_2^2 = \\ &= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 < 0. \end{aligned}$$

En particular, si el segundo cuerpo estaba en reposo antes del choque (por ejemplo, el pilote que se clava con el martinete o la pieza de forja que descansa en el yunque), la disminución relativa de la energía cinética del sistema, al producirse el choque central, directo, absolutamente inelástico será

$$-\frac{\Delta W_c}{W_{c1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

El choque central, directo, absolutamente inelástico se utiliza en la técnica para cambiar la forma de los cuerpos (forja, estampado, remachado, etc.) o para desplazar cuerpos en un medio que ofrece gran resistencia (clavar clavos, pilotes, etc.). En el primer caso conviene que la relación $-\Delta W_c/W_{c1}$ se aproxime lo más posible a la unidad, es decir, es necesario que $m_2 \gg m_1$ (la masa de la pieza que se forja y del yunque debe ser muchísimo mayor que la masa del martillo). En el segundo

caso, al contrario, hace falta que las pérdidas de energía cinética durante el golpe sean las menores posibles, o sea, que $m_1 \gg m_2$ (la masa del martillo debe ser mucho mayor que la del clavo que se desea clavar).

5°. El choque de dos cuerpos se llama *perfectamente elástico* si en él no varía la energía mecánica del sistema, es decir, si los cuerpos son perfectamente elásticos.

Ejemplo 1. Choque directo, central, perfectamente elástico, de dos cuerpos (por ejemplo, de dos esferas) de masa m_1 y m_2

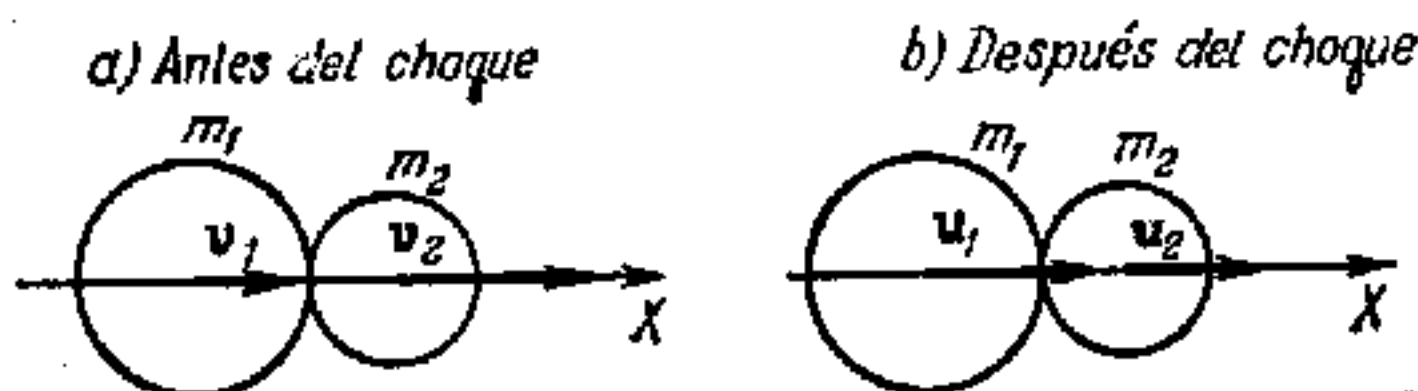


FIG. I.3.6.

que antes de la colisión estaban animados de movimiento de traslación con las velocidades v_1 y v_2 a lo largo del eje OX (fig. I.3.6, a) que pasa por sus centros de inercia. Las velocidades de los cuerpos después del choque u_1 y u_2 (fig. I.3.6., b) se pueden hallar partiendo de las leyes de conservación del impulso y de la energía mecánica:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

Las velocidades u_1 y u_2 están dirigidas a lo largo del eje OX , y sus proyecciones sobre este eje son

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1) v_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

En particular, si las masas de los cuerpos son iguales, al chocar intercambian sus velocidades: $u_{1x} = v_{2x}$ y $u_{2x} = v_{1x}$.

Si la masa del segundo cuerpo es mucho mayor que la del primero, entonces $u_{1x} \approx 2v_{2x} - v_{1x}$ y $u_{2x} \approx v_{2x}$.

6°. **Ejemplo 2.** Choque central, oblicuo, perfectamente elástico. Si los cuerpos son lisos, el impulso de las fuerzas de rozamiento durante el choque se puede despreciar. En este caso no varían las componentes tangenciales de las velocidades de los cuerpos, es decir, las componentes perpendiculares a la línea de

choque: $u_{1\tau} = v_{1\tau}$ y $u_{2\tau} = v_{2\tau}$. Las componentes normales, dirigidas a lo largo de la línea de choque, varían lo mismo que si éste fuera directo:

$$u_{1n} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1n} + 2m_2v_{2n}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2n} = \frac{2m_1v_{1n} + (m_2 - m_1)v_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

En particular, en el choque oblicuo, perfectamente elástico, de una esfera lisa con una pared plana fija ($m_2 \gg m_1$, $u_2 = v_2 = 0$)

$$u_{1\tau} = v_{1\tau}, \quad u_{1n} = -v_{1n},$$

es decir, la esfera rebota en la pared de acuerdo con la ley de reflexión especular: el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. El valor numérico de la velocidad se conserva: $u_1 = v_1$. El vector variación del impulso de la esfera Δp_1 , al chocar está dirigido perpendicularmente a la pared:

$$\Delta p_1 = m_1(u_1 - v_1) = -2m_1v_{1n}.$$

El impulso de la fuerza de choque que actúa sobre la pared es igual a $2m_1v_{1n}$.

Capítulo I.4. Dinámica del movimiento de rotación

§ 1.4.1. Momento de fuerza y momento de impulso

1°. Para caracterizar la acción mecánica externa ejercida sobre un cuerpo que hace que varíe su movimiento de rotación, se introduce el concepto de momento de fuerza. Se hace distinción entre momento de fuerza con respecto a un punto fijo y con respecto a un eje fijo.

El momento de una fuerza F con respecto a un punto fijo O (polo) es una magnitud vectorial M igual al producto vectorial del radio vector r trazado desde el punto O al punto A de aplicación de la fuerza (fig. 1.4.1), por el vector de la fuerza F :

$$M = [rF].$$

El módulo del momento de la fuerza $M = Fr \sin \alpha = Fl$ donde α es el ángulo entre los vectores r y F , y $l = r \sin \alpha$ es

la longitud de la perpendicular OB (fig. 1.4.1) bajada desde el punto O a la línea de acción de la fuerza. La magnitud l se llama *brazo de la fuerza* con respecto al punto O . Si el punto de aplicación de la fuerza F se traslada a lo largo de su línea de acción, el momento M de la fuerza con respecto a un mismo punto fijo O , no varía. Si la línea de acción de la fuerza pasa por el punto O , el momento de la fuerza con respecto a este punto es nulo.

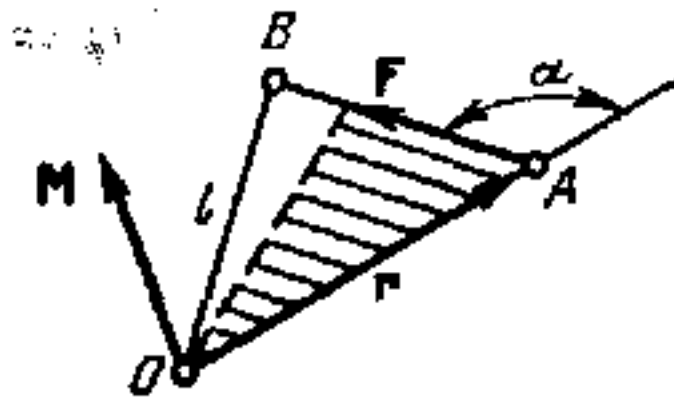


FIG. 1.4.1.

2°. Se llama *momento resultante* de un sistema de fuerzas con respecto a un punto fijo O (polo), el vector M igual a la suma geométrica de los momentos de las n fuerzas del sistema con respecto al punto O :

$$M = \sum_{i=1}^n [r_i F_i l_i]$$

donde r_i es el radio vector trazado desde el punto O al punto de aplicación de la fuerza F_i .

De la tercera ley de Newton (I.2.5.1°) se deduce que los momentos, respecto del polo O , de las fuerzas internas de interacción de los puntos materiales del sistema, se compensan de dos en dos: $[r_i F_{ik}] = -[r_k F_{ki}]$. Por consiguiente, al calcular el momento resultante de las fuerzas hay que tener en cuenta solamente las fuerzas *externas* que actúan sobre el sistema mecánico que se considera.

3°. Se da el nombre de *momento de una fuerza F con respecto a un eje fijo a* a una magnitud escalar M_a igual a la proyección sobre este eje del vector M del momento de la fuerza F con respecto a un punto arbitrario O del eje a . El valor del momento M_a no depende de la posición que se elija del punto O sobre el eje a .

Observación. A veces se entiende por momento de una fuerza con respecto a un eje fijo a la magnitud vectorial $M_a = M_a i_a$, donde i_a es el versor del eje a . El vector M_a es la componente del vector M del momento de la fuerza respecto del polo O , dirigida a lo largo del eje a .

Si la línea de acción de la fuerza corta el eje o es paralela a él, el momento de la fuerza con respecto a este eje es nulo.

Sea A el punto de aplicación de la fuerza F , y O_1 , la base de la perpendicular bajada desde el punto A al eje considerado OZ (fig. 1.4.2). La fuerza F conviene descomponerla en tres com-

ponentes perpendiculares entre sí: una axial F_z , paralela al eje, otra radial F_n , dirigida a lo largo del vector $\rho = \vec{O_1A}$, y una tercera F_τ , dirigida perpendicularmente al eje y al vector ρ . El momento de la fuerza F con respecto al eje OZ es

$$M_z = [\rho F_\tau]_z, \quad \text{y} \quad M_z = [\rho F_\tau].$$

Como los vectores ρ y F_τ son perpendiculares entre sí,

$$|M_z| = |M_z| = \rho |F_\tau|.$$

El momento resultante, con respecto a un eje fijo a , de un sistema de fuerzas, es igual a la suma algebraica de los momentos, con respecto a este eje, de todas las fuerzas del sistema.

4°. Se llama momento del impulso (o momento de la cantidad de movimiento) de un punto material con respecto a un punto fijo O (polo), el vector L igual al producto vectorial del radio vector r trazado desde el polo O al lugar en que se encuentra el punto material, por el vector p de su impulso:

$$L = [rp] = [rmv],$$

donde m y v son, respectivamente, la masa y la velocidad del punto material.

Recibe el nombre de momento del impulso de un sistema con respecto a un punto fijo O , la suma geométrica L de los momentos de los impulsos, con respecto a este mismo punto O , de todos los puntos materiales del sistema:

$$L = \sum_{i=1}^n [r_i p_i] = \sum_{i=1}^n [r_i m_i v_i],$$

en la que m_i , r_i y v_i son, respectivamente, la masa, el radio vector y la velocidad del i -ésimo punto material, y n es el número total de estos puntos que hay en el sistema.

El momento del impulso de un sistema con respecto a un eje fijo a es la magnitud L_a igual a la proyección sobre este eje del vector L del momento del impulso del sistema con respecto

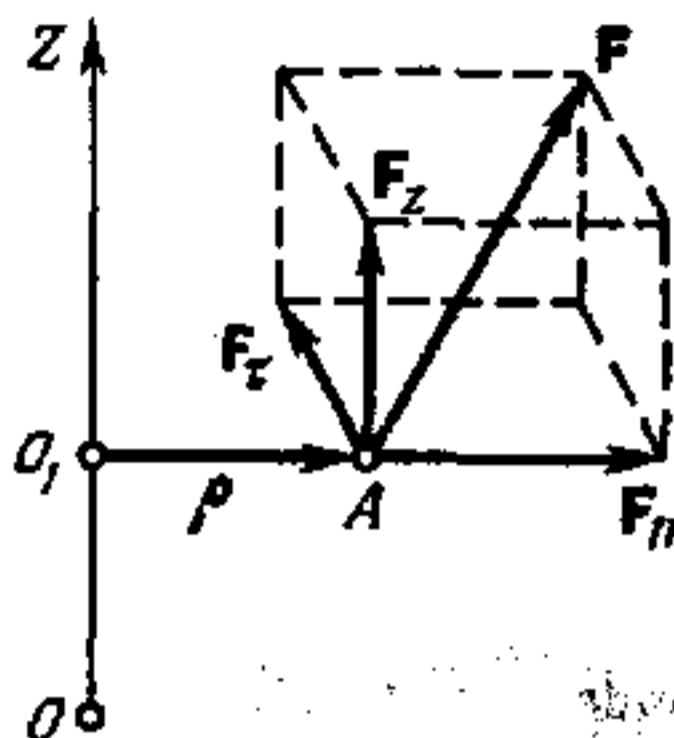


FIG. 1.4.2.

a un punto cualquiera O perteneciente al mismo eje:

$$L_a = \sum_{i=1}^n [r_i m_i v_i]_a.$$

La elección que se haga de la posición del punto O en el eje a no influye en el valor numérico de L_a .

Observación. Algunas veces se entiende por momento del impulso de un sistema con respecto a un eje fijo a , la magnitud vectorial $L_a = L_a i_a$, en la que i_a es el versor del eje a .

5°. El momento del impulso de un cuerpo con respecto a un punto fijo O , alrededor del cual gira el cuerpo con la velocidad angular ω , es:

$$L = \int_{(m)} [rv] dm = \int_{(m)} [r[\omega r]] dm,$$

donde r es el radio vector trazado desde el punto O a un pequeño elemento del cuerpo de masa dm , y $v = [\omega r]$ es la velocidad de este elemento. Como $[r[\omega r]] = r^2 \omega - (\omega r) r$, las direcciones de los vectores L y ω , en el caso general, no coinciden:

$$L = \omega \int_{(m)} r^2 dm - \int_{(m)} (\omega r) r dm.$$

El momento del impulso de un cuerpo sujeto a un punto O y su velocidad angular coinciden en dirección si el cuerpo gira alrededor de uno de sus ejes de inercia principales en el punto O (1.4.2.4°).

$$L = J\omega,$$

siendo J el momento de inercia del cuerpo (1.4.2.1°) con respecto a este eje principal.

6°. Los valores M y M^* del momento resultante de un sistema de fuerzas con respecto a dos puntos fijos distintos O y O^* están ligados por la relación

$$M = M^* + [r^* F],$$

en la que r^* es el radio vector trazado desde el origen O al punto O^* , y F es el vector resultante del sistema de fuerzas considerado. Si $F = 0$, entonces el momento resultante del sistema de fuerzas es el mismo con respecto a cualquier punto fijo: $M^* = M$. Precisamente esta propiedad la tiene el par de fuerzas, es decir, el sistema de dos fuerzas iguales numéricamente entre sí y dirigidas a lo largo de dos rectas paralelas en sentidos

opuestos. La distancia más corta d entre las líneas de acción de las fuerzas del par se llama *brazo del par*. El momento de un par de fuerzas está dirigido perpendicularmente al plano en que se hallan las fuerzas, y su módulo es $M = Fd$, siendo F el módulo de cada una de las fuerzas del par.

El momento resultante M_C , respecto del centro de inercia C de un sistema mecánico (1.2.3.3°), de todas las fuerzas que actúan sobre dicho sistema, está ligado con el momento resultante M de este mismo sistema de fuerzas con respecto a un punto fijo O , por la relación

$$M = M_C + [r_C F],$$

en la que r_C es el radio vector trazado desde el origen O al punto C , y F_C es el vector resultante del sistema de fuerzas.

7°. Los valores del momento del impulso de un sistema mecánico respecto de su centro de inercia C para el movimiento absoluto de los puntos con las velocidades v_i (es decir, con relación a un sistema inercial de referencia fijo) y para su movimiento relativo con las velocidades $v'_i = v_i - v_C$ (o sea, con respecto al sistema de referencia con origen en el punto C , animado de movimiento de traslación), son iguales:

$$\sum_{i=1}^n [r_i m_i v_i] = \sum_{i=1}^n [r'_i m_i v'_i] = L_C, \quad \text{con IS}$$

donde $r'_i = r_i - r_C$ es el radio vector del i -ésimo punto en el sistema de referencia que se mueve junto con el centro de inercia.

La relación entre los valores del momento del impulso del sistema mecánico L , respecto del punto fijo O , y L_C , respecto del centro de inercia, tiene la forma

$$L = L_C + [r_C p],$$

siendo $p = \sum_{i=1}^n m_i v_i$ el impulso del sistema en su movimiento absoluto.

§ 1.4.2. Momento de inercia

1°. Se llama *momento de inercia de un sistema mecánico* con respecto a un eje fijo a , la magnitud física J_a igual a la suma de los productos de las masas de los n puntos materiales que

componen el sistema, por los cuadrados de sus distancias al eje:

$$J_a = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2,$$

donde m_i y ρ_i son, respectivamente, la masa del i -ésimo punto material y su distancia al eje.

El momento de inercia de un cuerpo

$$J_a = \int \rho^2 dm = \int \rho^2 D dV,$$

en esta igualdad $dm = D dV$ es la masa de un pequeño elemento de volumen dV ; D , la densidad, y ρ , la distancia del elemento dV al eje a .

Si el cuerpo es homogéneo, es decir, si la densidad es igual en todas sus partes, entonces

$$J_a = D \int \rho^2 dV.$$

El momento de inercia de un cuerpo J_a es la medida de la inercia del mismo en el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo a (1.4.3.4°), de un modo semejante a como la masa del cuerpo es la medida de su inercia en el movimiento de traslación.

2°. El momento de inercia de un cuerpo dado con relación a un eje cualquiera depende no sólo de la masa, de la forma y de las dimensiones del cuerpo, sino también de su posición con respecto a dicho eje. De acuerdo con el *teorema de Steiner (sobre la traslación de los ejes de inercia)*, el momento de inercia J de un cuerpo con relación a un eje arbitrario es igual a la suma del momento de inercia J_C de este cuerpo con respecto al eje que pasa por su centro de inercia y es paralelo al eje considerado, y del producto de la masa del cuerpo m por el cuadrado de la distancia d entre dichos ejes:

$$J = J_C + md^2.$$

3°. Momentos de inercia de los cuerpos homogéneos de formas más simples, respecto de algunos ejes (tabla 1.4.1).

4°. Reciben el nombre de *momentos de inercia centrífugos de un cuerpo* con relación a los ejes de un sistema de coordenadas

Tabla 1.4.1

Cuerpo	Posición del eje a	Momento de inercia J_a
Cilindro hueco de paredes delgadas, radio R y masa m	El eje del cilindro	mR^2
Cilindro macizo (disco) de radio R y masa m	El eje del cilindro	$\frac{1}{2} mR^2$
Esfera maciza de radio R y masa m	El eje pasa por el centro de la esfera	$\frac{2}{5} mR^2$
Esfera de paredes delgadas de radio R y masa m	El eje pasa por el centro de la esfera	$\frac{2}{3} mR^2$
Varilla delgada, recta, de longitud l y masa m	El eje es perpendicular a la varilla y pasa por su centro	$\frac{1}{12} ml^2$
La misma varilla	El eje es perpendicular a la varilla y pasa por su extremo	$\frac{1}{3} ml^2$

cartesianas rectangulares, las magnitudes siguientes:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy \, dm = \int_{(V)} xy D \, dV,$$

$$J_{xz} = \int_{(m)} xz \, dm = \int_{(V)} xz D \, dV,$$

$$J_{yz} = \int_{(m)} yz \, dm = \int_{(V)} yz D \, dV,$$

en las que x , y y z son las coordenadas de un pequeño elemento del cuerpo de volumen dV , densidad D y masa dm .

El eje OX se llama *eje principal de inercia del cuerpo*, si los momentos centrífugos de inercia J_{xy} y J_{xz} son nulos simultáneamente. Por cada punto de un cuerpo se pueden trazar tres ejes de inercia principales. Estos ejes son perpendiculares entre sí. Los momentos de inercia del cuerpo con respecto a los tres ejes de inercia principales, trazados por un punto arbitrario O

de dicho cuerpo, se llaman *momentos de inercia principales del cuerpo*.

Los ejes de inercia principales que pasan por el centro de inercia del cuerpo reciben el nombre de *ejes centrales principales de inercia del cuerpo*, y los momentos de inercia del cuerpo con respecto a estos ejes se dice que son sus *momentos centrales principales de inercia*. El eje de simetría de un cuerpo homogéneo es siempre uno de sus ejes de inercia centrales principales.

§ 1.4.3. Ley fundamental de la dinámica del movimiento de rotación

1°. De las leyes de Newton se deduce que la primera derivada respecto del tiempo t del momento del impulso L de un sistema mecánico con relación a cualquier punto fijo O es igual al momento resultante M^{ext} , respecto del mismo punto O , de todas las fuerzas externas aplicadas al sistema:

$$\frac{dL}{dt} = M^{\text{ext}}.$$

Esta ecuación expresa la *ley de variación del momento del impulso de un sistema*. Esta ley es válida, en particular, para un sólido sujeto con articulación en un punto O en torno al cual gira. En este caso la ecuación anterior expresa la *ley fundamental de la dinámica del sólido que gira alrededor de un punto fijo*.

En proyecciones sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares fijo con origen en el punto O , la ley de variación del momento del impulso del sistema se escribe en la forma

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{\text{ext}}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{\text{ext}}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{ext}}.$$

Aquí L_x , L_y , L_z y M_x^{ext} , M_y^{ext} , M_z^{ext} son, respectivamente, los momentos del impulso del sistema y los momentos resultantes de las fuerzas externas respecto de los respectivos ejes de coordenadas.

2°. Ejemplo. *Precesión regular de un giróscopo* bajo la acción de su gravedad. Se llama *giroscopio* o *giróscopo (simétrico)* un sólido simétrico que gira rápidamente alrededor de un eje de simetría, el cual puede variar su dirección en el espacio. El giróscopo tiene tres grados de libertad (I.1.5.6°) si está sujeto

a un punto fijo perteneciente a su eje y llamado *centro de suspensión del giróscopo*. Si el centro de suspensión coincide con el centro de gravedad C del giróscopo, se dice que éste está *equilibrado* o que el *giróscopo es astático*: la acción que sobre él ejerce la gravedad no provoca variaciones en su estado de rotación. En el caso contrario el giróscopo se llama *pesado* (fig. 1.4.3). Bajo la acción del momento de la fuerza de gravedad respecto del punto O ,

$$M_{ext} = [r_C mg],$$

el giróscopo pesado da vueltas alrededor de este punto de tal manera que su eje OZ' gira uniformemente alrededor del eje vertical OZ describiendo la superficie cónica que muestra la fig. 1.4.3 con trazos. Este movimiento del giróscopo se llama *precesión regular*. Si la velocidad angular de la precesión $\Omega \ll \omega$ (ω es la velocidad angular de la rotación propia del giróscopo alrededor del eje de simetría OZ'), se puede considerar aproximadamente que el momento del impulso del giróscopo L con respecto al punto O está dirigido a lo largo de su eje OZ' y es igual a

$$L = J\omega,$$

donde J es el momento de inercia del giróscopo con relación al eje OZ' . Por esto

$$\frac{dL}{dt} = [r_C mg] = \left[\frac{r_C}{J\omega_{z'}} Lmg \right] = [\Omega L],$$

siendo $\Omega = -\frac{m r_C}{J\omega_{z'}} g$ la velocidad angular de precesión,

y $\omega_{z'} = \omega$ en el caso representado en la fig. 1.4.3. Cuanto mayor es la velocidad angular de la rotación propia del giróscopo, tanto más lenta es su precesión.

3°. La energía cinética de un sólido que gira alrededor de un punto fijo con la velocidad angular ω es

$$W_c = \frac{J\omega^2}{2},$$

donde J es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje instantáneo de rotación (1.1.5.6°).

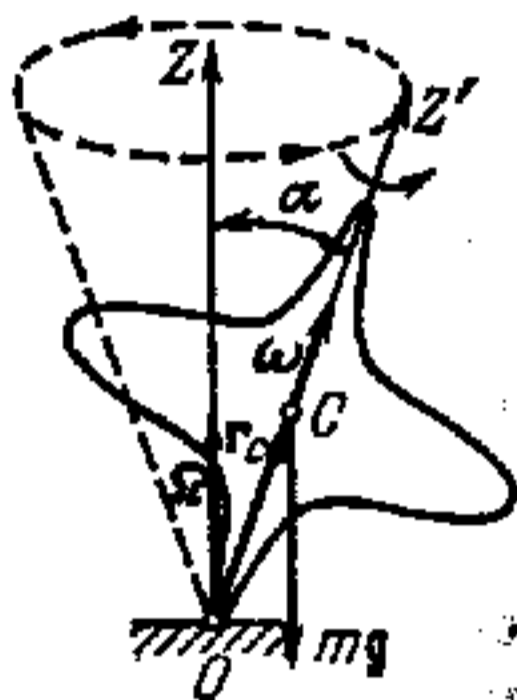


FIG. 1.5.1.

El trabajo elemental realizado durante un pequeño intervalo de tiempo dt por la fuerza F que actúa sobre el cuerpo es

$$\delta A = M\omega dt = M d\varphi = M_{\omega} d\varphi,$$

en esta expresión, $M = [rF]$ es el momento de la fuerza F con relación al punto O (r es el radio vector trazado desde O al punto de aplicación de la fuerza F), $d\varphi = \omega dt$ y $d\varphi = \omega dt$ son el ángulo de rotación y el vector de rotación elemental del cuerpo durante el tiempo dt , y M_{ω} es el momento de la fuerza F respecto del eje instantáneo de rotación del cuerpo, igual a la proyección del vector M sobre la dirección del vector ω .

El incremento de la energía cinética del sólido durante el tiempo dt es igual al trabajo de las fuerzas externas:

$$dW_c = M_{\omega}^{\text{ext}} d\varphi,$$

donde M_{ω}^{ext} es el momento resultante de las fuerzas externas respecto del eje instantáneo de rotación del cuerpo (I.4.1.3°).

4°. Si el sólido gira alrededor del eje OZ con velocidad angular ω , su momento de impulso con relación a este eje

$$L_z = J_z \omega_z \quad \text{y} \quad L_z = J_z \omega.$$

Aquí J_z es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje OZ , que no varía con el tiempo ($J_z = \text{const}$), y $|\omega_z| = \omega > 0$ ($\omega_z = \omega$, si los vectores ω y el versor del eje OZ coinciden en dirección, y $\omega_z = -\omega$ en el caso contrario).

La ley fundamental de la dinámica del sólido que gira alrededor de un eje fijo OZ es:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{\text{ext}} \quad \text{o} \quad \varepsilon = \frac{1}{J_z} M_z^{\text{ext}},$$

siendo $\varepsilon = d\omega/dt$ la aceleración angular del cuerpo.

De la última fórmula se deduce que el momento de inercia del sólido respecto a cualquier eje fijo es la medida de la inercia de dicho sólido que gira alrededor de ese eje: cuanto mayor sea el momento de inercia del cuerpo, tanto menor será la aceleración angular que adquiere bajo la acción de un mismo momento de las fuerzas externas.

5°. La energía cinética del sólido que gira alrededor de un eje fijo OZ con la velocidad angular ω , es

$$W_c = \frac{1}{2} J_z \omega^2.$$

El trabajo elemental que realiza durante un pequeño intervalo de tiempo dt la fuerza F aplicada al cuerpo es

$$\delta A = M_z \omega dt = M_z d\varphi,$$

donde M_z es el momento de la fuerza F con respecto al eje de rotación OZ (el versor del eje OZ coincide en dirección con el vector ω).

El incremento de la energía cinética del sólido durante el tiempo dt es igual al trabajo de las fuerzas externas:

$$dW_0 = M_z^{\text{ext}} d\varphi,$$

siendo M_z^{ext} el momento resultante de las fuerzas externas respecto al eje de rotación del cuerpo.

6°. El movimiento de un sólido libre satisface las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad \text{y} \quad \frac{dL_C}{dt} = M_C^{\text{ext}}.$$

Aquí m es la masa del cuerpo; \mathbf{v}_C , la velocidad de su centro de inercia C ; \mathbf{F}^{ext} , el vector resultante de las fuerzas externas aplicadas al cuerpo (1.2.5.2°); M_C^{ext} , el momento resultante de las fuerzas externas respecto del punto C (1.4.1.6°), y L_C es el momento del impulso del cuerpo con relación a este mismo punto C (1.4.1.7°).

La primera ecuación describe el movimiento de traslación del cuerpo libre con la velocidad de su centro de inercia (1.2.5.3°). La segunda ecuación se deduce de la ley de variación del momento del impulso (1.4.3.1°) y define la rotación del sólido alrededor de su centro de inercia (1.1.5.9°).

7°. La energía cinética de un sólido libre puede hallarse basándose en el teorema de Koenigs (1.3.2.4°):

$$W_C = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

en el que J_C es el momento de inercia del cuerpo respecto del eje instantáneo de rotación que pasa por su centro de inercia C , y ω es la velocidad angular del cuerpo. En el caso general el eje instantáneo se desplaza en el cuerpo, y el momento de inercia J_C varía con el tiempo. La magnitud J_C permanece constante si el movimiento del cuerpo es plano (1.1.5.9°).

Ejemplo. Energía cinética de un cilindro circular homogéneo que rueda por un plano inclinado sin deslizamiento. El movi-

miento del cilindro es plano: todos sus puntos se mueven en planos verticales paralelos entre sí. El cilindro está animado de movimiento de traslación con la velocidad v_C dirigida a lo largo del plano inclinado, y gira alrededor de su eje ($J_C = mR^2/2$, siendo m y R , respectivamente, la masa y el radio del cilindro) con velocidad angular ω . De la condición de ausencia de deslizamiento se deduce que la velocidad instantánea de los puntos de contacto del cilindro con el plano inclinado es nula, es decir, $\omega = v_C/R$. Por esto la energía cinética del cilindro que rueda es:

$$W_c = \frac{mv_C^2}{2} = \frac{J_C \omega^2}{2} = \frac{3}{4} mv_C^2.$$

§ 1.4.4. Ley de conservación del momento de impulso

1°. *Ley de conservación del momento de impulso*: el momento del impulso de un sistema cerrado (I.2.2.4°) respecto de cualquier punto fijo no varía con el tiempo, es decir,

$$\frac{dL}{dt} \equiv 0 \quad \text{y} \quad L = \text{const.}$$

Respectivamente, el momento del impulso de un sistema cerrado respecto de su centro de inercia (I.4.1.7°) no varía con el tiempo:

$$\frac{dL_C}{dt} \equiv 0 \quad \text{y} \quad L_C = \text{const.}$$

De un modo semejante a las leyes de conservación del impulso y de la energía, la ley de conservación del momento de impulso rebasa los límites de la mecánica clásica. Esta ley es una de las más fundamentales de la física, ya que está relacionada con una propiedad determinada de la simetría del espacio, su isotropía. La *isotropía del espacio* se manifiesta en que las propiedades físicas y las leyes del movimiento de un sistema cerrado no dependen de las direcciones que se elijan de los ejes de coordenadas del sistema inercial de referencia, o sea, no varían cuando el sistema cerrado en conjunto gira a un ángulo cualquiera en el espacio.

De acuerdo con las ideas moneradas, pueden tener momento de impulso no sólo las partículas y los cuerpos, sino también los campos, y las partículas elementales y los sistemas contruidos con ellas (por ejemplo, los núcleos atómicos) pueden poseer un

momento de impulso no relacionado con su movimiento en el espacio, que recibe el nombre de espín (tabla VIII.2.1).

2°. Con arreglo a los sistemas que describe la mecánica clásica (newtoniana), la ley de conservación del momento de impulso se puede considerar como una consecuencia de las leyes de Newton. Para un sistema mecánico cerrado, el momento resultante de las fuerzas externas respecto de un punto fijo cualquiera (y también con relación al centro de inercia del sistema) es idénticamente igual a cero: $M^{\text{ext}} \equiv 0$ (y respectivamente $M_C^{\text{ext}} \equiv 0$, véase (1.4.1.6°), donde $F = F^{\text{ext}} \equiv 0$), y de (1.4.3.1°) se deduce la ley de conservación del momento de impulso:

$$L = \sum_{i=1}^n [r_i m_i v_i] = \text{const},$$

donde m_i , r_i y v_i son, respectivamente, la masa, el radio vector y la velocidad del i -ésimo punto material del sistema compuesto de n puntos como éste.

Respectivamente (véase 1.4.1.7° y 1.2.5.3°),

$$L_C = \sum_{i=1}^n [r'_i m_i v'_i] = \sum_{i=1}^n [r_i m_i v_i] = \text{const},$$

siendo $r'_i = r_i - r_C$, $v'_i = v_i - v_C$, y r_C y v_C son el radio vector y la velocidad del centro de inercia del sistema.

3°. Si el sistema no es cerrado, pero las fuerzas externas que actúan sobre él son tales que su momento resultante respecto de un punto fijo O son idénticamente iguales a cero ($M^{\text{ext}} \equiv 0$), entonces, de acuerdo con las leyes de Newton (1.4.3.1°), el momento del impulso del sistema con relación a este mismo punto O no varía con el tiempo: $L = \text{const}$. Esta condición la cumple, por ejemplo, prácticamente el giróscopo equilibrado (1.4.3.2°) con tres grados de libertad cuyo momento de las fuerzas de rozamiento en la suspensión es bastante pequeño. Cualesquiera que sean los giros que se den al soporte de este giróscopo, que mantiene en reposo su centro de inercia, el eje del giróscopo conserva su orientación respecto del sistema inercial de referencia fijo *).

*) Se supone que el vector L está dirigido según el eje del giróscopo. En el caso contrario el giróscopo libre efectúa una precesión regular: su eje describe una superficie cónica circular cuyo vértice se encuentra en el centro de suspensión, y el eje está dirigido a lo largo del vector $L = \text{const}$.

De ordinario $M^{\text{ext}} \neq 0$ y $L \neq \text{const.}$ Pero si el momento resultante de las fuerzas externas respecto de cualquier eje fijo que pase por el punto O es idénticamente igual a cero, el momento del impulso del sistema con relación a este mismo eje no varía con el tiempo. Por ejemplo, si $M_z^{\text{ext}} \equiv 0$, entonces $L_z = \text{const.}$

En caso de que el sistema gire alrededor de un eje fijo OZ y el momento resultante de las fuerzas externas respecto de este eje $M_z^{\text{ext}} \equiv 0$, el momento del impulso del sistema respecto del eje de rotación no variará con el tiempo:

$$J_z \omega = \text{const.},$$

donde ω y J_z son, respectivamente, la velocidad angular y el momento de inercia del sistema.

Si bajo la acción de las fuerzas internas, y también de las externas, que satisfacen la condición $M_z^{\text{ext}} \equiv 0$, se deforma el sistema y su momento de inercia J_z varía, respectivamente aumenta o disminuye la velocidad angular ω .

4°. Se llaman *ejes libres de un cuerpo*, aquellos alrededor de los cuales el sólido libre (1.2.2.3°) puede girar con velocidad angular ω constante en ausencia de toda clase de acciones externas. Esta rotación del cuerpo se dice que es *inercial* o *libre*. Los ejes libres de un cuerpo coinciden con sus ejes centrales principales de inercia (1.4.2.4°). En el caso general los valores J_1 , J_2 y J_3 de los momentos centrales principales de inercia del cuerpo (1.4.2.4°) son distintos. La rotación libre de un cuerpo de este tipo (por ejemplo, de un paralelepípedo rectangular homogéneo con aristas de distinta longitud) se efectúa en la práctica solamente alrededor de dos ejes libres, correspondientes a los valores extremos de los momentos centrales principales de inercia, es decir, al mayor y al menor. La rotación del cuerpo alrededor de su tercer eje central principal, correspondiente a un valor intermedio del momento de inercia, es inestable: incluso acciones pequeñas son capaces de provocar desviaciones importantes del eje instantáneo de rotación del cuerpo respecto de su dirección inicial en el mismo.

Si los valores de dos momentos centrales principales de inercia de un cuerpo son iguales: $J_1 = J_2 \neq J_3$, la rotación libre y estable de este cuerpo (por ejemplo, de un cilindro circular homogéneo (sólo es posible alrededor del eje libre correspondiente al tercer valor, distinto de aquéllos, del momento de inercia del cuerpo J_3). Para un cilindro circular homogéneo este eje libre es su eje de simetría. Pero si un cilindro largo y delgado

se hace girar valiéndose de un hilo sujeto a su extremo, resultará ser estable la rotación del cilindro alrededor del eje libre correspondiente al valor mayor de su momento de inercia. Este eje libre es perpendicular al eje de simetría del cilindro.

Capítulo 1.5. Fundamentos de la teoría especial de la relatividad

§ 1.5.1. Postulados de la teoría especial de la relatividad

1°. *La teoría especial de la relatividad* (llamada también *teoría restringida de la relatividad*) es la teoría física moderna del espacio y del tiempo. La teoría especial de la relatividad y la mecánica cuántica (VI.1.1.1°) sirven de base teórica a la física y a la técnica modernas (por ejemplo, a la física y a la técnica nuclear). La teoría especial de la relatividad recibe frecuentemente el nombre de *teoría relativista*, y los fenómenos específicos que ella describe, el de *efectos relativistas*. Por regla general, los efectos relativistas se ponen de manifiesto cuando las velocidades con que se mueven los cuerpos se aproximan por su magnitud a la velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Estas velocidades se denominan *relativistas*. Se da el nombre de *mecánica relativista* a la mecánica de los movimientos con velocidades relativistas, basada en la teoría especial de la relatividad.

En la teoría especial de la relatividad, lo mismo que en la mecánica newtoniana clásica, se supone que el tiempo es homogéneo (I.3.4.2°) y que el espacio es homogéneo (I.2.7.1°) e isotropo (I.4.4.1°).

2°. En la base de la teoría especial de la relatividad se encuentran dos principios fundamentales que se toman como postulados iniciales.

El primer postulado es la generalización del principio mecánico de la relatividad de Galileo (I.2.8.4°) a todos los procesos físicos. Este postulado se llama *principio de la relatividad* o *principio relativista de Einstein* y dice: en cualesquiera sistemas inerciales de referencia (I.2.1.2°) todos los fenómenos físicos, en

igualdad de condiciones, transcurren igualmente. Dicho de otro modo, el principio de la relatividad afirma que las leyes físicas son independientes (invariantes) respecto del sistema inercial de referencia que se elija: las ecuaciones que expresan estas leyes tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales de referencia. Por consiguiente, basándose en cualesquiera experimentos físicos, realizados en un sistema cerrado de cuerpos (I.2.2.4°), es imposible determinar si dicho sistema está en reposo o animado de movimiento uniforme y rectilíneo (respecto de cualquier sistema inercial de referencia). En física todos los sistemas inerciales de referencia son completamente equivalentes. Basándose en experimentos físicos es imposible elegir, del conjunto de sistemas inerciales de referencia, un sistema de referencia principal («absoluto» que difiera cualitativamente en algo de los otros sistemas inerciales.

3°. *El segundo postulado expresa el principio de la invarianción de la velocidad de la luz:* la velocidad de la luz en el vacío no depende del movimiento del foco luminoso. Esta velocidad es la misma en todas las direcciones y en todos los sistemas inerciales de referencia y es una de las constantes físicas más importantes. Las experiencias demuestran que la velocidad de la luz en el vacío c es la velocidad límite (máxima) que existe en la naturaleza. La velocidad de cualesquiera partículas o cuerpos, así como la velocidad de propagación de cualesquiera interacciones y señales no puede ser mayor que c .

Las leyes específicas indicadas del proceso de propagación de la luz en el vacío permiten utilizar este proceso físico real para establecer el procedimiento de *cronometraje de los sistemas de referencia*, es decir, de sincronización de los relojes que se encuentran en distintos puntos del espacio y que se trasladan junto con el sistema de referencia que se considera (I.5.2.3°).

4°. Los postulados de la teoría especial de la relatividad contradicen las representaciones sobre las propiedades del espacio y del tiempo que se aceptan en la mecánica clásica y que se reflejan en las transformaciones de Galileo (I.2.8.1°). En particular, esto se refiere a la afirmación, considerada en la mecánica de Newton como «indudable», sobre la igualdad de la marcha del tiempo en todos los sistemas inerciales de referencia y, por consiguiente, sobre el carácter absoluto del intervalo de tiempo entre dos sucesos cualesquiera. Por ejemplo, si dos sucesos se producen simultáneamente según los relojes de un sistema inercial de referencia, estos sucesos de acuerdo con las ideas clásicas, también se producen simultáneamente según los relojes de cualquier otro sistema inercial de referencia.

La contradicción indicada se puede explicar con el siguiente ejemplo (fig. 1.5.1). Tenemos dos sistemas inerciales de referencia: uno K en reposo y otro K' que se mueve a lo largo del eje OX con la velocidad constante V . Supongamos que en el instante inicial de referencia del tiempo en ambos sistemas K y K' ($t = t' = 0$), cuando sus orígenes de coordenadas O y O' coinciden, se produce en el punto O un destello de luz instantáneo. En un instante $t > 0$, la luz, propagándose en el vacío

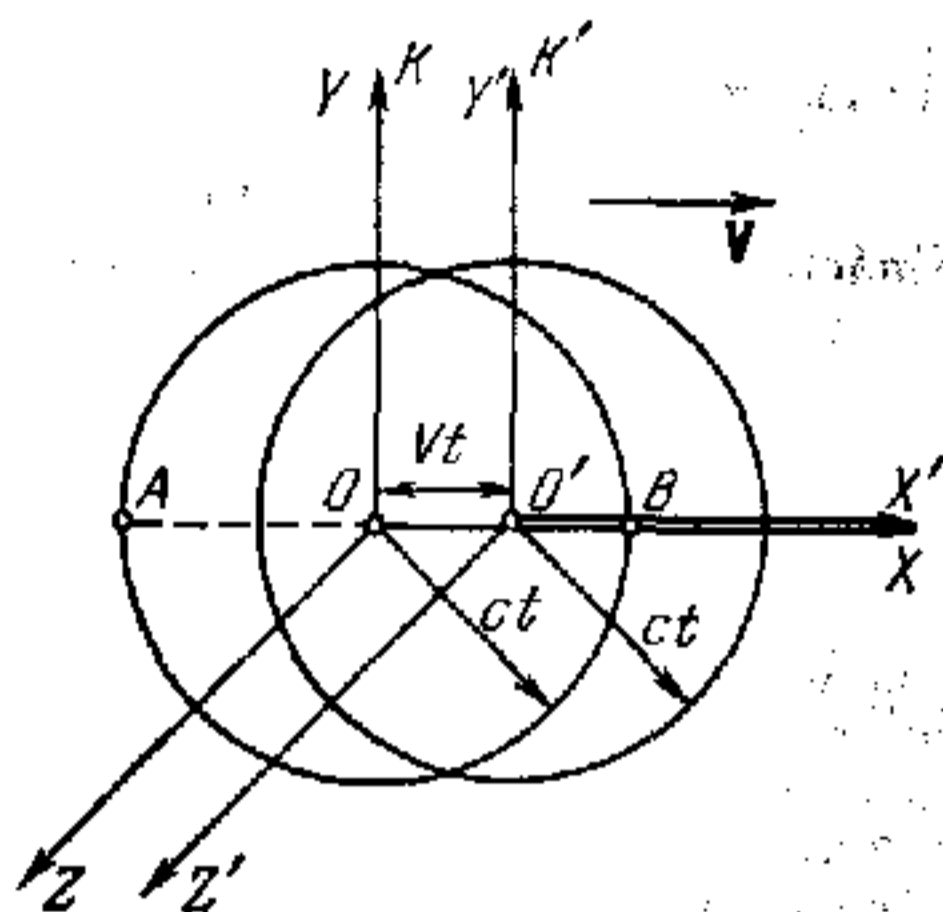


Fig. 1.4.3.

con la velocidad c , llega en el sistema de referencia K a los puntos de la superficie de una esfera con centro en el punto O y de radio igual a ct .

En el sistema K' se puede considerar que el destello se produjo en el instante $t' = 0$ en el punto O' . Por esto, de acuerdo con los postulados de la teoría especial de la relatividad, en el instante $t' = t$, la luz, en el sistema K' , llegará a los puntos de la superficie de una esfera del mismo radio ct que en el sistema K , pero con centro en el punto O' , que en este instante no se encontrará ya en el punto O , sino a la distancia Vt de él. De este modo, la unión de los postulados de la teoría especial de la relatividad y de las representaciones clásicas sobre el tiempo absoluto, que marcha igualmente en todos los sistemas inerciales de referencia, conduce a un absurdo: la luz del destello debe llegar al mismo tiempo a los puntos del espacio pertenecientes a las superficies de dos esferas distintas.

§ 1.5.2. Simultaneidad de sucesos. Sincronización de relojes

1°. Al practicar diversas mediciones físicas se utiliza mucho el concepto de simultaneidad de dos o varios sucesos. Por ejemplo, para determinar la longitud l de una varilla colocada a lo largo de eje OX de un sistema de referencia K y que se mueve con respecto a este sistema, es necesario fijar (determinar) *simultáneamente*, es decir, en un mismo instante t , los valores $x_2(t)$ y $x_1(t)$ de las coordenadas de los extremos de la varilla:

$$l = |x_2(t) - x_1(t)|.$$

La determinación del instante en que ocurre tal o cual suceso (por ejemplo, el despegue o el aterrizaje de una nave cósmica) se reduce a establecer lo que marca un reloj *en el mismo instante* en que se produce el suceso considerado. Esto se puede hacer fácilmente valiéndose de relojes que se encuentren en el mismo sitio en que tiene lugar dicho suceso. Por lo tanto, en cada sistema de referencia debe haber un conjunto de relojes que se encuentren en distintos puntos del espacio. Está claro que todos estos relojes deben marchar de acuerdo, *sincronizados*, es decir, sus indicaciones deben ser iguales en cada instante t .

2°. El sincronismo de la marcha de los relojes que están cerca, es decir, en un mismo lugar del espacio, puede comprobarse por la coincidencia de sus indicaciones en cada instante arbitrario. El sincronismo de la marcha de los relojes que se hallan en puntos A y B alejados entre sí podría comprobarse de un modo análogo si hubiera la posibilidad de enviar señales de hora exacta que se propagaran de A a B *instantáneamente*. Pero la experiencia demuestra que este procedimiento es irrealizable, ya que la velocidad de cualquier señal no puede ser mayor que la velocidad de la luz en el vacío.

Se puede proceder del modo siguiente: traer el reloj del punto B al A , comprobar el sincronismo de su marcha con el reloj que se halla en el punto A , y después trasladarlo con cuidado otra vez al punto B . La comprobación de que el reloj traído al punto B continúa marchando con la misma velocidad que el reloj que se quedó en el punto A , se puede hacer por medio de señales de tiempo enviadas de A a B con intervalos de tiempo iguales, determinados por el reloj del punto A . Pero por este procedimiento es imposible determinar si durante la traslación del reloj se produjo algún desplazamiento del instante de referencia del tiempo por dicho reloj, o sea, si este reloj traído al

punto B no ha empezado a adelantarse o a retrasarse respecto del reloj del punto A en una magnitud constante Δt .

3°. El problema de la sincronización de la marcha de relojes que se encuentran en distintos puntos A y B sólo se puede resolver por medio de un acuerdo unívoco (determinación) acerca de cuándo pueden considerarse sincronizados estos relojes. Como base para esta determinación tomó Einstein un proceso físico real, la propagación de la luz en el vacío. Además, partió de que la velocidad de la luz en el vacío, en primer lugar, es la velocidad máxima posible de transmisión de señales en la naturaleza, y, en segundo, es igual en todas las direcciones y en todos los sistemas inerciales de referencia.

Supongamos que por el reloj del punto A se envía una señal luminosa desde este punto en el instante t_1 y que, después de reflejarse en B , esta señal retorna a A en el instante t_3 . Entonces, según la determinación, el reloj del punto B estará sincronizado con el del punto A si marchan con la misma rapidez, y en el instante en que llega la señal luminosa al punto B , el reloj establecido en él indicará el tiempo $t_2 = (t_1 + t_3)/2$.

4°. En la teoría especial de la relatividad, la marcha del tiempo en distintos sistemas inerciales de referencia difiere. Respectivamente, el intervalo de tiempo entre dos sucesos determinados cualesquiera es relativo: este intervalo varía al pasar de un sistema de referencia a otro. En particular, es relativa la simultaneidad de dos sucesos que se produzcan en distintos puntos del espacio. Los sucesos simultáneos en un sistema inercial de referencia, en general, no son simultáneos en otros sistemas inerciales de referencia que se mueven con respecto al primero. En unos sistemas de referencia el primero de estos sucesos ocurre antes que el segundo y en otros, después de éste.

Así, en el ejemplo que se muestra en la fig. 1.5.1 (véase 1.5.1.4°), la llegada de destello de luz a los puntos A y B son sucesos simultáneos en el sistema de referencia en reposo K . En el sistema de referencia móvil K' estos sucesos no son simultáneos. Al punto A , que se aleja del foco del destello — punto O' —, la luz llega más tarde que al punto B , que se acerca a O' .

Los sucesos relacionados por nexos de causa-efecto no pueden realizarse simultáneamente en ningún sistema de referencia, ya que todo efecto está condicionado por algún proceso provocado por la causa. Pero ningún proceso (físico, químico, biológico) puede transcurrir instantáneamente. Por lo tanto, la relatividad no contradice en modo alguno la causalidad. En cualquier sistema inercial de referencia el suceso—efecto ocurre más tarde que el suceso que lo causa.

§ 1.5.3. Transformaciones de Lorentz

1°. De los postulados de la teoría especial de la relatividad, así como de la homogeneidad y la isotropía del espacio (1.2.7.1°, 1.4.4.1°) y de la homogeneidad del tiempo (1.3.4.2°) se deduce que las relaciones entre las coordenadas y el tiempo de un mismo suceso en dos sistemas inerciales de referencia se expresan por medio de las *transformaciones de Lorentz* y no por las de Galileo (1.2.8.1°) como se considera en la mecánica clásica (newtoniana.) De acuerdo con el principio de la relatividad y las propiedades antes indicadas de simetría del espacio y del tiempo, las transformaciones de Lorentz deben ser lineales.

2°. Las transformaciones de Lorentz tendrán la forma más simple en el caso en que los ejes homólogos de las coordenadas cartesianas de los sistemas inerciales en reposo (K) y en movimiento (K') sean paralelos dos a dos, y el sistema K' se mueva con respecto al K con velocidad constante V a lo largo del eje OX (fig. 1.2.3, véase 1.2.8.1°). Si además, como punto de referencia del tiempo en ambos sistemas ($t = 0$ y $t' = 0$) se toma el instante en que coinciden los orígenes O y O' de coordenadas, las transformaciones de Lorentz tienen la forma:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z', \\ t' &= \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, & t &= \frac{t' + \frac{Vx'}{c}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \end{aligned}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

3°. Las transformaciones de Lorentz muestran que, al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, varían no sólo las coordenadas espaciales de los sucesos que se consideran, sino también los instantes correspondientes a ellos. Sin embargo, entre las coordenadas espaciales x' , y' , z' de un suceso y el tiempo t' en que se produce en un sistema inercial de referencia K' arbitrario, existe una interrelación determinada, de forma que la magnitud $[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2 (t')^2]$ no depende de la velocidad V del sistema K' , es decir, es igual en todos los

sistemas inerciales de referencia: obtenemos al hacer el paso de K a K'

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2 (t')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

La coordenada x' y el tiempo t' no pueden ser imaginarios. Por lo tanto, de las transformaciones de Lorentz se deduce que la velocidad del movimiento relativo de dos sistemas inerciales de referencia cualesquiera no puede ser mayor que la velocidad de la luz en el vacío ($V \leq c$).

4°. De acuerdo con el principio de la relatividad de Einstein (1.5.1.2°), las leyes físicas deben satisfacer la condición de *invariación relativista* (*invariación de Lorentz*). Esta exigencia significa que las ecuaciones que expresan leyes físicas deben conservar su forma al efectuar el paso de un sistema inercial de referencia a otro de acuerdo con las transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones de Lorentz se convierten en transformaciones de Galileo (1.2.8.1°) cuando $V \ll c$ o, más exactamente, en el límite de $V/c \rightarrow 0$, o sea, cuando $c \rightarrow \infty$. En otras palabras, las transformaciones de Galileo y la mecánica clásica (newtoniana) basada en ellas están construidas suponiendo que las interacciones se propagan instantáneamente. Este enfoque aproximado sólo es permisible cuando se estudian las leyes del movimiento mecánico de los cuerpos con velocidades muchísimo más pequeñas que la de la luz en el vacío.

§ 1.5.4. Relatividad de las longitudes y de los intervalos de tiempo. Intervalo entre dos sucesos

1°. De las transformaciones de Lorentz (1.5.3.2°) se deduce que la dimensión lineal de un cuerpo que se mueve con respecto a un sistema inercial de referencia, disminuye en la dirección del movimiento. Esta variación de la dimensión longitudinal del cuerpo al moverse se llama *contracción de Lorentz*. Supongamos que l_0 es la longitud de una varilla en reposo en el sistema de referencia K' . Si esta varilla está situada a lo largo del eje $O'X'$ (fig. 1.5.2), entonces $l_0 = x'_2 - x'_1$, donde x'_2 y x'_1 son las coordenadas de los extremos de la varilla. La longitud l de esta misma varilla en el sistema de referencia K , respecto del cual se mueve aquélla a lo largo del eje OX con la velocidad V , es igual a la diferencia de los valores de las coordenadas de los

extremos de la varilla medidos en un instante t :

$$l = x_2(t) - x_1(t) = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - V^2/c^2} = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Las dimensiones transversales del cuerpo no dependen de la velocidad de su movimiento y son iguales en todos los sistemas inerciales de referencia:

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1 \text{ y } z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1.$$

Así, pues, las dimensiones lineales del cuerpo son relativas. Estas dimensiones son máximas en el sistema inercial de refe-

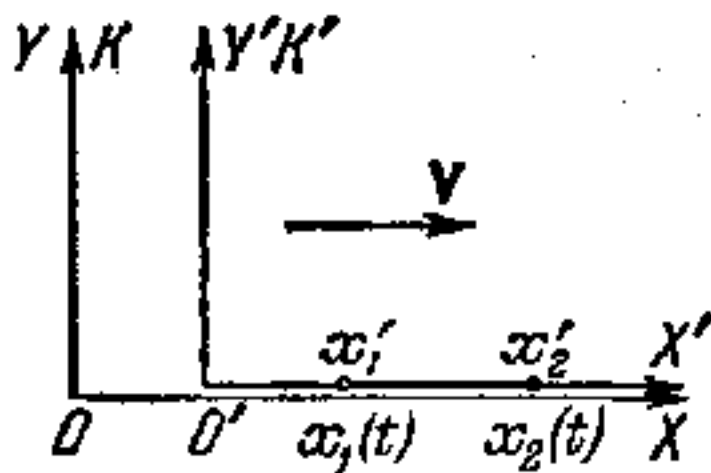


FIG. I.5.2.

rencia respecto del cual el cuerpo está en reposo. A estas últimas se les da el nombre de *dimensiones propias* del cuerpo.

2°. La contracción de Lorentz es un efecto cinemático de la teoría especial de la relatividad. Este efecto no se debe a que sobre el cuerpo en movimiento ejerzan acción algunas fuerzas longitudinales que lo compriman a lo largo de la dirección del movimiento. Esta contrac-

ción sólo se manifiesta sensiblemente a velocidades próximas a la de la luz en el vacío. De la fórmula para la contracción de Lorentz se deduce que los cuerpos no pueden moverse con velocidades $V \geq c$, ya que para $V = c$ la dimensión longitudinal del cuerpo se reduce a cero y para $V > c$ debería hacerse imaginaria.

3°. De la transformación de Lorentz se deduce que en la teoría de la relatividad sólo se puede hablar de un «instante» determinado cuando nos referimos a cualquier sistema inercial de referencia determinado. Así, por ejemplo, a un «instante» en el sistema de referencia K (es decir, a un determinado valor del tiempo t en este sistema) le corresponde un conjunto de valores del tiempo t' en el sistema de referencia K' , en dependencia de los valores de la coordenada x :

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Y viceversa, a un «instante» en el sistema de referencia K' , o sea, a un valor determinado del tiempo t' , le corresponde un conjunto de valores del tiempo t en el sistema de referencia K ,

en dependencia de los valores de la coordenada x' :

$$t = \frac{t' - Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

4°. Otra importante consecuencia de las transformaciones de Lorentz es la relatividad del intervalo de tiempo entre dos sucesos cualesquiera (por ejemplo, entre el principio y el fin de cualquier proceso), es decir, la dependencia de este intervalo respecto del sistema inercial de referencia que se elija. Supongamos que en el sistema inercial de referencia móvil K' ocurren dos sucesos 1 y 2 en un mismo punto A ($x'_2 = x'_1$) en reposo respecto de K' , en los instantes t'_1 y t'_2 , de manera que el intervalo de tiempo entre estos sucesos $\tau_0 = t'_2 - t'_1$.

Con respecto al sistema inercial de referencia en reposo K , el punto A se mueve con la misma velocidad V que el sistema K' . Por esto en K los sucesos 1 y 2 ocurren en puntos distintos del espacio de coordenadas x_1 y x_2 , siendo $x_2 - x_1 = V\tau$, donde $\tau = t_2 - t_1$ es el intervalo de tiempo entre los sucesos 1 y 2 según los relojes del sistema de referencia K . De las transformaciones de Lorentz se deduce que

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

De esta forma, el intervalo del tiempo entre los dos sucesos es mínimo en el sistema inercial de referencia en que ambos sucesos tienen lugar en un mismo punto. El tiempo medido por los relojes que se mueven junto con un objeto dado recibe el nombre de *tiempo propio* de dicho objeto.

5°) La regularidad estudiada en el p. 4° prueba la existencia del efecto relativista de *retardación de la marcha del tiempo* en el sistema inercial de referencia móvil en comparación con el sistema en reposo. Los relojes que se mueven con velocidad V respecto de un sistema inercial de referencia dado van $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ veces más despacio que los que están en reposo. Respectivamente, y de acuerdo con el principio de la relatividad, todos los procesos físicos transcurren más despacio en el sistema de referencia móvil que en el que se encuentra en reposo.

El efecto de retardación de la marcha del tiempo se hace apreciable solamente a velocidades de movimiento V muy grandes, próximas a la de la luz en el vacío. Este efecto se confirma experimentalmente, por ejemplo, en las experiencias con muones (VIII.2.3.3°). El muón es una partícula elemental inestable.

La vida media propia del muón (por los relojes del sistema de referencia respecto del cual está en reposo) es $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Los muones se forman en las capas superiores de la atmósfera por la acción de los rayos cósmicos primarios y se mueven con respecto a la Tierra con velocidades V próximas a c . Si el efecto relativista de retardación de la marcha del tiempo no existiera, con respecto al observador terrestre el muón podría recorrer durante su vida un espacio en la atmósfera no mayor de $\tau_0 c = 660$ m por término medio. En otras palabras, los muones no podrían llegar a la superficie de la Tierra. Pero en realidad son registrados por los aparatos instalados en dicha superficie, ya que la vida media de un muón en movimiento, según el reloj del observador terrestre es $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - V^2/c^2} \gg \tau_0$ y el espacio que recorre el muón durante este tiempo es $\tau V \gg 660$ m.

6°. El efecto relativista de retardación de la marcha del tiempo en una nave cósmica que se mueva con relación a la Tierra, abre la posibilidad de efectuar vuelos cósmicos tan largos como se desee y viajes «al futuro». De acuerdo con el principio de la relatividad, todos los procesos que se desarrollen en la nave, incluso el de envejecimiento de sus tripulantes, se efectuarán según las mismas leyes que en la Tierra. Pero en la nave habrá que medir el tiempo por los relojes de a bordo, es decir, que se mueven con ella a la velocidad V respecto a la Tierra. Si V se aproxima a c , los relojes de la nave irán mucho más despacio que los de la Tierra (que están en el cosmodromo), precisamente $1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ veces. Por ejemplo, si $\beta = V/c = 0,99999$, la marcha de los relojes de la nave y de la Tierra diferirá en 224 veces. Por consiguiente, en dicha nave, durante un intervalo de tiempo de $\tau_0 = 10$ años según los relojes de a bordo, se podrá realizar, envejeciendo solamente en 10 años, un vuelo cósmico que según los relojes de la Tierra durará $\tau = 2240$ años! En estas condiciones la nave se alejará de la Tierra a una distancia enorme, $l = V\tau = \beta c\tau = 2239,98$ años luz*). Cuanto más se aproxime V a c , tanto mayor será el espacio l que pueda recorrer la nave con respecto a la Tierra en el mismo intervalo τ_0 de tiempo propio de la nave, es decir, tanto más lejano podrá ser el vuelo cósmico que realicen los cosmonautas durante su vida.

Si un cosmonauta, después de efectuar un vuelo cósmico a la velocidad V próxima a c , retornara a la Tierra, se encontraría con que en ésta, la gente (y en particular un hermano gemelo

*) Se llama año luz la distancia que recorre la luz en el vacío durante 1 año: 1 año luz = $9,4605 \cdot 10^{15}$ m.

suyo que hubiera permanecido en la Tierra) habría envejecido más que él durante el tiempo del vuelo. En el caso en que la diferencia entre V y c sea bastante pequeña, será $(1 - V^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$, y el cosmonauta podrá sobrevivir a todos sus coetáneos que quedaron en la Tierra y a su regreso a ésta encontrarse en medio de representantes de generaciones posteriores a la suya.

7°. A primera vista parece que, basándose en el principio de la relatividad, se puede llegar a conclusiones opuestas directamente a las que se indican en el p. 6°: los relojes de la Tierra que se mueven con la velocidad $-V$ respecto de la nave cósmica, deben atrasarse con relación a los relojes de esta última. Por lo tanto, la duración del vuelo deberá ser mayor para el cosmonauta, y no para los habitantes de la Tierra. Respectivamente, durante el tiempo del vuelo deberá envejecer más el hermano gemelo que viajó en la nave.

De este modo, resulta que la diferencia de indicaciones de los relojes del cosmodromo y de la nave, después de aterrizar esta última, deberá ser por una parte positiva (véase el p. 6°) y por otra, negativa. A este resultado absurdo se le ha dado el nombre de *paradoja de los relojes* o *paradoja del tiempo*. En realidad no existe tal paradoja. Su planteamiento se debe a la aplicación incorrecta del principio de la relatividad. Este principio no establece la equivalencia de cualesquiera sistemas de referencia, sino únicamente la de los sistemas *inerciales*. El sistema de referencia asociado a la nave cósmica, a diferencia del terrestre, no es siempre inercial, ya que mientras toma velocidad al despegar, durante su vuelo alrededor de un objeto y al decelerar para descender a la Tierra, la nave se mueve con aceleración. Por esto, el problema de la marcha de los relojes del cosmodromo, que están siempre en reposo respecto de un mismo sistema inercial de referencia, y de los relojes que se hallan a bordo de la nave cósmica, no es simétrico en principio, y los sistemas de referencia terrestre y de la nave no son equivalentes en este problema. Los razonamientos correctos son los expuestos en el p. 6°, ya que se basan en la utilización de un sistema de referencia inercial (el terrestre). Respectivamente, los razonamientos que se dan al principio del p. 7°, conducentes a la paradoja de los relojes, son erróneos. En el segundo caso hay que utilizar, no la teoría especial de la relatividad, sino la teoría general. Entonces resulta que también desde el punto de vista del cosmonauta su reloj debe marchar más despacio que los relojes del cosmodromo.

8°. Se llama *intervalo* o *intervalo espacio-tiempo* entre dos sucesos, medido en un sistema inercial de referencia K' , la

magnitud

$$s'_{12} = \sqrt{c^2 (t'_{12})^2 - (l'_{12})^2},$$

en la que $t'_{12} = t'_2 - t'_1$ es el lapso entre los sucesos que se consideran (según los relojes del sistema de referencia K') y $l'_{12} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}$ es la distancia entre los puntos en que se producen los sucesos 1 y 2, medida también en el sistema de referencia K' .

De las transformaciones de Lorentz se deduce que el intervalo entre dos sucesos dados 1 y 2 es invariante respecto del sistema inercial de referencia que se elija, es decir, no varía al pasar del sistema inercial de referencia móvil K' a un sistema en reposo K :

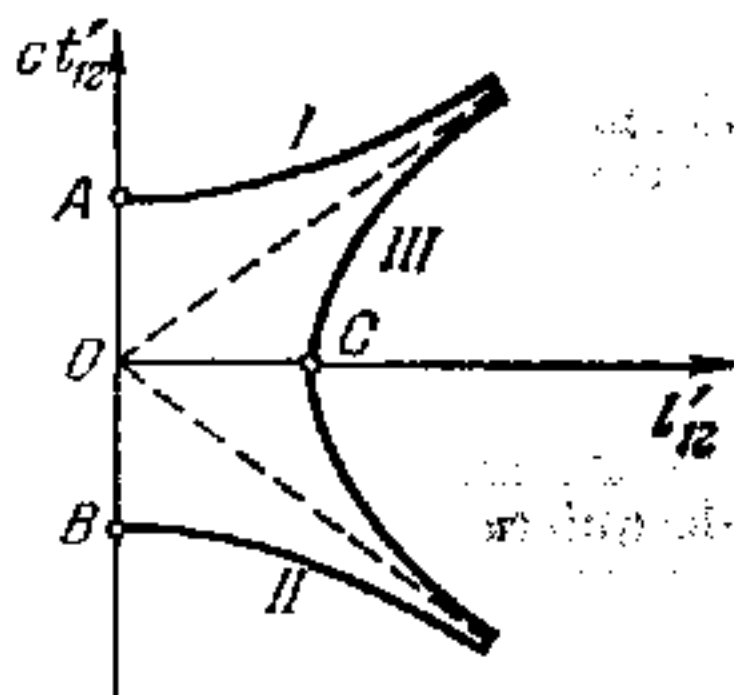


FIG. 1.5.3.

$$s'_{12} = s_{12} = \text{inv}, \text{ donde}$$

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}.$$

Si $s_{12}^2 > 0$, es decir, si s_{12} es un número real, se dice que s_{12} es un *intervalo cuasitemporal*.

Cuando $s_{12}^2 < 0$, o sea, cuando s_{12} es un número imaginario, se dice que s_{12} es un *intervalo cuasiespacial*.

9°. De la invariación del intervalo respecto del sistema inercial de referencia K' que se elija, se deduce que en todos

los sistemas inerciales de referencia K' los valores t'_{12} y l'_{12} , para dos sucesos 1 y 2 dados, satisfacen la ecuación de la hipérbola:

$$c^2 (t'_{12})^2 - (l'_{12})^2 = s_{12}^2.$$

Si $s_{12}^2 > 0$, la relación entre t'_{12} y l'_{12} en diversos sistemas inerciales de referencia K' que se muevan con respecto a un sistema de referencia en reposo K con todas las velocidades posibles ($0 \leq V < c$), se representa gráficamente en forma de dos ramas de hipérbola *I* y *II* (fig. 1.5.3). Por consiguiente, el signo del lapso entre los sucesos 1 y 2, relacionados por el intervalo cuasitemporal, es absoluto. Este signo no depende del sistema de referencia que se elija: en todos los sistemas de referencia K' , el segundo suceso ocurre siempre después que el primero, es decir, $t'_{12} > 0$ (rama *I*) o siempre antes que el primero, o sea, $t'_{12} < 0$ (rama *II*). La distancia l'_{12} , es relativa, pudiéndose indi-

car un sistema inercial de referencia K' tal que en él $t'_{12} = 0$, es decir, los sucesos 1 y 2 se producen en un mismo sitio (puntos A y B en las ramas I y II de la hipérbola).

A dos sucesos relacionados por nexos de causa-efecto debe corresponderles siempre un intervalo cuasitemporal o, en último caso, un intervalo igual a cero ($s_{12} = 0$). Esto se debe a que la señal mediante la cual el suceso 1 (causa) provoca la aparición del suceso 2 (efecto) no se puede propagar en el espacio con velocidad mayor que la de la luz en el vacío: $t'_{12} \leq c(t_2 - t_1)$.

10°. En el caso de sucesos relacionados por un intervalo cuasiespacial ($s_{12}^2 < 0$), el signo de t'_{12} es relativo: $t'_{12} > 0$ (parte superior de la hipérbola III en la fig. 1.5.3) en unos sistemas inerciales de referencia K' , y en otros $t'_{12} < 0$ (parte inferior de la hipérbola III). El punto C corresponde al sistema de referencia K' en que $t'_{12} = 0$, o sea, en que los sucesos 1 y 2 se producen al mismo tiempo.

§ 1.5.5. Transformación de las velocidades y aceleraciones en la cinemática relativista

1°. Los valores \mathbf{v} y \mathbf{v}' de la velocidad de un punto material en dos sistemas inerciales de referencia K y K' son iguales a

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = v'_x \mathbf{i}' + v'_y \mathbf{j}' + v'_z \mathbf{k}'$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$ son los radios vectores del punto considerado, respectivamente, en los sistemas de referencia K y K' . Las proyecciones de las velocidades \mathbf{v} y \mathbf{v}' sobre los ejes de coordenadas cartesianas son

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt};$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Si los ejes homólogos de las coordenadas cartesianas de los sistemas de referencia K' y K son paralelos dos a dos y el sistema K' se mueve con relación al K con la velocidad constante V , dirigida a lo largo del eje OX (fig. 1.2.3, véase 1.2.8.1°), y si en el instante inicial en K y K' ($t = 0$ y $t' = 0$) coinciden los orígenes de coordenadas O y O' de estos sistemas de referencia, entonces son justas las transformaciones de Lorentz en la for-

ma 1.5.3.2°. De estas transformaciones se deduce que la relación entre las proyecciones de las velocidades del punto sobre los ejes de coordenadas cartesianas de los sistemas K y K' tiene la forma

$$\begin{aligned} v_{x'} &= \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, & v_x &= \frac{v_{x'} + V}{1 + \frac{Vv_{x'}}{c^2}}, \\ v_{y'} &= \frac{v_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, & v_y &= \frac{v_{y'} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{Vv_{x'}}{c^2}}, \\ v_{z'} &= \frac{v_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}, & v_z &= \frac{v_{z'} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{Vv_{x'}}{c^2}}. \end{aligned}$$

Estas fórmulas expresan la *ley de la suma (composición) de velocidades de la cinemática relativista*. En el límite, cuando $c \rightarrow \infty$, dichas fórmulas conducen a la ley ordinaria de la suma de velocidades de la mecánica clásica (1.2.8.2°):

$$v_{x'} = v_x - V, \quad v_{y'} = v_y, \quad v_{z'} = v_z \quad \text{y} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

2°. La relación entre los cuadrados de los módulos de los vectores \mathbf{v} y \mathbf{v}' es

$$\begin{aligned} v^2 &= c^2 \left[1 - \frac{[1 - (v'/c)^2] (1 - V^2/c^2)}{\left(1 + \frac{Vv_{x'}}{c^2}\right)^2} \right] \\ (v')^2 &= c^2 \left[1 - \frac{(1 - v^2/c^2) (1 - V^2/c^2)}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^2} \right]. \end{aligned}$$

En particular, si $v' = c$, entonces $v = c$ y viceversa. Así, pues, si la velocidad de una partícula con respecto a cualquier sistema inercial de referencia es igual a la velocidad de la luz en el vacío, dicha velocidad deberá ser igual en magnitud con respecto a cualquier otro sistema inercial de referencia, independientemente de la velocidad del movimiento relativo de estos sistemas de referencia. En otras palabras, la suma de dos velocidades, de las cuales una es igual a c , es siempre igual a c . En esta regularidad, que se pone de manifiesto en el movimien-

to de partículas elementales como los fotones (V.6.1.4°) y el neutrino (tabla VIII.2.1), se revela el carácter de límite que tiene la velocidad de la luz en el vacío (1.5.1.3°).

3°. De las relaciones del p. 2° se desprende que una partícula que se mueva con respecto a cualquier sistema inercial de referencia con velocidad menor que c , con relación a cualquier otro sistema inercial de referencia también tendrá una velocidad menor que c (por ejemplo, si $v < c$, será $v' < c$ y viceversa). De aquí, en particular, se deduce que por muy próximas a c que sean las velocidades de las partículas, su velocidad relativa será siempre menor que c . Por ejemplo, supongamos que dos partículas se mueven a lo largo del eje OX de un sistema de referencia K , al encuentro la una de la otra, con velocidades respectivamente iguales a $v_1 = 0,8ci$ y $v_2 = -0,8ci$. La velocidad u_{21} de la segunda partícula con relación a la primera no será igual, como se considera en la mecánica clásica, a la diferencia geométrica $v_2 - v_1 = -1,6ci$, aunque sea porque el módulo de esta velocidad es mayor que c . La velocidad buscada es igual a la velocidad de la segunda partícula con respecto al sistema inercial de referencia K' que se mueve junto con la primera partícula ($V = 0,8ci$), es decir, $u_{21} = v'_2$.

De las fórmulas del p. 1° se deduce que

$$v'_{2x} = \frac{v_{2x} - V}{1 - \frac{Vv_{2x}}{c^2}} = \frac{1,6c}{1 + 0,64} = -0,976c, \quad v'_{2y} = v'_{2z} = 0,$$

o sea, $u_{21} = -0,976ci'$ y $|u_{21}| < c$.

4°. Las proyecciones de la aceleración de un punto material sobre los ejes de coordenadas cartesianas de dos sistemas de referencia K y K' (p. 1°) están ligadas entre sí por las siguientes relaciones:

$$a'_{x'} = \frac{dv'_{x'}}{dt'} = a_x \left(\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \right)^3,$$

$$a'_{y'} = \frac{dv'_{y'}}{dt'} = \left[\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right) a_y + \frac{Vv_y}{c^2} a_x \right] \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)^3},$$

$$a'_{z'} = \frac{dv'_{z'}}{dt'} = \left[\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right) a_z + \frac{Vv_z}{c^2} a_x \right] \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2} \right)^3}.$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a_{x'} \left(\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{Vv_{x'}}{c^2}} \right)^3,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \left[\left(1 + \frac{Vv_{x'}}{c^2} \right) a_{y'} - \frac{Vv_{y'}}{c^2} a_{x'} \right] \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 + \frac{Vv_{x'}}{c^2} \right)^3},$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \left[\left(1 + \frac{Vv_{x'}}{c^2} \right) a_{z'} - \frac{Vv_{z'}}{c^2} a_{x'} \right] \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 + \frac{Vv_{x'}}{c^2} \right)^3}.$$

§ 1.5.6. Ley fundamental de la dinámica relativista

1º. En la mecánica relativista, a diferencia de la clásica, la masa del punto material no es constante, sino que depende de la velocidad v del mismo. Su valor m es distinto en dos sistemas inerciales de referencia que se mueven el uno con respecto al otro. La dependencia de la masa respecto de la velocidad se expresa por la fórmula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde m_0 es la *masa en reposo* de la partícula (punto material), es decir, su masa medida en el sistema inercial de referencia con respecto al cual la partícula se halla en reposo, y c es la velocidad de la luz en el vacío. La masa m se suele llamar *masa relativista*.

La influencia de la velocidad de la partícula en la magnitud de su masa se hace importante únicamente para valores de v próximos a c . Por ejemplo, $m/m_0 = 1,005$ cuando $v/c = 0,1$, y $m/m_0 = 2,29$ cuando $v/c = 0,9$. De la ley de dependencia de m respecto de v se desprende que las partículas con masa en reposo $m_0 \neq 0$ no pueden moverse con velocidades mayores o iguales que c ($v < c$). Al mismo tiempo, las partículas cuya masa en reposo es nula (fotones (V.6.1.4º) y neutrino (tabla VIII.2.1)), no pueden tener velocidad distinta de c .

2°. El impulso de un punto material $p = mv$ es una función no lineal de su velocidad

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Al vector p se le da a veces el nombre de *impulso relativista* del punto material (para diferenciarlo del valor $m_0 v$ de su impulso en la mecánica clásica). Es evidente que cuando $v \ll c$ el impulso $p = mv \approx m_0 v$.

En virtud de la homogeneidad del espacio (1.2.7.1°), en la mecánica relativista es válida la *ley de conservación del impulso relativista*: el impulso de un sistema cerrado (1.2.2.4°) no varía con el tiempo.

De esta ley se deduce la *ley de conservación de la masa relativista*: cualesquiera que sean los procesos que se desarrollan en un sistema cerrado, su masa relativista total no varía.

3°. *Ley fundamental de la dinámica relativista*: la velocidad con que varía el impulso de un punto material es igual a la fuerza F que actúa sobre dicho punto, es decir,

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad \text{o} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F.$$

Observación. Si sobre el punto material actúan simultáneamente varias fuerzas, deberá entenderse por F la fuerza resultante (1.2.2.2°).

4°. El trabajo elemental de la fuerza F en un desplazamiento pequeño dr de su punto de aplicación,

$$\delta A = (F dr) = (Fv) dt.$$

De la ley fundamental de la dinámica relativista (p. 3°) y de la fórmula de dependencia de la masa respecto de la velocidad (p. 1°) se deduce que

$$F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dm}{dt} = \frac{mv}{c^2 - v^2} \frac{dv}{dt}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \delta A = (Fv) dt &= m (v dv) + v^2 dm = mv dv + v^2 dm = \\ &= c^2 dm. \end{aligned}$$

5°. La aceleración que le imprime al punto material la fuerza F es

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} - \frac{v}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{m} \left[F - \frac{v}{c^2} (Fv) \right].$$

Por consiguiente, a diferencia de la mecánica clásica, en la mecánica relativista la aceleración del punto material, en general, no coincide en dirección con la fuerza que la ocasiona. El vector a y la fuerza F sólo son colineales en los dos casos siguientes:

a) la fuerza F está dirigida perpendicularmente a la velocidad v del punto (fuerza transversal), de manera que $(Fv) = 0$ y

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{m_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

b) la fuerza F está dirigida paralelamente al vector v de la velocidad del punto (fuerza longitudinal), de modo que $v(Fv) = v^2 F$ y

$$a = \frac{F}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{F}{m_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}.$$

La aceleración que la fuerza longitudinal comunica al punto material es $(1 - v^2/c^2)^{-1}$ veces menor que la que le imprimiría una fuerza transversal de la misma magnitud. Esto se debe a que la fuerza transversal hace que varíe la velocidad del punto sólo en dirección (el módulo v de la velocidad y la masa relativista del punto no varían), mientras que la fuerza longitudinal hace que varíe el valor del módulo de la velocidad del punto y su masa.

§ 1.5.7. Ley de la relación entre masa y energía

1°. El incremento de la energía cinética W_c de un punto material es igual al trabajo que realiza la fuerza F que actúa sobre él (1.5.6.4°):

$$dW_c = \delta A = c^2 dm,$$

donde dm es el incremento correspondiente de la masa relativista del punto material. De aquí se deduce que

$$W_c = (m - m_0) c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right],$$

siendo m_0 la masa en reposo del punto. Desarrollando $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ en serie de Maclaurin, obtenemos:

$$W_c = m_0 c^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \dots \right].$$

Cuando $v \ll c$, esta fórmula conduce a la expresión ordinaria para la energía cinética de la mecánica clásica:

$$W_c = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m v^2}{2}.$$

2°. De la primera fórmula del p. 1° se deduce que el aumento de la energía cinética de un cuerpo debe ir acompañado del aumento correspondiente de su masa relativista m :

$$dm = \frac{1}{c^2} dW_c.$$

La variación de las otras formas de la energía del cuerpo también está ligada a un aumento de su masa. Por ejemplo, si al calentar un cuerpo en reposo su energía interna (II.2.1.2°) aumenta en dU , la masa m de este cuerpo, igual a su masa en reposo m_0 , aumentará en

$$dm = dm_0 = \frac{1}{c^2} dU.$$

En el caso general, la variación de la energía total W del cuerpo en dW va acompañada de una variación de su masa relativista m en la magnitud

$$dm = \frac{1}{c^2} dW.$$

Por consiguiente, entre W y m existe una relación universal

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

que expresa la *ley de la relación (equivalencia) entre la masa y la energía*: la energía total de un cuerpo (o sistema) es igual al producto de la masa relativista de este cuerpo (o sistema) por el cuadrado de la velocidad de la luz en el vacío.

En virtud de la homogeneidad del tiempo (I.3.4.2°) en la mecánica relativista, lo mismo que en la clásica, se cumple la

ley de conservación de la energía: la energía total de un sistema cerrado (I.2.2.4°) no varía con el tiempo.

De la ley de la relación entre masa y energía se deduce que las leyes de conservación de la masa relativista (I.5.6.2°) y de la energía total no son leyes independientes.

3°. La energía total de una partícula en reposo o de un sistema de partículas (por ejemplo, un núcleo atómico, un átomo, una molécula o un cuerpo), es igual a

$$W_0 = m_0 c^2,$$

donde m_0 es la masa en reposo, se llama *energía en reposo* de la partícula o sistema. Los valores de m_0 y W_0 no dependen del sistema inercial de referencia que se elija. Para una partícula sin estructura (elemental) estos valores son características invariables de ella, de un modo semejante a como lo son, por ejemplo, la carga eléctrica o el espín de la partícula (tabla VIII.2.1). La masa y la energía de un sistema de partículas depende de la composición del sistema y de su estado intrínseco. Por ejemplo, la masa en reposo de un núcleo (o átomo) «excitado» es mayor que la masa en reposo de ese mismo núcleo (o átomo) en estado normal.

4°. La energía total de una partícula W y su impulso p están ligadas por las relaciones

$$p = \frac{W}{c^2} v \quad \text{y} \quad \frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2 \quad \text{o} \quad W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

Los valores de la energía total, de la masa relativista y del impulso de una partícula dada, a diferencia de su masa en reposo m_0 , son relativos, es decir, distintos en dos sistemas de referencia K (W , m y p) y K' (W' , m' y p'). No obstante, la diferencia entre la energía total de la partícula dividida por c^2 y el cuadrado del impulso de esta partícula, de un modo semejante a como ocurre con el intervalo entre dos sucesos (I.5.4.8°), no depende del sistema inercial de referencia que se elija:

$$\frac{(W')^2}{c^2} - (p')^2 = \frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2.$$

5°. Al pasar de un sistema de referencia K a otro K' que se mueva con la velocidad $V = \text{const}$ a lo largo del eje OX (fig. I.2.3, véase I.2.8.1°), la proyección del impulso de la partícula sobre los ejes de coordenadas y su energía total se trans-

forman como sigue:

$$p_x' = \frac{p_x - \frac{VW}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p_x = \frac{p_x' + \frac{VW'}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$p_y' = p_y,$$

$$p_y = p_y',$$

$$p_z' = p_z,$$

$$p_z = p_z',$$

$$W' = \frac{W - V p_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad W = \frac{W' + V p_x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

6°. De la ley de conservación de la masa relativista (1.5.6.2°) y de la energía total (p. 2°) no se deduce en general que la masa y la energía en reposo de un sistema cerrado no pueda variar. Por ejemplo, la suma de las masas en reposo de los protones y neutrones libres es siempre mayor que la masa en reposo del núcleo atómico formado por ellos.

Para caracterizar los sistemas que poseen margen de estabilidad (por ejemplo, los núcleos atómicos, los átomos, las moléculas, etc.) se introduce el concepto de energía de enlace. La *energía de enlace* de los sistemas se mide por el trabajo mínimo que hay que realizar para descomponer el sistema en sus partes integrantes (por ejemplo, el átomo en el núcleo y los electrones). La energía de enlace de un sistema es

$$W_{\text{enl}} = \sum_{i=1}^n m_{0i} c^2 - M_0 c^2,$$

donde M_0 es la masa en reposo del sistema compuesto por n partículas, y m_{0i} es la masa en reposo de la i -ésima partícula en estado libre. La magnitud

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_{0i} - M_0 = \frac{W_{\text{enl}}}{c^2}$$

se llama a veces *defecto de masa del sistema*.

Capítulo I.6. Gravitación

§ I.6.1. Ley de la gravitación universal

1°. *La ley de la gravitación universal* de I. Newton dice: entre dos puntos materiales cualesquiera actúan fuerzas de atracción mutua, las cuales son directamente proporcionales a las masas de los puntos e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre ellos. Estas fuerzas se llaman *fuerzas de gravitación* o *gravitatorias*. Si m_1 y m_2 son las masas de los puntos materiales considerados y r_1 y r_2 son los radios vectores

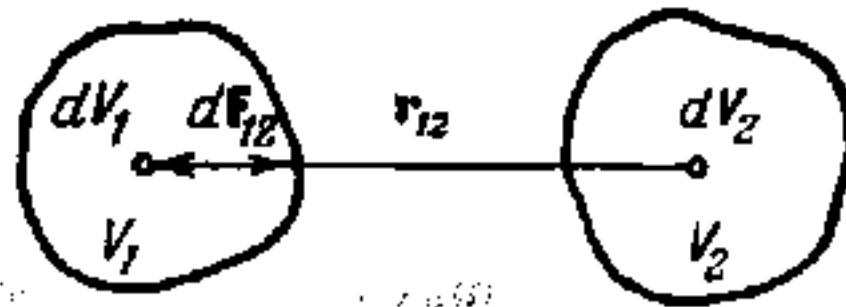


FIG. I.6.1.

de estos puntos, según la ley de la gravitación universal, sobre el punto 1° ejerce el 2° la fuerza F_{12} , y sobre el 2° ejerce el 1° la fuerza F_{21} , que son iguales entre sí por el módulo y tienen sentidos contrarios:

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad \mathbf{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} .$$

Aquí $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ son los radios vectores trazados respectivamente del punto 2° al 1° y del 1° al 2°; y $r_{12} = r_{21} = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_{21}|$ son la distancia entre estos puntos. El coeficiente de proporcionalidad γ se llama *constante de gravitación*. Esta constante es igual numéricamente a la fuerza de atracción mutua de dos puntos materiales de masas iguales a la unidad que se encuentran entre sí a una distancia igual a la unidad. De los experimentos se ha hallado que

$$\gamma = (6,6720 \pm 0,0041) \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2.$$

2°. La interacción gravitatoria de dos cuerpos de dimensiones y formas arbitrarias (fig. I.6.1) se describe por la fórmula

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \int_{(V_1)} \rho_1 dV_1 \int_{(V_2)} \frac{\rho_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} dV_2,$$

en la que r_{12} es el radio vector trazado desde un pequeño elemento de volumen dV_2 del segundo cuerpo a un pequeño elemento de volumen dV_1 del primer cuerpo; ρ_1 y ρ_2 son las densidades de los elementos indicados de los cuerpos, y la integración se extiende a todo el volumen de los dos cuerpos.

El cálculo de la fuerza F_{12} se simplifica considerablemente en los dos casos que siguen:

a) la distribución de las masas en los cuerpos que interactúan es simétricamente esférica, es decir, ambos cuerpos tienen forma esférica y la densidad de cada uno de ellos depende solamente de la distancia hasta su centro (en particular, los cuerpos pueden ser homogéneos);

b) uno de los cuerpos tiene dimensiones insignificantes en comparación con el segundo, en el cual la distribución de las masas es simétricamente esférica.

En estos casos

$$F_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} r_{12},$$

donde m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos, y r_{12} , el radio vector que une los centros de inercia (I.2.3.3°) de los cuerpos segundo y primero.

3°. En primera aproximación se puede considerar que la Tierra tiene forma de esfera cuya masa está distribuida de un modo simétricamente esférico. Por esto la fuerza F de atracción hacia la Tierra de los cuerpos de masa m está dirigida hacia el centro de ésta, y su módulo

$$F = \gamma \frac{m M_T}{r^2},$$

donde M_T es la masa de la Tierra, y r es la distancia del cuerpo al centro de aquélla (las dimensiones de cualquier cuerpo de la Tierra son insignificantes en comparación con el radio de la esfera terrestre).

4°. Con arreglo a microobjetos tales como las partículas elementales, la interacción gravitatoria no desempeña prácticamente ningún papel, ya que resulta ser demasiado débil en comparación con todos los otros tipos de interacciones: fuertes, electromagnéticas y débiles (VIII.2.2.5°). Por ejemplo, la fuerza eléctrica de repulsión mutua de dos electrones es más de 10^{42} veces mayor que la de gravitación. No obstante, incluso para los objetos macroscópicos ordinarios que se hallan en la Tierra, las fuerzas de interacción gravitatoria son extremadamente pequeñas. Así, dos esferas homogéneas de 1000 kg de masa cada una,

cuyos centros se encuentran a 1 m de distancia el uno del otro, se atraen con una fuerza igual solamente a $7 \cdot 10^{-6}$ N.

Pero las fuerzas de gravitación son las determinantes en el movimiento de los objetos que estudia la astronomía y la cosmonáutica (de las naves cósmicas, planetas y sus satélites, sistemas planetarios, estrellas, etc.). Esto se debe, primero, a la enorme magnitud de los cuerpos astronómicos y, segundo, a la pequeñez de las fuerzas de interacción eléctrica de dichos cuerpos, que en su conjunto son en la práctica eléctricamente neutros.

§ 1.6.2. Campo de gravitación

1°. La interacción gravitatoria entre los cuerpos se efectúa por medio del *campo de gravitación* que ellos crean, que también se llama *campo de atracción o newtoniano*. La peculiaridad característica del campo de gravitación consiste en que sobre un punto material que se encuentra en él actúa una fuerza proporcional a la masa del punto.

De característica de la fuerza de un campo de gravitación sirve su *intensidad*, es decir, la magnitud vectorial G , igual a la razón de la fuerza F que ejerce el campo sobre el punto material que se encuentra en él, a la masa m de este punto

$$G = \frac{F}{m}$$

La intensidad de un campo gravitatorio no depende de la masa m del punto material. Esta intensidad es función de las coordenadas (x, y, z) de los puntos del campo considerado. En el caso de un campo no estacionario, la intensidad depende también del tiempo t .

Un campo de gravitación es estacionario (1.2.2.1°) si los cuerpos que lo crean están en reposo con respecto al sistema de referencia elegido para describir el campo. La intensidad de un campo gravitatorio estacionario sólo depende de las coordenadas: $G = G(x, y, z)$.

De la segunda ley de Newton (1.2.4.3°) se deduce que bajo la acción de las fuerzas de un campo gravitatorio, un punto material adquiere la aceleración a , igual a la intensidad de este campo,

$$a = \frac{F}{m} = G.$$

2°. De la ley de la gravitación universal (1.6.1.1°) se infiere que la intensidad del campo gravitatorio de un punto material en reposo, de masa M , que se encuentra en el origen de coordenadas es

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r},$$

donde \mathbf{r} es el radio vector del punto del campo que se considera.

Este es un campo de potencial (1.3.1.6°) puesto que la fuerza que actúa sobre el punto material de masa m que se halla en él es una fuerza central (1.3.3.4°):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Respectivamente, la energía potencial de un punto material en este campo es igual (1.3.3.4°)*) a

$$W_p = \int_r^\infty F_r dr = -\gamma mM \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

La magnitud W_p se puede considerar con igual razón como energía potencial del punto de masa M que se encuentra en el campo de gravitación creado por el punto material de masa m , o, finalmente, como la *energía potencial mutua de dos puntos materiales* condicionada por su interacción gravitatoria.

3°. Los campos de gravitación satisfacen el *principio de superposición de los campos*: cuando se superponen varios (n) campos gravitatorios, sus intensidades en cada punto del espacio se suman geoméricamente, es decir, la intensidad del campo resultante es

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i,$$

donde \mathbf{G}_i es la intensidad de uno de los campos, i -ésimo, en el punto considerado del espacio.

* Aquí y en todas partes en los §§ 1.6.2 y 1.6.3 se toma como punto de referencia de la energía potencial un punto infinitamente alejado, es decir, se considera que $W_p(\infty) = 0$.

La intensidad del campo de gravitación de un sistema arbitrario compuesto por n puntos materiales en reposo es

$$\mathbf{G} = -\gamma \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i^3} \rho_i,$$

siendo $\rho_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ el radio vector trazado del i -ésimo punto material, cuyo radio vector es \mathbf{r}_i , al punto considerado del campo definido por el radio vector \mathbf{r} . Respectivamente, la energía potencial de un punto material de masa m en este campo de gravitación será

$$W_p = -\gamma m \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\rho_i}.$$

En particular, si el campo gravitatorio está creado por un cuerpo cuya masa M está distribuida de forma simétricamente esférica (I.6.1.2°), fuera de este cuerpo

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{y} \quad W_p = -\frac{\gamma m M}{r},$$

donde \mathbf{r} es el radio vector trazado del centro del cuerpo al punto considerado del campo. Estas fórmulas son válidas, por ejemplo, para el campo de gravitación de la Tierra.

4°. En virtud del carácter potencial del campo gravitatorio (I.3.1.6°), se puede introducir su característica energética, o sea, el potencial. Se llama *potencial de un campo gravitatorio* la magnitud escalar φ , igual a la razón de la energía potencial W_p de un punto material situado en el punto considerado del campo, a la masa m de dicho punto:

$$\varphi = \frac{W_p}{m}.$$

El potencial φ no depende de la masa m del punto material, sino que es función de las coordenadas de los puntos del campo gravitatorio. Por ejemplo, el potencial del campo de gravitación creado por un punto material en reposo de masa M es

$$\varphi = -\frac{\gamma M}{r}.$$

en el que r es la distancia del origen del campo al punto considerado.

El potencial del campo de gravitación creado por un sistema arbitrario de n puntos materiales en reposo es

$$\varphi = - \sum_{i=1}^n \gamma \frac{m_i}{\rho_i},$$

donde ρ_i es la distancia del punto material de masa m_i al punto del campo considerado. De este modo, cuando se superponen campos gravitatorios, sus potenciales se suman algebraicamente, es decir, el potencial φ en cualquier punto del campo resultante es igual a la suma algebraica de los potenciales de todos los campos que se superponen en este punto:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Observación. Cuando se utiliza esta fórmula es necesario que los puntos de referencia de los potenciales φ_i de todos los campos que se superponen se elijan igualmente: $\varphi_i(\infty) = 0$ (véase la llamada al p. 2°).

5°. El trabajo elemental que realizan las fuerzas de un campo de gravitación al efectuar el desplazamiento infinitesimal dr de un punto material de masa m en dicho campo es

$$dA = (F dr) = m (G dr).$$

Por otra parte, esta fuerza dA es igual al decremento de la energía potencial del punto material en el campo gravitatorio

$$dA = -dW_p = -md\varphi.$$

Por consiguiente, el potencial y la intensidad de un campo gravitatorio están ligados por la relación

$$d\varphi = -(G dr) = -(G_x dx + G_y dy + G_z dz)$$

en la que G_x , G_y , G_z son las proyecciones del vector G sobre los ejes de coordenadas cartesianas rectangulares. Como

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

tenemos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -G_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -G_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -G_z$$

y

$$\mathbf{G} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\text{grad } \varphi,$$

es decir, la intensidad del campo gravitatorio es igual y de sentido contrario al gradiente del potencial de este campo.

La relación entre φ y G se puede representar también de la forma

$$d\varphi = -G \, dl \cos \alpha = -G_l \, dl \quad \text{o} \quad G_l = -\frac{d\varphi}{dl},$$

en la que α es el ángulo entre los vectores \mathbf{G} y $d\mathbf{r}$; $dl = |d\mathbf{r}|$, y G_l es la proyección del vector \mathbf{G} sobre la dirección del vector $d\mathbf{r}$. Así, pues, la proyección del vector intensidad del campo gravitatorio sobre cualquier dirección es numéricamente igual y de signo contrario a la variación que experimenta el potencial del campo en la unidad de longitud en la misma dirección.

6°. La teoría no relativista de la gravitación expuesta anteriormente y basada en la ley de la gravitación universal de Newton, es aproximada. Describe con suficiente exactitud únicamente los campos gravitatorios relativamente débiles cuyo potencial $|\varphi| \ll c^2$, siendo $c = 3 \cdot 10^8$ m/s la velocidad de la luz en el vacío. En particular, esta teoría es útil para los campos de gravitación de la Tierra y el Sol ya que los valores absolutos de los potenciales de estos campos en la superficie de la Tierra y del Sol, respectivamente, son iguales a $6,3 \cdot 10^7$ m²/s² y a $1,9 \times 10^{11}$ m²/s².

7°. La teoría moderna (relativista) de la gravitación, es decir, la teoría unificada del espacio, el tiempo y la atracción, fue formulada por A. Einstein, quien la denominó *teoría general de la relatividad*. En la teoría especial o restringida de la relatividad se demostró ya la existencia de una relación íntima entre el espacio y el tiempo. Esta relación halló reflejo en las transformaciones de Lorentz (I.5.3.2°) y en la invariación del intervalo entre dos sucesos (I.5.4.8°). Resultó que para describir los procesos físicos es necesario utilizar un continuo espacio—tiempo cuatridimensional, en el cual la posición de un punto se determina por tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal *ct*.

Según la teoría relativista de la gravitación, las propiedades geométricas (métricas) del espacio—tiempo dependen de

la distribución en el espacio de las masas que se atraen y de sus movimientos. Los cuerpos que crean el campo gravitatorio «curvan» el espacio tridimensional real y varían la marcha del tiempo de un modo distinto en diversos puntos, es decir, provocan una desviación de su métrica con respecto a la métrica del espacio—tiempo «plano» que describe la geometría de Euclides y se considera en la teoría especial de la relatividad. Por esto el movimiento de un cuerpo en un campo de gravitación resultó que era posible considerarlo como movimiento por inercia, pero en un continuo espacio—tiempo «curvo» (no euclídeo). Respectivamente, el movimiento, en el espacio tridimensional real, de un punto material sobre el cual actúa un campo gravitatorio no es uniforme ni rectilíneo.

En la teoría relativista de la gravitación se demostró que para los campos gravitatorios arbitrarios no se cumple el principio de la superposición (p. 3°). Este principio, como toda la teoría de la gravitación no relativista, es suficientemente exacto sólo en el caso de campos débiles ($|\varphi| \ll c^2$) y de movimientos con velocidades pequeñas $v \ll c$ en estos campos.

§ 1.6.3. Leyes de Kepler. Velocidades cósmicas

1°. El movimiento de los planetas del sistema solar por sus órbitas alrededor del Sol satisfacen las tres leyes de Kepler. Estas leyes se pueden obtener de la ley de la gravitación universal de Newton, considerando en primera aproximación el Sol y los planetas como puntos materiales. En el campo de fuerzas central de gravitación del Sol, sobre un planeta de masa m actúa la fuerza de atracción

$$F = -\gamma \frac{mM_s}{r^3} \mathbf{r},$$

donde M_s es la masa del Sol y \mathbf{r} el radio vector del planeta, trazado desde el centro de fuerzas O tomado como origen de coordenadas.

El momento de la fuerza F respecto del centro de fuerzas $\mathbf{M} = [\mathbf{r}F] \equiv 0$, de manera que el momento de impulso L del planeta respecto de este mismo punto O no varía con el tiempo (1.4.3.1°):

$$L = [\mathbf{r}m\mathbf{v}] = \text{const.}$$

Por consiguiente, el planeta se mueve por una trayectoria plana (órbita) cuyo plano es perpendicular al vector L . De

acuerdo con (I.1.3.6°) $L = [rmv_\varphi]$, donde v_φ es la velocidad transversal del planeta. Por esto el movimiento orbital del planeta satisface la condición:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{m} = \text{const.},$$

en la que r y φ son las coordenadas polares del planeta.

Una segunda condición viene impuesta por la ley de conservación de la energía mecánica: $W_c + W_p = W = \text{const.}$ De acuerdo con (I.1.3.6°) y (I.6.2.2°),

$$W_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L}{mr} \right)^2 \right]$$

$$W_p = -\gamma \frac{mM_S}{r},$$

de manera que la segunda condición tiene la forma

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L}{mr} \right)^2 - \frac{2\gamma M_S}{r} = \frac{2W}{m}.$$

2°. La ecuación de la trayectoria del planeta (en coordenadas polares r y φ) es

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

en la que $p = \frac{L^2}{\gamma m^2 M_S}$ y $e = \sqrt{\frac{2WL^2}{\gamma^2 m^3 M_S^2} + 1}$. La energía

mecánica total del planeta $W < 0$, por lo que $e < 1$ y la trayectoria tiene la forma de elipse.

Primera ley de Kepler: todos los planetas del sistema solar se mueven por órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.

De la primera condición (p. 1°) se infiere que la velocidad sectorial del planeta (I.1.3.6°) es constante:

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.}$$

Segunda ley de Kepler: en intervalos de tiempo iguales, el radio vector del planeta barre superficies iguales.

3°. De acuerdo con la segunda ley de Kepler, el período T de revolución del planeta alrededor del Sol es igual a la razón del área S de la órbita a la velocidad sectorial del planeta σ :

$$T = \frac{S}{\sigma} = \frac{\pi ab}{\sigma},$$

en la que $a = p/(1 - e^2)$ y $b = a\sqrt{1 - e^2}$ son, respectivamente, los semiejes mayor y menor de la órbita elíptica. Por consiguiente,

$$T^2 = \frac{\pi^2 p}{L^2/4m^2} a^3 = \frac{4\pi^2}{\gamma M_S} a^3.$$

Esta ecuación expresa la *tercera ley de Kepler*: los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas de estos planetas.

4°. Se da el nombre de *primera velocidad cósmica* o *velocidad orbital* a la velocidad mínima que hay que comunicarle a un cuerpo para que pueda convertirse en satélite artificial de la Tierra. Esta velocidad se llama también *circular*, ya que es igual a la velocidad de un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra, en ausencia de la resistencia de la atmósfera, por una órbita circular. La primera velocidad cósmica

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_T}{r}},$$

en la que M_T es la masa de la Tierra y r , el radio de la órbita circular. En la superficie de la Tierra $v_1 = 7,9$ km/s.

5°. La *segunda velocidad cósmica* o *velocidad de escape* es la velocidad mínima que hay que imprimirle a un cuerpo para que éste, sin la acción de cualesquiera otras fuerzas adicionales, pueda vencer la atracción de la Tierra y convertirse en satélite artificial del Sol. Esta velocidad también se denomina *parabólica*, porque corresponde a una trayectoria parabólica del cuerpo en el campo de gravitación de la Tierra (en ausencia de la resistencia de la atmósfera). La segunda velocidad cósmica

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_T}{r}},$$

donde r es la distancia desde el punto de lanzamiento del cuerpo hasta el centro de la Tierra. En la superficie de la Tierra $v_2 = 11,2$ km/s.

6°. Se llama *tercera velocidad cósmica* la menor velocidad que hay que comunicarle a un aparato cósmico, lanzado desde la superficie de la Tierra, para que pueda vencer la atracción del Sol y abandonar el sistema solar. Esta velocidad $v_3 = 16,7$ km/s.

Capítulo I.7. Movimiento en sistemas de referencia no inerciales

§ I.7.1. Cinemática del movimiento relativo

1°. En la mecánica clásica (newtoniana) se considera que las distancias y los intervalos de tiempo no varían al pasar de un sistema de referencia a otro cualquiera que se mueva respecto al primero del modo más arbitrario. Por ejemplo, sea K un

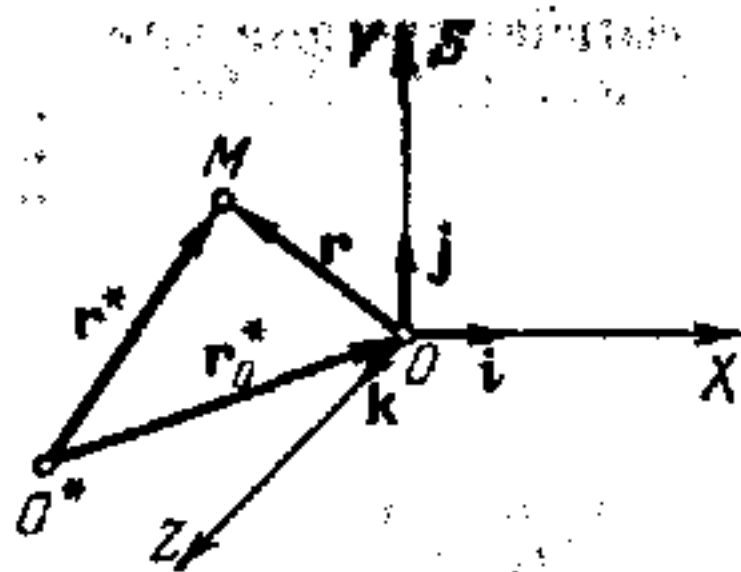


FIG. I.7.1.

sistema inercial de referencia con origen de coordenadas en el punto O^* , y S , un sistema no inercial de referencia con origen de coordenadas en el punto O (fig. I.7.1). En el caso general, el movimiento del sistema de referencia S respecto del K se puede considerar como la suma de dos movimientos, uno de traslación con la velocidad v_0 del punto O , y otro de rotación alrededor de este punto con la velocidad angular Ω .

Los valores r^* y r del radio vector de un punto material arbitrario M , medidos respectivamente en los sistemas de referencia K y S , están ligados por la relación

$$r^* = r_0^* + r,$$

en la que r_0^* es el radio vector del punto O medido en el sistema de referencia K .

2°. El movimiento de un punto material M con respecto a cualquier sistema inercial de referencia K , tomado convencionalmente como si estuviera en reposo, se llama *movimiento absoluto* del punto M . El movimiento de este mismo punto con respecto a un sistema no inercial de referencia S , se llama *movimiento relativo*.

La *velocidad relativa* \mathbf{v}_{rel} del punto M , es decir, su velocidad con relación al sistema de referencia S , es igual a

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k},$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas del punto M , e \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} , los versores de los ejes de coordenadas en el sistema de referencia S .

La *velocidad absoluta* del punto M , o sea, su velocidad con respecto al sistema de referencia K es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \mathbf{v}_0 + x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \mathbf{v}_{\text{rel}},$$

siendo $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0^*/dt$ la velocidad absoluta del punto O . Como quiera que los versores del sistema móvil S pueden variar en el sistema de referencia K solamente como resultado del giro del sistema S alrededor del punto O con la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, tenemos que

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{i}], \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{j}], \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{ar}} + \mathbf{v}_{\text{rel}},$$

en la que $\mathbf{v}_{\text{ar}} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$ es la *velocidad de arrastre* del punto M . Esta velocidad es igual a la velocidad absoluta del punto del sistema de referencia móvil S (es decir, asociado rígidamente con este sistema) en el cual se encuentra en un instante dado el punto material M .

3°. La *aceleración relativa* \mathbf{a}_{rel} del punto M (su aceleración respecto del sistema de referencia S) es:

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}.$$

La *aceleración absoluta* del punto M , o sea, su aceleración con relación al sistema de referencia K es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_{\text{ar}} + \mathbf{a}_{\text{Cor}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}.$$

Aquí

$$a_{ar} = \frac{dv_0}{dt} + \left[\frac{d\Omega}{dt} r \right] + [\Omega [\Omega r]]$$

es la *aceleración de arrastre* del punto M , igual a la aceleración absoluta del punto del sistema de referencia móvil S en que se halla en un instante dado el punto material M ,

$$a_{Cor} = 2 [\Omega v_{rel}]$$

es la *aceleración de Coriolis* del punto M . Esta aceleración es máxima si la velocidad relativa del punto v_{rel} está dirigida perpendicularmente al vector Ω de la velocidad angular de rotación del sistema de referencia móvil. Es nula cuando el ángulo entre los vectores v_{rel} y Ω es igual a 0 , a π , o si por lo menos uno de estos vectores es nulo.

§ 1.7.2. Fuerzas de inercia

1°. En los sistemas no inerciales de referencia no se cumplen las leyes de Newton. En particular, el estado de movimiento de un punto material respecto de un sistema no inercial de referencia S puede variar sin que sobre él ejerzan acción otros cuerpos. Por ejemplo, una bolita colgada de un hilo en el techo del vagón de un tren en movimiento rectilíneo y uniforme, se desviará hacia atrás si el tren acelera su marcha, y hacia adelante, si la reduce, es decir, se pone en movimiento con respecto al sistema no inercial de referencia asociado al vagón. Al ocurrir esto no actúa sobre la bolita ninguna fuerza horizontal.

2°. La ley fundamental de la dinámica del punto material en los sistemas no inerciales de referencia se puede obtener partiendo de la segunda ley de Newton y de la relación entre las aceleraciones absoluta y relativa del punto material. De 1.7.1.3° se deduce que el producto de la masa m del punto material por su aceleración relativa es

$$ma_{rel} = ma - ma_{ar} - ma_{Cor}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, escrita con arreglo al movimiento absoluto de un punto material, es decir, a su movimiento con relación al sistema inercial de referencia K ,

$$ma = F,$$

siendo F la suma geométrica de todas las fuerzas que actúan sobre el punto material. Por consiguiente, la *ecuación fundamen-*

tal de la dinámica del movimiento relativo de un punto material tiene la forma

$$m\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{ar} - m\mathbf{a}_{Cor}.$$

Esta ecuación se puede reducir a una forma análoga a la de la ley fundamental de la dinámica del movimiento absoluto del punto:

$$m\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{F} + \mathbf{I}_{ar} + \mathbf{I}_{Cor}.$$

Las magnitudes vectoriales $\mathbf{I}_{ar} = -m\mathbf{a}_{ar}$ e $\mathbf{I}_{Cor} = -m\mathbf{a}_{Cor}$ tienen dimensión de fuerzas y se llaman, respectivamente, *fuerza inercial de arrastre* y *fuerza inercial de Coriolis*.

3°. De 1.7.1.3° se infiere que, en el caso general, la fuerza inercial de arrastre es igual a la suma de tres términos

$$\mathbf{I}_{ar} = -m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - m \left[\frac{d\Omega}{dt} \mathbf{r} \right] - m [\Omega [\Omega \mathbf{r}]].$$

El último término del segundo miembro de esta expresión,

$$\mathbf{I}_{cf} = -m [\Omega] [\Omega \mathbf{r}],$$

se llama *fuerza inercial centrífuga* o simplemente *fuerza centrífuga*, ya que este vector es perpendicular al eje instantáneo de rotación (vector Ω) del sistema no inercial de referencia S y está dirigido en el sentido que se aleja de él. La fuerza centrífuga es igual numéricamente a

$$I_{cf} = m\Omega^2\rho,$$

donde ρ es la distancia del punto material de masa m al eje instantáneo de rotación del sistema de referencia.

La fuerza inercial de arrastre coincide con la centrífuga si el sistema no inercial de referencia está animado de movimiento de traslación con velocidad constante ($\mathbf{v}_0 = \text{const}$) y gira con velocidad angular también constante ($\Omega = \text{const}$).

4°. La fuerza inercial de Coriolis

$$\mathbf{I}_{Cor} = 2m [\mathbf{v}_{rel}\Omega].$$

Esta fuerza actúa sobre el punto material únicamente cuando el sistema no inercial de referencia gira y el punto material se mueve con respecto a él. Así, por ejemplo, sobre las partículas de agua de los ríos del hemisferio norte que corren en dirección de los meridianos, actúan fuerzas inerciales de Coriolis dirigidas perpendicularmente a la velocidad de la corriente del río y que derrubian la orilla derecha según su curso.

La fuerza inercial de Coriolis no realiza trabajo en el movimiento relativo del punto material, ya que está dirigida perpendicularmente a la velocidad del movimiento relativo del punto. Por consiguiente, la fuerza inercial de Coriolis sirve de ejemplo de las fuerzas giroscópicas (I.3.1.7°).

5°. Las fuerzas de inercia actúan realmente sobre el punto material en el sistema no inercial de referencia y pueden medirse en él, por ejemplo, con un dinamómetro de resorte. Sin embargo, a diferencia de las fuerzas ordinarias de interacción de los cuerpos, para las fuerzas de inercia es imposible indicar a qué cuerpos concretos corresponden las acciones sobre el punto material que ellas expresan. Esta peculiaridad de las fuerzas de inercia se debe a que la misma aparición de las magnitudes vectoriales I_{ar} e I_{Cor} en la ecuación fundamental de la dinámica del movimiento relativo está condicionada únicamente por el carácter no inercial del sistema de referencia que se utiliza para describir el movimiento relativo del punto. La adición a la fuerza F que caracteriza la acción que sobre el punto material ejercen todos los demás cuerpos, de las fuerzas de inercia I_{ar} e I_{Cor} , permite escribir la ecuación fundamental de la dinámica del movimiento relativo en forma parecida a la de la segunda ley de Newton en un sistema inercial de referencia.

En los sistemas no inerciales de referencia no puede haber sistemas cerrados de cuerpos, porque para cualquiera de los cuerpos del sistema las fuerzas de inercia son siempre fuerzas externas. Por esto, en los sistemas no inerciales no se cumplen las leyes de conservación del impulso (I.2.7.1°), del momento de impulso (I.4.4.1°) y de la energía (I.3.4.2°).

§ 1.7.3. Movimiento relativo en un sistema de referencia asociado a la Tierra. Fuerza de gravedad y peso de un cuerpo

1°. Un sistema de referencia asociado a la Tierra no es inercial por dos motivos: primero, a causa de la rotación diaria de la Tierra con una velocidad angular constante Ω ($\Omega = 2\pi \text{rad/día} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$) y, segundo, como consecuencia de la acción que sobre la Tierra ejerce el campo gravitatorio del Sol, la Luna, los planetas y los demás cuerpos astronómicos. Este campo de gravitación es prácticamente homogéneo dentro de los límites de la esfera terrestre y le imprime al sistema de referencia y a todos los cuerpos que se mueven con relación a él una

misma aceleración del movimiento de traslación, $a_0 = dv_0/dt = G$, en la que G es la intensidad del campo (1.6.2.1°).

De las relaciones 1.7.2.2° y 1.7.2.3° se desprende que la ecuación del movimiento relativo de un punto material de masa m en un sistema de referencia asociado a la Tierra tiene la forma

$$ma_{\text{rel}} = \mathbf{F} + I_{\text{grav}} + I_{\text{cf}} + I_{\text{Cor}},$$

donde I_{cf} e I_{Cor} son, respectivamente, las fuerzas inerciales centrífuga y de Coriolis; F_{grav} , la fuerza con que la Tierra atrae al punto material (1.6.1.3°); y \mathbf{F} , la suma de todas las demás fuerzas que actúan sobre dicho punto, excepto las de gravitación.

2°. Se llama *fuerza de gravedad*, o simplemente *gravedad de un cuerpo*, la fuerza \mathbf{P} aplicada al cuerpo e igual a la suma geométrica de la fuerza de gravitación F_{grav} que sobre el cuerpo ejerce la Tierra (1.6.1.3°) y de la fuerza inercial centrífuga I_{cf} debida a la rotación diaria de ésta (fig. 1.7.2):

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_{\text{grav}} + I_{\text{cf}},$$

es decir,

$$\mathbf{P} = -\gamma \frac{mM_T}{r^3} \mathbf{r} - m [\boldsymbol{\Omega} [\boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}]].$$

Aquí, m y M_T son las masas del cuerpo y de la Tierra; \mathbf{r} , el radio vector trazado del centro de la Tierra al punto en que se encuentra el cuerpo; $\boldsymbol{\Omega}$, la velocidad angular de la rotación diaria de la Tierra, y γ , la constante de gravitación (1.6.1.1°).

La gravedad \mathbf{P} hace que caigan sobre la Tierra los cuerpos no sujetos y es igual a la fuerza con que el cuerpo, en reposo con relación a la Tierra, presiona sobre su apoyo horizontal (o actúa sobre la suspensión vertical) a causa de su atracción hacia la Tierra. Esta fuerza se puede medir en el sistema de referencia terrestre mediante, por ejemplo, un dinamómetro de resorte. El punto de aplicación de la fuerza de gravedad de un cuerpo, o sea, el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de gravedad de todas las partículas del cuerpo, se llama *centro de gravedad del cuerpo*. El centro de gravedad de un cuerpo coincide con su centro de inercia (1.2.3.3°).

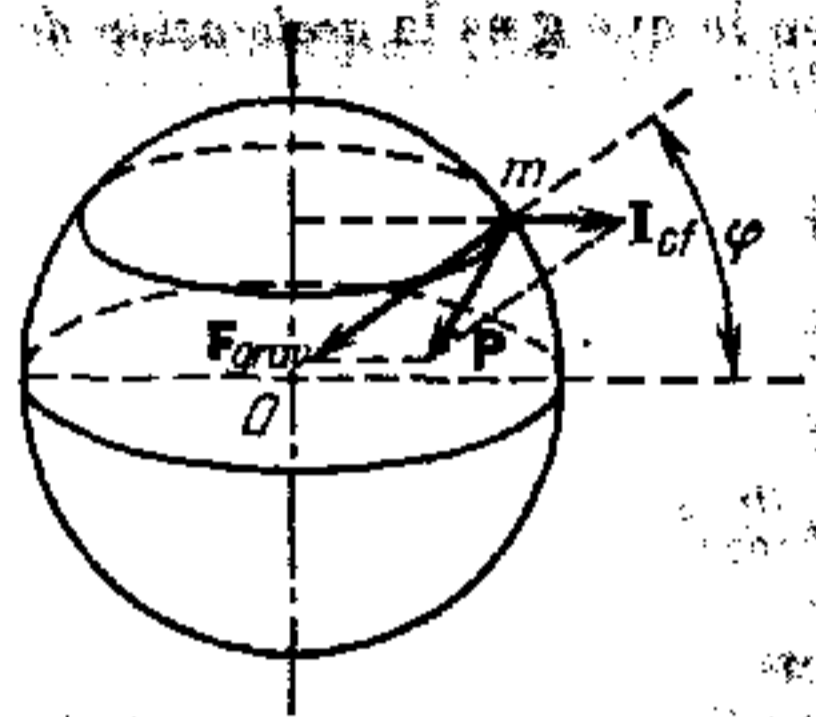


FIG. 1.7.2.

3°. La gravedad de un cuerpo no depende de la velocidad de su movimiento relativo. Esta fuerza es proporcional a la masa m del cuerpo y se puede representar de la forma

$$P = mg,$$

en la que g es la *aceleración de la gravedad* o *aceleración de caída libre* (véase el p. 5°). En un punto dado de la Tierra el vector g es igual para todos los cuerpos y varía cuando cambia dicho punto.

La gravedad de un cuerpo coincide con la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre él únicamente en los polos de esta última, porque en ellos la fuerza inercial centrífuga $I_{cf} = 0$. La mayor diferencia entre la gravedad de un cuerpo y la fuerza con que lo atrae la Tierra se observa en el ecuador, donde la fuerza I_{cf} alcanza su valor máximo y está dirigida en sentido contrario al de la fuerza F_{grav} . Pero incluso en el ecuador, la gravedad difiere de la fuerza de gravitación nada más que en un 0,35%. En todos los puntos de la superficie de la Tierra, excepto en los polos y el ecuador, las fuerzas P y F_{grav} no coinciden tampoco en dirección (fig. 1.7.2), pero el ángulo máximo entre ellas no supera 6'. La gravedad disminuye con la altura. Cerca de la superficie de la Tierra esta disminución es aproximadamente del 0,034% por cada kilómetro de elevación.

4°. La aceleración de la gravedad g cerca de la superficie de la Tierra varía desde el valor $9,78 \text{ m/s}^2$ en el ecuador, hasta $9,83 \text{ m/s}^2$ en los polos. Esto se debe, primero, a la dependencia de la fuerza inercial centrífuga respecto de la latitud geográfica del lugar y, segundo, a que la Tierra no es esférica, sino que está ligeramente achatada a lo largo del eje de rotación y tiene forma de elipsoide de revolución (los radios polar y ecuatorial de la Tierra son, respectivamente, iguales a $R_{pol} = 6357 \text{ km}$ y $R_{ec} = 6378 \text{ km}$). El *valor normalizado de la aceleración de caída libre* adoptado en la construcción de los sistemas de unidades y para los cálculos barométricos es igual a $9,80665 \text{ m/s}^2$.

5°. Se llama *caída libre de un cuerpo* el movimiento que dicho cuerpo efectúa bajo la acción única del campo de la gravedad.

La aceleración de un cuerpo que cae libremente sobre la Tierra, registrada en un sistema no inercial de referencia que gira con la Tierra, se puede hallar partiendo de la ecuación del movimiento (1.7.3.1°), haciendo en ella $F = 0$; $F_{grav} + I_{cf} = mg$ e $I_{Cor} = 2m [v_{rel}\Omega]$:

$$a_{rel} = g + 2 [v_{rel}\Omega].$$

Si $v_{rel} = 0$, entonces $a_{rel} = g$.

Por consiguiente, el vector g es igual a la aceleración del cuerpo en caída libre medida, con respecto al sistema de referencia terrestre, en el instante en que la velocidad relativa del cuerpo es nula. Por esta razón el vector g se llama también *aceleración de caída libre*.

Si la velocidad relativa del cuerpo en caída libre $v_{rel} \neq 0$, su aceleración con respecto a la Tierra no es igual a g : $g = a_{rel} + 2[\Omega v_{rel}]$. Pero cuando las velocidades $v_{rel} < 680$ m/s, los valores de g y a_{rel} difieren en menos del 1%. Por esto en muchos casos se puede considerar que, para un observador que se encuentra en la Tierra, la caída libre del cuerpo se produce únicamente a expensas de la gravedad del mismo, que le imprime la aceleración g . Respectivamente, la acción que sobre el cuerpo que cae ejerce la fuerza inercial de Coriolis se puede considerar como una perturbación relativamente pequeña. Así, por ejemplo, bajo la acción de la fuerza de Coriolis, el cuerpo en caída libre se desvía hacia oriente respecto de la dirección de la plomada, es decir, respecto del vector $P = mg$. Esta desviación s para un cuerpo que caiga libremente, sin velocidad inicial, desde una altura h en la latitud φ , es

$$s = \frac{2}{3} \Omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos \varphi.$$

Por ejemplo, si $h = 160$ m y $\varphi = 45^\circ$, entonces $s = 1,55$ cm.

6°. Se da el nombre de *peso de un cuerpo* a la fuerza Q que éste, a causa de la gravitación de la Tierra, ejerce sobre el apoyo o suspensión que impide su caída libre. Se supone que tanto el cuerpo como el apoyo (o la suspensión) están en reposo respecto del sistema de referencia en que se determina el peso del cuerpo. Por parte del apoyo o de la suspensión actúa sobre el cuerpo la fuerza $-Q$. De la ecuación fundamental de la dinámica del movimiento relativo (1.7.2.2°), donde $a_{rel} = a_{Cor} = 0$ y $F = F_{grav} - Q$, se deduce que

$$Q = F_{grav} + I_{ar}.$$

Aquí F_{grav} es la atracción gravitatoria de la Tierra, e I_{ar} la fuerza inercial de arrastre debida al carácter no inercial del sistema de referencia.

Ejemplo 1. El peso de un cuerpo en el sistema de referencia asociado a la Tierra es igual a la gravedad del cuerpo (p. 2°):

$$Q = F_{grav} + I_{cf} = P.$$

Ejemplo 2°. El peso de un cuerpo en un sistema de referencia asociado a un ascensor animado de movimiento de traslación con la aceleración a_0 respecto a la Tierra, es

$$Q = P - ma_0.$$

Si el ascensor cae libremente, $a_0 = g$ es la aceleración de caída libre y el peso del cuerpo en el ascensor $Q = 0$, es decir, el cuerpo se halla en estado de ingravidez.

7°. Se llama *ingravidez* el estado de un sistema mecánico en el cual el campo de gravitación que actúa sobre él no hace que se produzca presión mutua entre las partes del sistema ni que se deforme. Este estado se efectúa en el sistema mecánico que satisface las tres condiciones siguientes: a) sobre el sistema no actúan más fuerzas externas que las del campo gravitatorio; b) las dimensiones del sistema son tales, que dentro de sus límites el campo gravitatorio externo se puede considerar homogéneo; c) el sistema está animado de movimiento de traslación. El estado de ingravidez es característico, por ejemplo, de los cuerpos que se encuentran en una nave cósmica, ya que durante la mayor parte de la trayectoria en el campo de gravitación no funcionan los motores de la nave.

§ 1.7.4. Principio de la equivalencia

1°. Las fuerzas de inercia que actúan sobre los cuerpos en un sistema no inercial de referencia son proporcionales a las masas de éstos y, a igualdad de las demás condiciones, le comunican a dichos cuerpos iguales aceleraciones relativas (I.7.1.3°). En otras palabras, todos los cuerpos libres de influencias externas se mueven en el «campo de las fuerzas inerciales», es decir, respecto del sistema no inercial de referencia, exactamente lo mismo, siempre que las condiciones iniciales de sus movimientos sean también iguales. Una regularidad semejante se observa cuando se mueven con relación a sistemas inerciales de referencia cuerpos que se encuentran bajo la acción de las fuerzas de un campo gravitatorio. En cada punto del campo estas fuerzas, a semejanza de las fuerzas de inercia, son proporcionales a las masas de los cuerpos y les imprimen a todos ellos las mismas aceleraciones de caída libre, iguales a la intensidad del campo en el punto de éste que se considera (I.6.2.1°).

Por ejemplo, en el sistema no inercial de referencia asociado a un ascensor animado de movimiento uniformemente acelerado, vertical hacia arriba, con la aceleración de arrastre $a_0 = \text{const}$, todos los cuerpos libres caen, en ausencia del campo de gravitación, con la misma aceleración relativa $a_{\text{rel}} = -a_0$. Exactamente igual se comportan los cuerpos libres en el mismo ascensor cuando se mueve uniformemente en un campo de gravitación homogéneo de intensidad $G = -a_0$. De este modo, basándose en los experimentos de caída libre de los cuerpos dentro de un ascensor herméticamente cerrado, es imposible determinar si dicho ascensor está animado de movimiento uniforme en un campo de gravitación de intensidad $G = a_{\text{rel}}$ (en particular, el ascensor también puede estar en reposo en este campo) o si se mueve con aceleración de arrastre constante $a_{\text{ar}} = -a_{\text{rel}}$ en ausencia del campo de gravitación.

2°. *Principio local de la equivalencia*: el campo de gravitación en una región limitada del espacio es físicamente equivalente a un «campo de fuerzas de inercia» en un sistema no inercial de referencia debidamente elegido. La región del espacio debe ser tan pequeña, que en ella pueda considerarse homogéneo el campo gravitatorio.

El principio de equivalencia no debe entenderse como la afirmación de la identidad de las fuerzas de inercia y las fuerzas de atracción de Newton entre los cuerpos. En efecto, la intensidad del campo de gravitación verdadero creado por los cuerpos disminuye a medida que nos alejamos de ellos y se anula en el infinito. Los campos de gravitación «equivalentes» a las fuerzas de inercia no satisfacen esta condición. Por ejemplo, la intensidad del campo de gravitación «equivalente» a las fuerzas inerciales centrífugas de un sistema de referencia giratorio, aumentan ilimitadamente a medida que nos alejamos del eje de rotación. La intensidad del campo «equivalente» a las fuerzas inerciales de arrastre en un sistema de referencia animado de movimiento de traslación, es igual en todas partes.

3°. Un campo de gravitación verdadero, a diferencia del «equivalente» a las fuerzas de inercia, existe tanto en los sistemas de referencia no inerciales como en los inerciales. Cualquiera que sea el sistema no inercial de referencia que se elija, es imposible excluir totalmente el campo de gravitación real, es decir, compensarlo en todo el espacio con el «campo de las fuerzas de inercia». Esto se deduce por lo menos del distinto comportamiento de los «campos de fuerzas de inercia» y de los verdaderos campos de gravitación en el infinito. La exclusión de un campo

gravitatorio sólo se puede efectuar localmente, es decir, para una pequeña región del espacio dentro de cuyos límites este campo se pueda considerar homogéneo y para un intervalo de tiempo durante el cual el campo se pueda considerar constante. El sistema no inercial de referencia correspondiente a esta operación debe moverse con aceleración de arrastre igual a la aceleración de caída libre de los cuerpos en la región considerada del campo de gravitación verdadero. Así, en una nave cósmica que efectúe un vuelo libre en un campo gravitatorio, las fuerzas de atracción se compensarán con las fuerzas inerciales de arrastre y no producirán movimiento relativo de los cuerpos que hay en ella.

II parte. **FUNDAMENTOS DE LA FÍSICA MOLECULAR Y DE LA TERMODINÁMICA**

Capítulo II.1. **Gases perfectos**

§ II.1.1. Objeto de la física molecular. Movimiento térmico

1°. En la parte de la física llamada *física molecular* se estudian las dependencias de la estructura y de las propiedades físicas de los cuerpos respecto del carácter del movimiento y de la interacción entre las partículas de que están compuestos.

La física molecular se basa en la *teoría cinético-molecular* de la estructura de la materia. Según esta teoría, todos los cuerpos están formados por partículas pequeñísimas —átomos, moléculas o iones— que se encuentran en continuo movimiento caótico, llamado *movimiento térmico*. Son confirmaciones experimentales de la teoría cinético-molecular el movimiento browniano (II.4.7.1°), los fenómenos de transporte en los diversos estados de agregación de la sustancia y otros fenómenos.

2°. La teoría cinético-molecular de la estructura de la sustancia se utiliza eficazmente en diversas partes de la física. En esta teoría se consideran, desde un punto de vista único, distintos fenómenos físicos cuyo desarrollo depende de la interacción y del movimiento de las partículas de la sustancia. Por ejemplo, esta teoría permite comprender el mecanismo de las propiedades elásticas de los sólidos (VII.1.3.1°), pone de manifiesto la causa del rozamiento interno en los gases (II.3.8.4°) y en los líquidos y explica la diferencia entre los gases reales (II.5.1.2°) y el gas perfecto (II.1.4.1°).

Basándose en la teoría cinético-molecular de la estructura de la sustancia se explica el mecanismo de la conductibilidad eléctrica de los conductores de corriente eléctrica distintos por su naturaleza, y las propiedades eléctricas y magnéticas de las sustancias.

3°. El movimiento térmico de las partículas de una sustancia en diferentes estados de agregación no es el mismo. Este

movimiento depende de las fuerzas de atracción y de repulsión que actúan entre los átomos, las moléculas y los iones.

Entre los átomos y las moléculas de los gases suficientemente enrarecidos no existen prácticamente fuerzas de atracción. Esto se debe a que las partículas de estos gases se encuentran entre sí a distancias mayores que el radio de acción molecular (II.5.2.3°). Las partículas de estos gases están animadas de movimiento uniforme y rectilíneo hasta que chocan entre sí o con las paredes del recipiente. Estos choques tienen carácter casual. Cada molécula puede, dentro del volumen del gas, experimentar colisiones con cualquiera de las partículas más próximas a ella y cambiar arbitrariamente la dirección de su movimiento. La colisión de una molécula (átomo) del gas con la pared del recipiente puede ocurrir bajo cualquier ángulo, ϑ ($-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$). Como resultado, el movimiento de las moléculas de los gases es desordenado y, por término medio, en cualquier dirección arbitraria dentro del gas y en cualquier instante, se mueve el mismo número de moléculas.

4°. Los sólidos cristalinos se caracterizan porque en ellos las fuerzas de interacción entre las partículas (átomos, moléculas, iones) son grandes. La acción conjunta de las fuerzas de atracción y repulsión entre éstas (II.5.1.3°) hace que las partículas de los sólidos oscilen en torno a sus posiciones medias de equilibrio, llamadas *nudos de la red cristalina* (VII.1.1.1°). La acción mutua entre las moléculas y la infracción de la periodicidad en los cristales (VII.1.1.1°) determinan que estas oscilaciones sean inarmónicas (IV.1.1.3°).

5°. El movimiento térmico de las moléculas de un líquido tiene carácter intermedio entre las dos formas anteriores de movimiento (véanse los pp. 3° y 4°). La molécula del líquido oscila durante cierto tiempo en torno a una posición de equilibrio determinada y se halla en estado sedentario. Al cabo de algún tiempo la posición de equilibrio de la molécula se desplaza y se origina un nuevo estado sedentario. Al mismo tiempo se produce el desplazamiento lento de todas las moléculas y sus oscilaciones dentro de volúmenes pequeños. Véase también II.6.2.3°.

§ II.1.2. Métodos estadístico y termodinámico de investigación

1°. El número de átomos (moléculas) que hay en un cuerpo cualquiera es enorme. Por ejemplo, en 1 cm^3 de un gas de propiedades próximas al perfecto, en condiciones normales, hay

$2,7 \cdot 10^{19}$ moléculas. En los estados condensados —sólido y líquido— este número es del orden de 10^{22} partículas/cm³. Si se considera que el movimiento de cada átomo (molécula) de una sustancia cumple la segunda ley de Newton (I.2.4.1°), es imposible hablar no sólo de resolver las ecuaciones diferenciales del movimiento de las partículas de la sustancia por separado, sino incluso de escribir estas ecuaciones. Por esto, el comportamiento de una molécula (átomo) de la sustancia aisladamente, por ejemplo, su trayectoria o la sucesión de las variaciones de su estado, no puede ser estudiado por los métodos de la mecánica clásica.

2°. Las propiedades macroscópicas de los sistemas compuestos por un número muy grande de partículas se estudian por el *método estadístico*. Este método se basa en la utilización de la teoría de probabilidades y de determinados modelos de estructura de los sistemas que se estudian. La parte de la física teórica en que las propiedades físicas de los sistemas se estudian valiéndose del método estadístico se llama *física estadística* (o *estadística física*). En el comportamiento conjunto de un gran número de partículas se ponen de manifiesto regularidades especiales llamadas *leyes estadísticas*. En un sistema compuesto por un gran número de partículas existen ciertos *valores medios de las magnitudes físicas* que caracterizan todo el conjunto de las partículas. Así, en un gas existen valores medios de las velocidades del movimiento térmico de las moléculas (II.3.3.6°) y de sus energías (II.3.2.4°). En un sólido existe una energía media correspondiente a cada grado de libertad del movimiento oscilatorio de las partículas (VII.2.7.2°), etc. Todas las propiedades de un sistema de partículas están condicionadas no sólo por las propiedades individuales de las mismas partículas, sino también por las peculiaridades de sus movimientos conjuntos y de los valores medios de las características mecánicas de las partículas (velocidades medias, energías medias, etc.).

Aparte de las leyes estadísticas existen las *leyes dinámicas* que definen los movimientos de las partículas aisladas. La ligazón entre las leyes dinámicas y estadísticas se manifiesta en que las leyes del movimiento de las partículas aisladas influye en la descripción de las propiedades del sistema de partículas estudiado por el método estadístico.

3°. Además del método estadístico de investigación de los fenómenos físicos existe el *método termodinámico*, en el cual no se tiene en cuenta la estructura interna de las sustancias de los cuerpos (sistemas) que se estudian ni el carácter del movimiento de las partículas aisladas. El método termodinámico se basa en

el estudio de las distintas transformaciones de la energía que se producen en el sistema. Las condiciones de estas transformaciones y las relaciones entre las distintas formas de la energía permiten estudiar las propiedades físicas de los sistemas que se investigan durante los procesos más diversos en que dichos sistemas participan. La parte de la física en que las propiedades físicas de los sistemas se estudian por medio del método termodinámico se llama *termodinámica (termodinámica fenomenológica)*. La termodinámica se funda en las dos leyes (principios) de la termodinámica (II.2.3.1°, II.4.3.2°) establecidas experimentalmente, y en el teorema del calor de Nernst o tercer principio de la termodinámica (II.4.8.2°).

§ II.1.3. Parámetros termodinámicos. Ecuaciones de estado. Procesos termodinámicos

1°. En la termodinámica se estudian los *sistemas termodinámicos*, o sea, los objetos macroscópicos (cuerpos y campos) que pueden intercambiar energía tanto entre sí como con el medio exterior, es decir, con los cuerpos y campos externos respecto al sistema dado.

2°. Para describir el estado de un sistema termodinámico se introducen las magnitudes físicas llamadas *parámetros termodinámicos* o *parámetros de estado* del sistema. Por lo general, como parámetros termodinámicos se eligen la presión, el volumen específico y la temperatura.

Se llama *presión* p la magnitud física numéricamente igual a la fuerza que actúa sobre la unidad de área de la superficie de un cuerpo según la dirección de la normal a esta superficie:

$$p = \frac{dF_n}{dS},$$

donde dF_n es el valor numérico de la fuerza normal que actúa sobre una porción infinitesimal de superficie del cuerpo cuya área sea dS .

Se da el nombre de *volumen específico* v a la magnitud inversa a la densidad ρ del cuerpo: $v = 1/\rho$. Para un cuerpo homogéneo el volumen específico es igual al volumen de dicho cuerpo cuya masa es igual a la unidad.

3°. El concepto de temperatura tiene sentido para los estados de equilibrio de un sistema termodinámico (p. 4°). Recibe el nombre de *estado de equilibrio (estado de equilibrio termodinámico)*.

mico) el estado del sistema que no varía con el tiempo (*estado estacionario*), no dependiendo el carácter estacionario del estado de los procesos que tienen lugar en el medio exterior. El estado de equilibrio se establece en el sistema cuando las condiciones extremas son constantes, y se mantiene en él durante un tiempo arbitrariamente largo. En todas las partes del sistema termodinámico que se encuentra en estado de equilibrio termodinámico, la temperatura es la misma. Si se ponen en contacto dos cuerpos a temperatura distinta, el intercambio de calor hace que se transmita energía interna (II.2.1.2°) del cuerpo con temperatura más alta al cuerpo con temperatura más baja. Este proceso cesa cuando se iguala la temperatura en ambos cuerpos.

4°. La temperatura de un sistema en equilibrio es la medida de la intensidad del movimiento térmico de sus moléculas (átomos, iones). Para un sistema en equilibrio de partículas que cumplen las leyes de la física estadística clásica (p. 2°), la energía cinética media del movimiento térmico de las partículas es directamente proporcional a la temperatura absoluta del sistema (II.3.2.4°).

La temperatura sólo se puede medir indirectamente, basándose en que toda una serie de propiedades físicas de los cuerpos, que pueden medirse directa o indirectamente, dependen de la temperatura. Así, cuando varía la temperatura de un cuerpo varían también su longitud, volumen, densidad, resistencia eléctrica, propiedades elásticas, etc. La variación de cualquiera de estas propiedades puede servir de base para medir la temperatura. Para esto es necesario que sea conocida la dependencia funcional de la propiedad dada de un cuerpo, llamado *termométrico*, respecto de la temperatura. Las escalas de temperatura que se establecen por medio de los cuerpos termométricos se llaman *empíricas*.

En la *escala centígrada internacional* la temperatura se mide en °C y se designa por t (grado centígrado o grado Celsius). Se considera que a la presión normal de $1,01325 \cdot 10^5$ Pa (IX), la temperatura de fusión del hielo es igual a 0° C y la de ebullición del agua, a 100° C.

En la *escala termodinámica de temperaturas*, la temperatura se mide en kelvines (K) y se designa por T .

La relación entre la *temperatura absoluta* T y la *temperatura centígrada* es: $T = 273,15 + t$.

La temperatura $T = 0$ ($t = -273,15^\circ\text{C}$) se llama *cero absoluto de temperatura*. De la imposibilidad de alcanzar este *cero absoluto* se trata en (II.4.8.4°).

5°. Los parámetros del estado de un sistema se dividen en externos e internos. Se llaman *parámetros externos de un sistema* las magnitudes físicas que dependen de la posición en el espacio y de distintas propiedades de los cuerpos externos con respecto al sistema dado. Por ejemplo, para un gas, el volumen (capacidad) V del recipiente que lo contiene es un parámetro externo, ya que depende de la posición de los cuerpos externos, o sea, de las paredes del recipiente. Para un dieléctrico situado en un campo eléctrico, será un parámetro externo la intensidad de este campo, creado por determinadas fuentes externas. Un parámetro externo de un líquido que se encuentra en un recipiente abierto es, por ejemplo, la presión atmosférica.

Se llaman *parámetros internos de un sistema* las magnitudes físicas que dependen tanto de la posición de los cuerpos externos con respecto al sistema, como de las coordenadas y de las velocidades de las partículas que forman el sistema dado. Por ejemplo, son parámetros internos de un gas su presión y energía, puesto que dependen de las coordenadas y velocidades de sus moléculas en movimiento y de la densidad del gas.

6°. Los parámetros termodinámicos de un sistema en estado de equilibrio (p. 3°) no son independientes. Los parámetros internos de este sistema dependen únicamente de sus parámetros externos y de la temperatura. El estado de equilibrio de un sistema simple*) de composición química dada y masa M se determina dando dos parámetros: el volumen V y la temperatura T .

Se da el nombre de *ecuación de estado (ecuación térmica de estado)* de un sistema simple, a la dependencia funcional de la presión p en equilibrio del sistema respecto del volumen y la temperatura:

$$p = f(V, T).$$

En termodinámica la ecuación de estado se obtiene experimentalmente. En la física estadística (II.1.2.2°) la ecuación de estado se deduce teóricamente. En esto consiste la interrelación del método estadístico de investigación (II.1.2.2°) con el termodinámico (II.1.2.3°).

7°. Si cualquiera de los parámetros externos de un sistema varía, se produce una variación del estado termodinámico del

*) Ejemplo de sistemas simples es un gas en ausencia de campos externos. Son también sistemas simples las mezclas químicamente homogéneas de gases de composición constante, los líquidos químicamente puros, etc.

sistema que se llama *transformación (proceso) termodinámica*. Una transformación termodinámica se dice que se desarrolla en equilibrio (*proceso cuasiestático en equilibrio*) si el sistema recorre, con una lentitud infinita, una serie continua de estados termodinámicos en equilibrio infinitamente próximos (II.1.3.3°). Todos los procesos que no satisfacen las condiciones enumeradas se llaman transformaciones en *desequilibrio*. Los procesos reales son transformaciones en *desequilibrio*, puesto que transcurren con velocidad finita. Pero se aproximan tanto más a las transformaciones en equilibrio cuanto más lentamente se efectúan.

Transformaciones «iso» son los procesos termodinámicos que tienen lugar en un sistema de masa constante siendo también constante alguno de los parámetros de estado.

Transformación isotérmica es la que transcurre a temperatura constante ($T = \text{const}$).

Transformación isocora, la que se desarrolla a volumen constante ($V = \text{const}$).

Transformación isobárica, la que se cumple a presión constante ($p = \text{const}$).

Se llama *adiabática* la transformación termodinámica que se efectúa en un sistema sin intercambio de calor (II.2.2.4°) con los cuerpos externos (véase también II.2.5.10°).

8°. Se denominan *funciones de estado* las magnitudes físicas que caracterizan el estado de un sistema. La variación de las funciones de estado en los procesos termodinámicos no depende de la forma de estos procesos. Las funciones de estado vienen determinadas unívocamente por los valores de los parámetros de los estados inicial y final del sistema. Las funciones de estado más simples de un sistema son su energía interna U (II.2.1.2°) y su entropía S (II.4.4.2°).

§ II.1.4. Ecuación de estado del gas perfecto

1°. *Gas perfecto* es aquel cuyas moléculas no interaccionan entre sí a distancia y tienen dimensiones propias infinitamente pequeñas. En los gases reales (II.5.1.2°) las moléculas experimentan las fuerzas de interacción intermolecular (II.5.1.3°).

Al chocar entre sí y con las paredes del recipiente, las moléculas del gas perfecto se comportan como esferas perfectamente elásticas (I.1.1.4°) con diámetro d (*diámetro eficaz de la molécula*) dependiente de la naturaleza química del gas. La existencia del diámetro eficaz d ($d \sim 10^{-10}$ m) significa que entre las moléculas

actúan fuerzas de repulsión mutua (II.5.1.3°). Las fuerzas intermoleculares de atracción (II.5.1.3°) disminuyen rápidamente al aumentar la distancia r entre las moléculas y prácticamente no se manifiestan si $r_m > 10^{-9}$ m. Cuando las densidades de los gases reales son pequeñas, las distancias medias $\langle r \rangle$ entre sus moléculas son mayores que r_m y estos gases, con buena aproximación, se consideran perfectos. El hidrógeno, helio, oxígeno y nitrógeno pueden considerarse gases perfectos a las densidades correspondientes a las condiciones normales.

2°. Para una masa dada de gas perfecto, la razón del producto de los valores numéricos de la presión y el volumen a la temperatura absoluta es una magnitud constante (*ecuación de Clapeyron*):

$$\frac{pV}{T} = C = \text{const.}$$

El valor numérico de la *constante de los gases* C depende de la masa de éstos y de su composición química.

Si v es el volumen específico del gas (II.1.3.2°), y M su masa, será $V = Mv$ y la ecuación de Clapeyron tomará la forma

$$pv = \frac{C}{M} T = BT,$$

en la que $B = C/M$ es la *constante específica de los gases*, referida a la unidad de masa.

3°. De la definición de mol (IX) se deduce que los moles (moléculas gramo) de distintos gases contienen el mismo número de moléculas (*número de Avogadro* N_A (IX)).

La *masa molar* μ de un gas o de un cuerpo cualquiera es una magnitud física igual a la razón de la masa M del gas (o de un cuerpo cualquiera) a la cantidad N de moles que contiene: $\mu = M/N$.

La masa molar es directamente proporcional a la masa relativa de las moléculas del gas: $\mu = 10^{-3} m/m_0$, donde m es la masa de la molécula del gas dado, y m_0 la unidad atómica de masa por la escala del carbono (IX). El coeficiente 10^{-3} aparece porque en el SI la masa molar se mide en kg/mol.

El *volumen molar* V_μ es una magnitud física igual a la razón del volumen V del gas al número N de moles contenidos en él: $V_\mu = V/N$. La masa del mol es igual numéricamente a μ , por lo que $V_\mu = \mu v$, siendo v el volumen específico (II.1.3.2°).

4°. La ecuación de estado para un mol de gas perfecto es

$$\frac{pV_\mu}{T} = \mu B = R \quad \text{o} \quad pV_\mu = RT.$$

Aquí R es la *constante universal de los gases*, es decir, la constante de los gases referida a un mol de gas. La universalidad de R se desprende de la *ley de Avogadro*, según la cual los moles de todos los gases perfectos, a presiones y temperaturas iguales, ocupan iguales volúmenes. En condiciones normales ($T = 273,15$ K, $p = 1,0132 \cdot 10^5$ Pa = 1 atm = 760 mm Hg) el mol de un gas cualquiera tiene el volumen $V_\mu = 22,415 \cdot 10^{-3}$ m³. De aquí se pueden calcular los valores numéricos de R en los diferentes sistemas de unidades (IX).

Si un volumen V de gas contiene una masa de M kg, es decir, M/μ moles, será $V = M/\mu \cdot V_\mu$ y la ecuación de estado del gas tomará la forma llamada *ecuación de Mendeléiev — Clapeyron*:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT.$$

5°. Se da el nombre de *constante de Boltzmann* k a una magnitud física igual a la razón de la constante universal de los gases R al número de Avogadro N_A , o sea, $k = R/N_A$. Los valores de k en los distintos sistemas de unidades pueden verse en IX.

La ecuación de estado del gas perfecto, expresada por medio de la constante de Boltzmann, tiene la forma

$$p = \frac{kN_A T}{V_\mu} = kn_0 T,$$

en la que $n_0 = N_A/V_\mu$ es el número de moléculas de gas que hay en la unidad de volumen (concentración molecular).

A temperatura constante la presión del gas es directamente proporcional a la concentración de sus moléculas (o densidad del gas).

Capítulo II.2.	Primera ley	132
	(primer principio)	133
	de la termodinámica	134

§ II.2.1. Energías total e interna de un sistema

1°. Un sistema termodinámico (II.1.3.1°) arbitrario que se encuentre en un estado termodinámico (II.1.3.3°) cualquiera, posee la *energía total* W , igual a la suma de:

- a) la energía cinética W_c^{mec} del movimiento mecánico del sistema en conjunto (o de sus partes macroscópicas);
 b) la energía potencial (I.3.3.1°) W_p^{ext} del sistema en los campos de fuerzas externas (electromagnético y de gravitación);
 c) la energía interna U :

$$W = W_c^{\text{mec}} + W_p^{\text{ext}} + U.$$

2°. Se llama *energía interna* de un cuerpo o sistema termodinámico (II.1.3.1°), la energía que sólo depende del estado termodinámico del cuerpo (sistema). Para un sistema en reposo que no se encuentra en campos de fuerzas externos, la energía interna coincide con la energía total. La energía interna coincide también con la energía en reposo del cuerpo (sistema) (I.5.7.3°) e incluye en sí misma la energía de todas las formas de movimientos internos que existen en el cuerpo (sistema) y la energía de interacción de todas las partículas (átomos, moléculas, iones, etc.) que lo componen.

Por ejemplo, la energía interna de un gas de moléculas monoatómicas (amoníaco, anhídrido carbónico, etc.) está constituida por:

- a) la energía cinética de los movimientos de traslación y rotación de las moléculas;
 b) las energías cinética y potencial de las oscilaciones de los átomos en las moléculas;
 c) la energía potencial debida a las interacciones intermoleculares;
 d) la energía de las capas electrónicas de los átomos e iones;
 e) las energías cinética y potencial de la interacción de los nucleones (VIII.1.1.1°) en los núcleos de los átomos.

Los términos d) y e), por lo general, no varían en los procesos que transcurren a temperaturas no muy altas, en cuyo caso la ionización y excitación no desempeñan papeles importantes. En estas condiciones los términos d) y e) no se tienen en cuenta en el balance de la energía interna. Para el gas perfecto (II.1.4.1°) tampoco se toma en consideración el término c).

3°. La energía interna es función unívoca del estado termodinámico del sistema. El valor de la energía interna en un estado cualquiera no depende del proceso mediante el cual el sistema llegó al estado dado. La variación de la energía interna cuando el sistema pasa de un estado 1 a un estado 2 es igual a $\Delta U = U_2 - U_1$ y no depende del tipo de la transformación $1 \rightarrow 2$. Si el sistema efectúa una transformación cerrada (ciclo)

(II.4.1.1°), la variación total de su energía interna es nula:
 $\oint dU = 0$.

Como sabemos, matemáticamente esta relación significa que la variación infinitesimal dU de la energía interna es una diferencial total (exacta). Esta misma propiedad, además de la energía interna, la poseen la entropía (II.4.4.2°) y otras funciones de estado (II.1.3.8°) (compárese con II.2.2.5°).

4°. En un sistema en estado de equilibrio termodinámico, la energía interna depende solamente de la temperatura y de los parámetros externos (II.1.3.5°). En particular, para un sistema simple (II.1.3.6°) de masa M constante, la energía interna es función de la temperatura T y del volumen V del sistema (ecuación calórica del estado de un sistema simple):

$$U = \varphi(V, T).$$

Ejemplo 1. La energía interna de un gas perfecto (II.1.4.1°) sólo depende de su temperatura absoluta y es proporcional a la masa M del gas:

$$U = \int_0^T C_V dT + U_0 = M \left(\int_0^T c_V dT + u_0 \right),$$

donde C_V y $c_V = C_V/M$ son, respectivamente, la capacidad calorífica (II.2.5.1°) y el calor específico (II.2.5.2°) del gas cuando la transformación es isocora (II.1.3.7°); $u_0 = U_0/M$ es la energía interna de la unidad de masa del gas a $T = 0$ K. Para los gases monoatómicos a temperaturas ordinarias, C_V no depende de T y $U = C_V T + U_0$.

Ejemplo 2. La energía interna del gas de Van der Waals (II.5.2.1°) constituye:

$$U = \int_0^T C_V dT - \frac{M^2 a}{\mu^2 V} + U_0,$$

donde M es la masa del gas; μ , su masa molar (II.1.4.3°), y a , el coeficiente de Van der Waals.

5°. En termodinámica la energía interna se determina con la exactitud de hasta un término constante U_0 , cuyo valor depende del punto de referencia que se elija para la magnitud U , es decir, del estado con energía interna nula. Prácticamente la

magnitud U_0 no desempeña ningún papel en los cálculos termodinámicos, en los cuales se determinan las variaciones ΔU , independientes de U_0 , de la energía interna (véase también (II.2.1.2°)).

§ II.2.2. Calor y trabajo

1°. El intercambio de energía entre un sistema termodinámico y los cuerpos externos se efectúa por dos procedimientos: realizando trabajo o por medio del intercambio calorífico*). La cantidad de energía que ceden al sistema los cuerpos externos por la acción mutua de las fuerzas que accionan entre ellos, se llama *trabajo* realizado sobre el sistema. A su vez, la cantidad de energía que transmiten al sistema los cuerpos externos por intercambio calorífico, recibe el nombre de *cantidad de calor* cedida al sistema**).

2°. Si el sistema termodinámico está en reposo, para realizar trabajo hay que desplazar los cuerpos externos que interactúan con él, o sea, es necesario que varíen los parámetros externos del sistema (II.1.3.5°). En ausencia de campos de fuerzas externos, el intercambio de energía entre el sistema en reposo y el medio exterior, mediante la realización de trabajo, sólo puede efectuarse variando el volumen y la forma del sistema. Según la ley de conservación de la energía, el trabajo A' realizado sobre el sistema por las fuerzas externas es numéricamente igual y de signo contrario al trabajo A que el sistema mismo realiza sobre el medio exterior, es decir, contra las fuerzas externas: $A' = -A$.

3°. Se llama *trabajo de expansión* el que realiza el sistema en contra de la presión externa. El trabajo infinitesimal de expansión $\delta A = p_{\text{ext}} dV$, donde p_{ext} es la presión exterior distribuida uniformemente, y dV la variación infinitesimal que experimenta el volumen del sistema. Si el proceso de expansión transcurre en equilibrio (o sea, es cuasiestático) (II.1.3.7°),

*) Un tercer procedimiento de intercambio de energía —el intercambio de masa— queda fuera del marco de este manual.

***) A veces, si no puede haber confusión, el término «cantidad de calor» se sustituye por el de «calor», pero no debe olvidarse que por calor, en general, se entiende la forma de transmisión de la energía (II.2.2.4°).

será $p_{\text{ext}} = p$, siendo p la presión del sistema. En este caso $\delta A = p dV$.

Para comprender el porqué de la diferencia de escritura que se utiliza entre las variaciones infinitesimales δA y dU , deben verse II.2.4.3° y II.2.1.3°. El trabajo de expansión en equilibrio del sistema desde un volumen V_1 hasta un volumen V_2 es:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

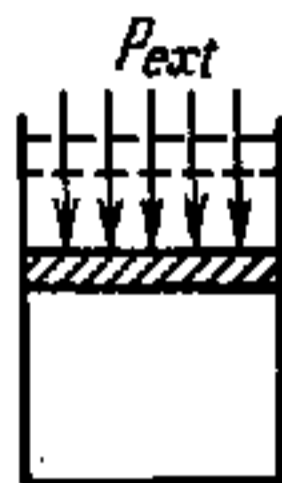


FIG. II.2.1.

Ejemplo. Trabajo del gas encerrado en un recipiente provisto de émbolo móvil exento de peso (fig. II.2.1). La presión del gas $p > 0$, por lo que, al expandirse ($dV > 0$), el gas realiza un trabajo positivo ($\delta A > 0$). Si el gas se comprime ($dV < 0$ y $\delta A < 0$), el trabajo positivo será el realizado sobre el gas por las fuerzas de presión externas. El gas realizará entonces un trabajo negativo.

La representación gráfica del trabajo puede verse en II.2.4.2°.

4°. El intercambio de calor se realiza entre cuerpos (o partes de un cuerpo) calentados hasta temperaturas distintas. Existen tres formas de intercambio de calor: por convección, por conducción y por radiación.

Se llama *intercambio de calor por convección* la transmisión de energía en forma de calor entre las partes desigualmente calentadas de los gases y de los líquidos o entre gases, líquidos y sólidos. El intercambio de calor por convección en los líquidos se realiza al moverse unas partes del líquido con respecto a otras o con relación a los cuerpos sólidos. Por ejemplo, en los radiadores de calefacción por agua, la energía del agua caliente que circula por el radiador se transmite por convección a las paredes de éste, que están menos calientes.

El fenómeno de *conductibilidad calorífica* consiste en la transmisión de energía en forma de calor, de una parte a otra del cuerpo calentado desigualmente. Así, por ejemplo, se efectúa la transmisión de energía a través de las paredes de los radiadores de la calefacción por agua, desde las superficies internas de éstas, que están más calientes, a las superficies externas que están menos calientes.

El *intercambio de calor por radiación* se realiza sin que los cuerpos que intercambian energía estén en contacto directo, y

consiste en la emisión y absorción (por dichos cuerpos) de la energía del campo electromagnético. Por radiación llega desde el Sol a la superficie de la Tierra una cantidad colosal de energía.

5°. El trabajo y el calor son características energéticas de los procesos de transformación del estado de los sistemas termodinámicos y sólo tienen sentido cuando existen estos procesos. En dependencia de la forma de los procesos que transforman el sistema de un estado 1 a un estado 2, el trabajo que hay que realizar es distinto y la cantidad de calor que hay que comunicarle al sistema es diferente. La comparación con II.2.1.3° (sobre la variación de la energía interna en las transformaciones) muestra que el trabajo y el calor no son formas de la energía, por lo que no se puede hablar de «reserva de trabajo» o «reserva de calor» en un cuerpo. Por estas mismas razones la cantidad infinitesimal de calor δQ y el trabajo infinitesimal δA no son diferenciales totales (compárense con II.2.1.3°).

6°. La realización de trabajo sobre el sistema puede hacer que varíe una forma cualquiera de la energía de éste. Por ejemplo, si el gas se comprime rápidamente en el recipiente por medio del émbolo móvil (II.2.2.3°), el trabajo realizado sobre el gas por las fuerzas externas hace que aumente la energía interna del gas. En el choque inelástico de dos cuerpos (I.3.5.3°), una parte del trabajo realizado se invierte en variar la energía cinética de los cuerpos (I.3.2.2°), y otra parte hace que varíe la energía interna de los mismos.

Si la energía se le comunica al sistema en forma de calor, ésta se invierte solamente en aumentar la energía interna del sistema. Se debe esto a que cualquiera que sea la forma de transmisión de calor (II.2.2.4°), el intercambio de energía se produce directamente entre las partículas en movimiento caótico de los cuerpos. Con esto varían sus energías internas. Por ejemplo, durante el proceso de conducción térmica en un sólido desigualmente calentado, las partículas que se encuentran en las partes más calientes del cuerpo transmiten parte de su energía a las que se hallan en las partes menos calientes. Como resultado se produce la igualación de las energías internas de las distintas partes del cuerpo, el igualamiento de sus temperaturas y el cese del proceso de conducción.

De lo antedicho se deduce la diferencia cualitativa y la no equivalencia del trabajo y el calor como formas de transmisión de energía. Con frecuencia estas dos formas de transmisión de energía existen simultáneamente. Por ejemplo, cuando se calienta un gas en un recipiente con émbolo móvil, al mismo tiempo

que aumenta el volumen del gas, éste realiza trabajo contra la presión externa.

7°. Un sistema termodinámico se llama *cerrado (aislado)* si no intercambia energía de ninguna forma con el medio exterior. Los sistemas de este tipo cumplen la *ley de conservación de la energía*: la energía total de un sistema aislado permanecerá invariable cualesquiera que sean los procesos que se desarrollen en él.

8°. Se dice que un sistema termodinámico está *aislado adiabáticamente (o aislado con relación al calor)* si no existe intercambio de calor entre él y el medio exterior. Este sistema puede realizar trabajo sobre los cuerpos externos, y las fuerzas externas pueden efectuar trabajo sobre él. Puede servir de ejemplo un cilindro, con émbolo móvil, lleno de gas y rodeado por todas partes de una densa capa de fieltro termoaislante. La ausencia de intercambio de calor con el medio exterior no excluye la posibilidad de que el gas realice trabajo de expansión (II.2.2.3°) ni que las fuerzas de la presión externa efectúen trabajo de compresión sobre él.

Un sistema se aproxima, por sus propiedades, a ser adiabáticamente aislado, cuando la variación de su estado se efectúa tan rápidamente, que el tiempo que dura el proceso es insuficiente para que pueda producirse intercambio de calor entre él y el medio exterior. (Por ejemplo, la expansión rápida del gas encerrado en una botella cuando se abre por poco tiempo la llave de esta última).

§ II.2.3. Primera ley (primer principio) de la termodinámica

1°. *Primera ley (primer principio) de la termodinámica*: la variación de la energía interna ΔU_{1-2} de un sistema que se produce en el proceso $1 \rightarrow 2$ de transformación de éste (del estado 1 al estado 2), es igual a la suma del trabajo A'_{1-2} realizado sobre dicho sistema por las fuerzas externas, más la cantidad de calor Q_{1-2} cedida al mismo:

$$\Delta U_{1-2} = A'_{1-2} + Q_{1-2}$$

$A'_{1-2} = -A_{1-2}$, donde A_{1-2} es el trabajo realizado por el sistema sobre las fuerzas externas en el proceso $1 \rightarrow 2$. Por esto

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}$$

La cantidad de calor cedida al sistema se invierte en variar la energía interna de éste, y en el trabajo que realiza el sistema contra las fuerzas exteriores.

Para una cantidad de calor infinitesimal δQ , un trabajo elemental δA y una variación infinitesimal dU de la energía interna (II.2.1.3° y II.2.2.5°), la primera ley de la termodinámica tiene la forma

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

2°. Si $\delta Q > 0$, al sistema se le cede calor. Si $\delta Q < 0$, del sistema se extrae calor. En un proceso finito $1 \rightarrow 2$ las cantidades elementales de calor pueden ser de ambos signos, y la cantidad total de calor Q_{1-2} en el proceso $1 \rightarrow 2$ es igual a la suma algebraica de los calores en todos los tramos de esta transformación,

$$Q_{1-2} = \int_1^2 \delta Q.$$

Cuando el sistema realiza trabajo sobre los cuerpos externos, se considera que $\delta A > 0$. Si las fuerzas externas realizan trabajo sobre el sistema, se admite que $\delta A < 0$. El trabajo que efectúa el sistema en el proceso finito $1 \rightarrow 2$ es igual a la suma algebraica de los trabajos δA realizados por el sistema en todos

los tramos de este proceso, es decir, $A_{1-2} = \int_1^2 \delta A$.

3°. Si un sistema, por ejemplo, el agente de transformación de un motor de acción periódica (II.4.1.1°), realiza una transformación cerrada $1 \rightarrow 1$ (II.1.3.7°), será $\Delta U_{1-1} = 0$ y $A_{1-1} = Q_{1-1}$. Es imposible construir un motor de acción periódica capaz de realizar un trabajo mayor que la energía que reciba del exterior. Este motor se conoce con el nombre de *móvil perpetuo de primera especie*. La imposibilidad de crear el móvil perpetuo de primera especie es también un enunciado de la primera ley de la termodinámica.

§ II.2.4. Representación gráfica de los procesos termodinámicos y del trabajo

1°. La ecuación de estado (II.1.3.6°) de un sistema termodinámico permite, por los valores de dos parámetros de estado cualesquiera, por ejemplo, de V y T , determinar el valor de un

tercer parámetro p . Por esto los procesos termodinámicos se pueden representar gráficamente en distintos sistemas bidimensionales de coordenadas. Además del diagrama ($p - V$), que es el más difundido, se utilizan también los diagramas ($p - T$) y ($V - T$).

En la fig. II.2.2., el proceso termodinámico en el diagrama ($p - V$) está representado por la curva C_1C_2 , y los puntos $C_1 (p_1, V_1)$ y $C_2 (p_2, V_2)$ caracterizan los estados inicial y final del sistema termodinámico.

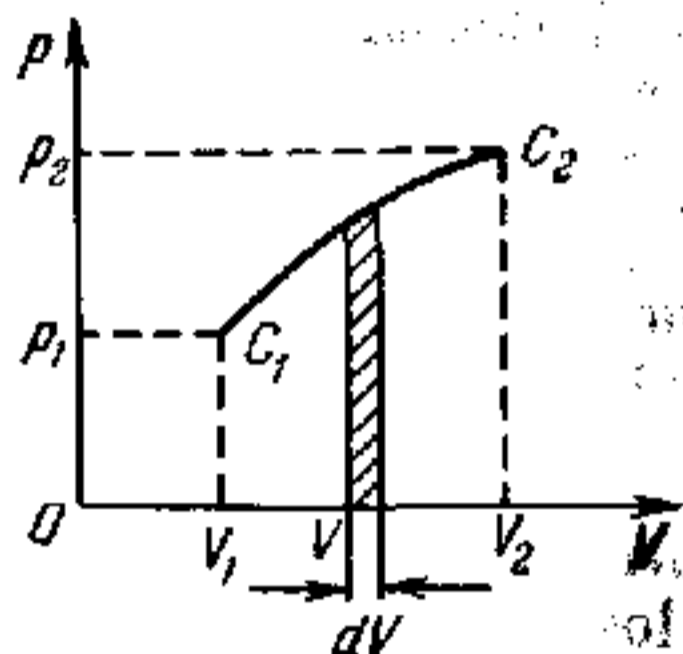


Fig. II.2.2.

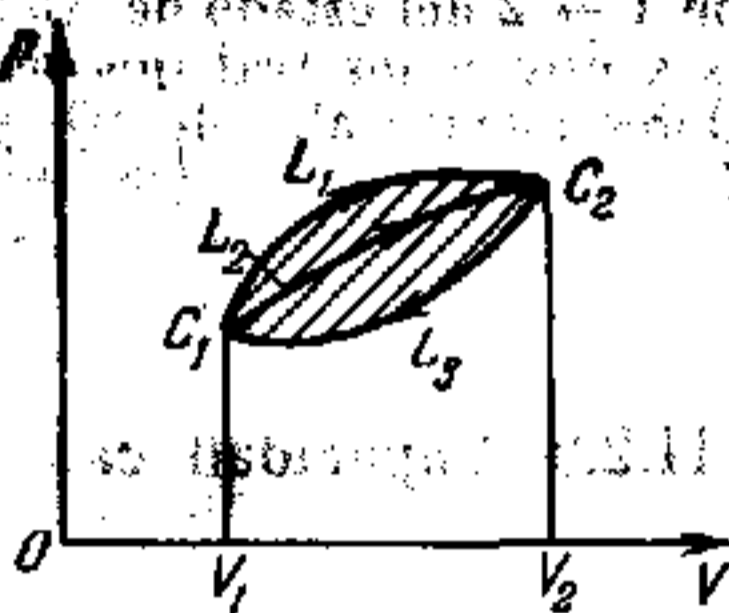


FIG. II.2.3.

Gráficamente sólo se pueden representar las transformaciones en equilibrio (II.1.3.7°). Cuando se trata de procesos en desequilibrio (II.1.3.7°) no se puede hablar de parámetros de estado de todo el cuerpo (o sistema), ya que éstos son distintos en las diferentes partes del cuerpo (sistema). Por lo tanto, es imposible representar gráficamente las transformaciones en desequilibrio.

2°. El trabajo elemental realizado por un sistema δA (II.2.2.3°) en una transformación en equilibrio (II.1.3.7°) se mide por el área del trapecio curvilíneo rayado en la fig. II.2.2. El trabajo A_{1-2} realizado por el sistema durante el proceso

C_1C_2 es $A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ y se mide por el área limitada por la

curva del proceso C_1C_2 , el eje de abscisas y las ordenadas p_1 y p_2 de los puntos C_1 y C_2 . El trabajo A_{1-2} depende del modo que el sistema pasa del estado C_1 al estado C_2 , es decir, de la forma del proceso C_1C_2 . En el diagrama ($p - V$) (fig. II.2.3) los trabajos realizados por el sistema en los procesos $C_1L_1C_2$, C_1 , L_2 , C_2 y

C_1, L_3, C_2 , iguales respectivamente a A_{L_1}, A_{L_2} y A_{L_3} , se miden por áreas de magnitud distinta: $A_{L_1} > A_{L_2} > A_{L_3}$.

Si el sistema realiza el ciclo (II.4.1.1°) $C_1L_1C_2L_3C_1$, el trabajo total $A_{C_1-C_1}$ no es nulo. El trabajo positivo de expansión es mayor en el proceso $C_1L_1C_2$ que el trabajo negativo que se realiza en el proceso de compresión $C_2L_3C_1$. El trabajo positivo resultante se mide por el área rayada en la fig. II.2.3.

3°. El trabajo A y la cantidad de calor Q no son funciones de estado (II.1.3.8°). En los diferentes procesos de transformación $1 \rightarrow 2$ del estado del sistema, las cantidades de calor cedidas a éste y los trabajos realizados por él son distintos. Los valores elementales de δQ y δA no son diferenciales totales (II.2.1.3°).

§ II.2.5. Capacidad calorífica de una sustancia. Aplicación del primer principio de la termodinámica a los procesos "iso" en un gas perfecto

1°. La capacidad calorífica C de un cuerpo es una magnitud física numéricamente igual a la relación entre la cantidad de calor δQ cedida al cuerpo, y la variación dT de la temperatura de éste en el proceso termodinámico que se considera:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

El valor de C depende de la masa del cuerpo, de su composición química, del estado termodinámico y del proceso en el cual se le comunica el calor δQ .

2°. El calor específico c es la capacidad calorífica de la unidad de masa de la sustancia. Para un cuerpo homogéneo $c = C/M$, donde M es la masa del cuerpo.

Se llama capacidad calorífica molar (calor molecular) C_μ la capacidad calorífica de un mol (IX) de sustancia: $C_\mu = \mu c$, siendo μ la masa molar de dicha sustancia (I.1.4.3°).

3°. La cantidad elemental de calor δQ que hay que comunicarle al cuerpo para que su temperatura varíe de T a $T + \Delta T$ es

$$\delta Q = C dT.$$

Para un cuerpo homogéneo $\delta Q = Mc dT = \frac{M}{\mu} C_{\mu} dT$, donde M es la masa del cuerpo; μ , su masa molar, y M/μ , el número de moles que hay en el cuerpo.

4°. Para las transformaciones «iso» en equilibrio (II.1.3.7°) de los gases (II.1.3.7°), el primer principio de la termodinámica (II.2.3.1°) tiene la forma

$$\frac{M}{\mu} C_{\mu} dT = dU + p dV.$$

Si el proceso de calentamiento o enfriamiento del gas es isocoro (II.1.3.7°) (rectas 1-2 y 1-3 en la fig. II.2.4), el trabajo elemental $\delta A = p dV$ no se realiza ($dV = 0$) y toda la cantidad de calor δQ que se le comunica al gas se invierte en variar su energía interna $\delta Q = dU$. Si $C_{V\mu}$ es la capacidad calorífica molar a volumen constante,

$$dU = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} dT. \quad (*)$$

En una región determinada de temperaturas se puede considerar $C_{V\mu} \approx \text{const}$ (para más detalles véase II.3.7.4°) y la variación de la energía interna del gas ΔU_{1-2} , cuando su temperatura varía de T_1 a T_2 , es $\Delta U_{1-2} = U_2 - U_1 = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} (T_2 - T_1)$ y se efectúa a expensas de la cantidad de calor Q_{1-2} cedida al gas durante el proceso isocoro,

$$Q_{1-2} = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} (T_2 - T_1). \quad (**)$$

Cuando $T_2 > T_1$, el calor $Q_{1-2} > 0$ y al gas se le suministra cierta cantidad de calor; si $T_2 < T_1$, el calor $Q_{1-2} < 0$ y del gas se extrae cierta cantidad de calor.

5°. En el caso de un gas perfecto, las fórmulas (*) y (**) expresan la variación de su energía interna en cualquier proceso

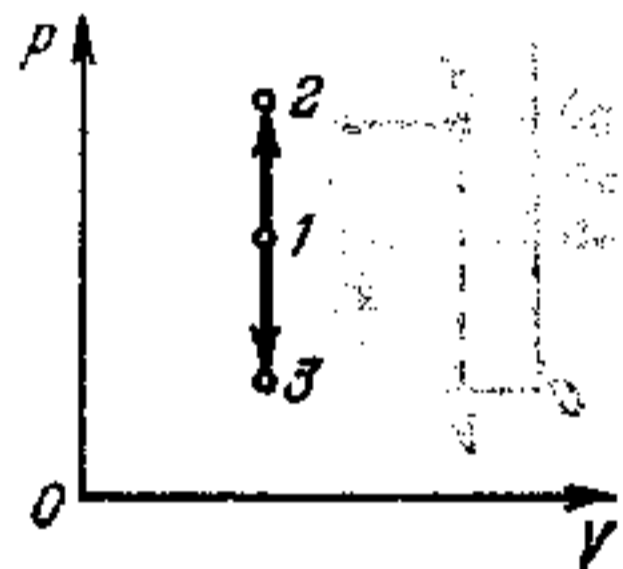


FIG. II.2.4.

de transformación del estado del gas en el intervalo de temperaturas ($T_2 - T_1$). La energía interna del gas perfecto depende solamente de su composición química, de su masa y de su temperatura.

Cuando los gases son reales (II.5.1.2°) la energía interna incluye además la energía potencial de la interacción entre las moléculas (II.2.1.2°), que depende de la distancia entre ellas. Si el volumen del gas real varía, esta parte de su energía interna también varía. Por esto las fórmulas (*) y (**) expresan la variación de la energía interna del gas real únicamente cuando el proceso de su calentamiento o enfriamiento es isocoro.

6°. Para una transformación en equilibrio (II.1.3.7°) arbitraria en un gas perfecto, el primer principio de la termodinámica tiene la forma

$$\frac{M}{\mu} C_{\mu} dT = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} dT + p dV,$$

en la que C_{μ} es la capacidad calorífica molar del gas perfecto en una transformación dada. La transformación isobárica (II.1.3.7°) de calentamiento (recta 1—2 en la fig. II.2.5) o enfriamiento (recta 1—3 en la misma figura) del gas perfecto se efectúa, por ejemplo,

en un recipiente con émbolo móvil, sobre el cual actúa una presión externa constante. El trabajo elemental δA que realiza el gas perfecto en este proceso isobárico es

$$\delta A = p dV = \frac{M}{\mu} R dT,$$

donde se ha utilizado la expresión $dV = \frac{M}{\mu} \frac{R}{p} dT$ de la ecuación de Mendeléiev — Clapeyron (II.1.4.4°) para $p = \text{const.}$

La constante universal de los gases R (II.1.4.4°) es numéricamente igual al trabajo que realiza un mol de gas perfecto al calentarlo a un grado por vía isobárica:

$$R = \frac{\delta A}{M/\mu \cdot dT}.$$

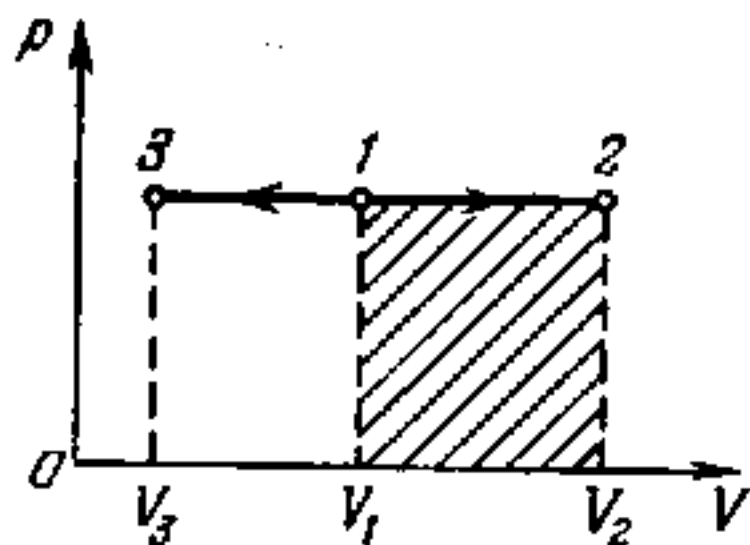


FIG. II.2.5.

El trabajo A_{1-2} que realiza el gas en el proceso isobárico de expansión 1-2,

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p (V_2 - V_1)$$

se representa por la superficie rayada en la fig. 11.2.5. Para el gas perfecto, el trabajo A_{1-2} es también igual a

$$A_{1-2} = \frac{M}{\mu} R (T_2 - T_1).$$

7°. La cantidad elemental de calor δQ que se le comunica al gas en el proceso isobárico es

$$\delta Q = \frac{M}{\mu} C_{p\mu} dT,$$

donde $C_{p\mu}$ es la capacidad calorífica molar del gas a presión constante. Si en el intervalo de temperaturas $(T_2 - T_1)$ se puede considerar constante la magnitud $C_{p\mu}$, entonces la cantidad de calor Q_{1-2} que se le cede (o extrae) al (o del) gas será

$$Q_{1-2} = \frac{M}{\mu} C_{p\mu} (T_2 - T_1).$$

8°. Las capacidades caloríficas molares de un gas, $C_{p\mu}$ y $C_{v\mu}$, están relacionadas entre sí por la *ecuación de Mayer*:

$$C_{p\mu} - C_{v\mu} = R.$$

Para los calores específicos c_p y c_v , esta ecuación tiene la forma:

$$c_p - c_v = R/\mu,$$

en la que μ es la masa molar del gas (1.1.4.3°).

Para las capacidades caloríficas C_p y C_v ,

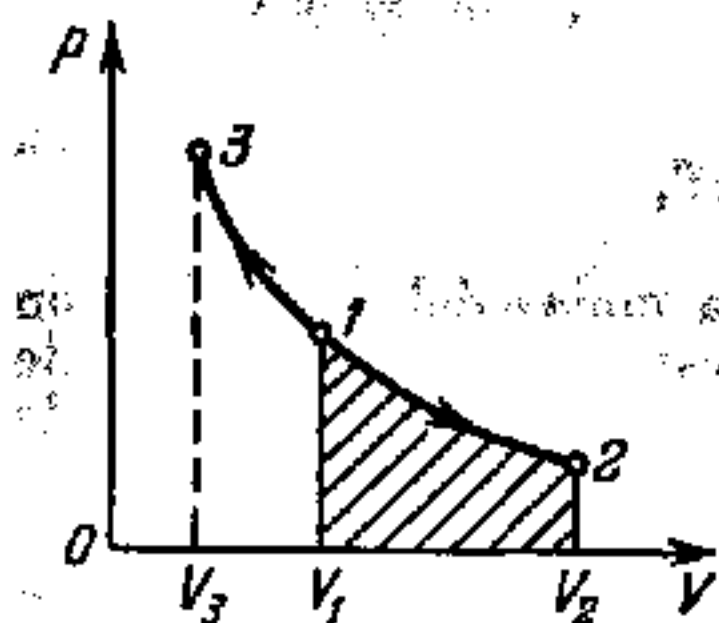
$$C_p - C_v = \frac{M}{\mu} R,$$

donde M es la masa del gas, y M/μ , el número de moles que hay en él.

El sentido de la ecuación de Mayer consiste en que para calentar a un grado el gas por vía isobárica hay que comunicarle más cantidad de calor que para el mismo calentamiento por vía isocora. La diferencia entre las cantidades de calor deberá ser igual al trabajo realizado por el gas durante la expansión isobárica.

9°. La transformación isotérmica (II.1.3.7°) de expansión (o compresión) del gas se puede efectuar cuando el intercambio de calor (II.2.2.4°) entre él y el medio exterior se realiza siendo constante la diferencia de temperaturas. Para esto, la capacidad calorífica (II.2.5.1°) del medio exterior debe ser suficientemente grande, y el proceso de expansión (o compresión) tiene que efectuarse muy lentamente. Son isotérmicos los procesos de transición de fase de I orden (II.5.3.3°) —ebullición, condensación y otros— que se desarrollan a presión exterior constante.

Durante la transformación isotérmica en un gas perfecto, su energía interna no varía (II.2.5.5°), y toda la cantidad de calor Q_{1-2} suministrada al gas se invierte en el trabajo A_{1-2} que aquél realiza contra las fuerzas externas:



$$Q_{1-2} = A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV =$$

$$= \frac{M}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

FIG. II.2.6.

Aquí M/μ es la cantidad de moles de gas que hay en la masa M ; T , la temperatura constante del gas, y V_1 y V_2 , los volúmenes inicial y final de éste. Si el gas se expande por vía isotérmica ($V_2 > V_1$), a él se le suministra calor $Q_{1-2} > 0$ y el mismo realiza un trabajo positivo ($A_{1-2} > 0$) que se mide por el área rayada en la fig. II.2.6. Cuando el gas se comprime isotérmicamente (transformación 1—3 en la fig. II.2.6), el trabajo A_{1-3} realizado por él es negativo ($A_{1-3} < 0$). El trabajo positivo lo efectúan las fuerzas externas. En este caso se extrae del gas cierta cantidad de calor ($Q_{1-3} < 0$). La capacidad calorífica de la sustancia en la transformación isotérmica es igual a infinito ($dT = 0$ y $\delta Q \neq 0$).

10°. La transformación adiabática (II.1.3.7°) se realiza con la condición $\delta Q = 0$. Es importante que para definir esta transformación no sirve la condición $Q = 0$, ya que ésta no significa la exigencia de que no exista intercambio de calor con el medio exterior, sino únicamente la igualdad a cero de la suma algebraica de las cantidades de calor suministradas al gas y extraídas de él en los diversos tramos de la transformación.

En la transformación adiabática el gas perfecto realiza trabajo a expensas de la disminución de su energía interna:

$$\delta A = -dU = \frac{-M}{\mu} C_{V\mu} dT,$$

donde $C_{V\mu}$ es la capacidad calorífica molar del gas a volumen constante; M/μ , el número de moles de gas que hay en la masa M de éste, y dT , la variación infinitesimal de la temperatura del gas. Si el gas se expande adiabáticamente, $\delta A = p dV > 0$ y se enfría ($dT < 0$). Si se comprime adiabáticamente, se calienta: $\delta A = p dV < 0$ y $dT > 0$.

11°. Para una transformación adiabática en equilibrio (II.1.3.7°) es correcta la ecuación de Poisson $pV^\kappa = \text{const.}$

Aplicando la ecuación de Mendeléiev — Clapeyron (I.1.4.4°) de la ecuación de Poisson se puede deducir la relación entre p y T , o entre V y T , que existe en la transformación adiabática:

$$pT^{\frac{-\kappa}{\kappa-1}} = \text{const.}, \quad VT^{\frac{1}{\kappa-1}} = \text{const.}$$

En estas ecuaciones la magnitud adimensional $\kappa = C_{p\mu}/C_{V\mu} = c_p/c_v > 1$ es el coeficiente de Poisson (exponente adiabático). En la fig. II.2.7 la curva de trazos continuos —adiabática— representa en el diagrama ($p - V$) una transformación adiabática, y la curva punteada —isoterma—, una transformación isotérmica a la temperatura correspondiente al estado inicial T del gas. En la transformación adiabática, al variar el volumen, varía más bruscamente la presión que en la transformación isotérmica. En la expansión adiabática disminuye la temperatura del gas y su presión desciende más rápidamente que en la correspondiente expansión isotérmica. En la compresión adiabática del gas, su presión crece más rápidamente que en la compresión isotérmica. Esto se debe a que el aumento de la presión se efectúa a expensas de la disminución del volumen del gas y a que la temperatura aumenta.

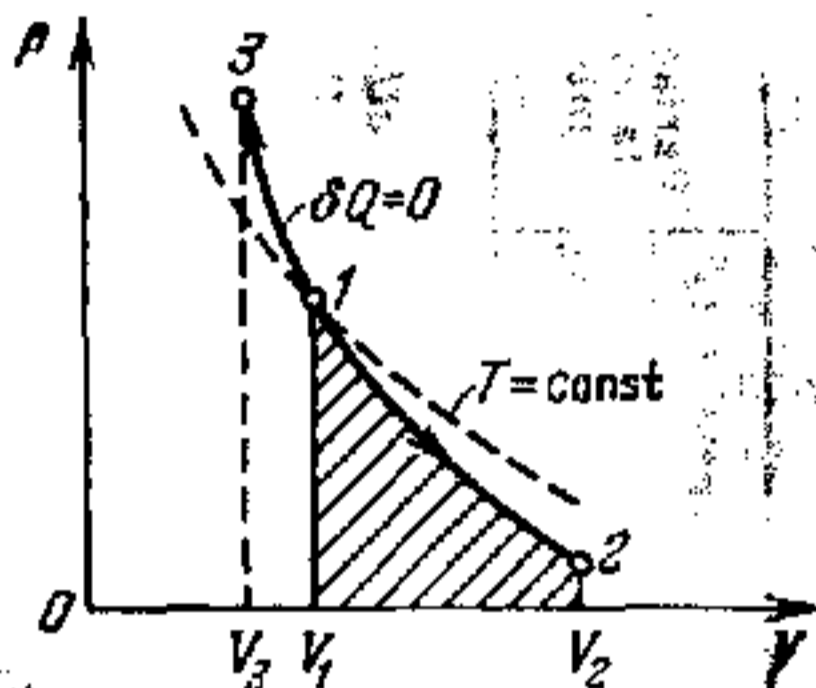


Fig. II.3.7.

Tabla 11.2.1

Nombre de la transformación	Condición con que se efectúa	Relación entre los parámetros de estado	Trabajo que se realiza en la transformación	Cantidad de calor suministrado en la transformación	Variación de la energía interna	Capacidad calorífica
Isocora	$V = \text{const}$	$\frac{p}{T} = \text{const}$	$\delta A = 0$ $A = 0$	$\delta Q = C_V dT$ $Q = C_V (T_2 - T_1)$	$dU = \delta Q$ $U = Q$	$C_V = \frac{M}{\mu} \frac{R}{(\kappa - 1)}$
Isobárica	$p = \text{const}$	$\frac{V}{T} = \text{const}$	$\delta A = p dV$ $A = p (V_2 - V_1)$	$\delta Q = C_p dT$ $Q = C_p (T_2 - T_1)$	$dU = C_V dT$ $U = C_V (T_2 - T_1)$	$C_p = \frac{M}{\mu} \frac{\kappa R}{(\kappa - 1)}$
Isotérmica	$T = \text{const}$	$pV = \text{const}$	$\delta A = p dV$ $A = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\delta Q = \delta A$ $Q = A$	$dU = 0$ $\Delta U = 0$	$C_T = \infty$
Adiabática	$\delta Q = 0$	$pV^\kappa = \text{const}$ $pT^{\kappa/(1-\kappa)} = \text{const}$ $V T^{1/(\kappa-1)} = \text{const}$	$\delta A = p dU = -dU$ $A = -\Delta U =$ $= C_V (T_1 - T_2)$	$\delta Q = 0$ $Q = 0$	$dU = -\delta A =$ $= C_V dT;$ $\Delta U = -A =$ $= C_V (T_2 - T_1)$	$C_{ad} = 0$

12°. El trabajo A_{1-2} realizado por el gas en la transformación adiabática $1 \rightarrow 2$ se mide por el área rayada en la fig. II.2.7.

Expresiones para el trabajo A_{1-2} en la transformación adiabática:

$$A_{1-2} = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} (T_1 - T_2), \quad A_{1-2} = \frac{M}{\mu} \frac{R}{\kappa - 1} (T_1 - T_2),$$

$$A_{1-2} = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right), \quad A_{1-2} = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} \right].$$

En estas fórmulas, M/μ es el número de moles de gas que hay en su masa M ; $C_{V\mu}$, la capacidad calorífica molar del gas a volumen constante; κ , el coeficiente de Poisson, y p , V y T , los parámetros de estado del gas en los estados 1 y 2 respectivamente.

13°. En la tabla II.2.1 se dan los datos resumidos de las características de las transformaciones «iso» en los gases.

Capítulo II.3. Teoría cinética de los gases

§ II.3.1. Conocimientos generales de física estadística clásica

1°. *La teoría cinética de los gases* estudia la estructura y las propiedades físicas de los gases basándose en el método estadístico de investigación (I.1.2.2°). En la base de la *física estadística clásica*, además de lo dicho en I.1.2.1°, se encuentran los siguientes postulados iniciales.

2°. En un sistema de partículas se cumplen las leyes de conservación de la energía (II.2.2.7°), del impulso (I.2.7.1°) y del momento de impulso (I.4.4.1°). En los sistemas de partículas con carga se cumple también la ley de conservación de la carga eléctrica (III.1.1.3°).

3°. Todos los procesos físicos que tienen lugar en un sistema de partículas transcurren *de un modo continuo* en el espacio y el tiempo. La descripción en el espacio-tiempo de cualesquiera fenómenos físicos presupone, en la mecánica clásica y en la física estadística clásica, la posibilidad de que varíen de un modo continuo todas las magnitudes físicas que caracterizan el

estado del sistema. Por ejemplo, la velocidad y la energía de una partícula cualquiera pueden variar continuamente bajo la acción de diversas fuerzas.

4°. Cualquier partícula de un sistema está «marcada» y se puede distinguir de todas las demás partículas iguales a ella (*distinguibilidad de las partículas idénticas en la física estadística clásica*).

5°. Cualquier partícula de un sistema puede tener valores arbitrarios de las coordenadas e impulsos (o velocidades), independientemente de los valores de estas magnitudes para las otras partículas. Si en un sistema de coordenadas XYZ se elige un recinto infinitesimal arbitrario $dx dy dz$, cualquier partícula puede hallarse dentro de él, independientemente de la presencia en el mismo recinto de un número arbitrario de otras partículas. Análogamente, cualquier partícula puede hallarse dentro de un «recinto» elemental arbitrario $dp_x dp_y dp_z$ en el «espacio de los impulsos» (o $du_x du_y du_z$ en el «espacio de las velocidades») independientemente de la presencia en ellos de un número arbitrario de otras partículas. Esto significa que cualquier partícula puede tener componentes de impulso según los ejes de coordenadas comprendidas dentro de los límites de p_x a $p_x + dp_x$, de p_y a $p_y + dp_y$ y de p_z a $p_z + dp_z$ (y, respectivamente, componentes de velocidad según los ejes de coordenadas dentro de los límites de u_x a $u_x + du_x$, de u_y a $u_y + du_y$ y de u_z a $u_z + du_z$). La magnitud mínima de los recintos $dx dy dz$ y $dp_x dp_y dp_z$ no tiene ningún límite.

Los puntos 2° y 3° se refieren no sólo a la física estadística clásica, sino que son característicos de toda la física clásica. Los puntos 4° y 5° se refieren únicamente a la física estadística clásica y no son válidos en la estadística cuántica (VII.2.1.1°)

§ II.3.2. Ecuación fundamental de la teoría cinética de los gases

1°. La presión de un gas (II.1.3.2°) en un recipiente es el resultado de los choques de sus moléculas con las paredes del recipiente. La presión del gas es la manifestación macroscópica del movimiento térmico de las moléculas (II.1.1.1°). Cuando las moléculas del gas chocan con las paredes del recipiente (II.1.4.1°), le comunican a éstas su impulso (I.1.3.4°). La variación de los impulsos de las moléculas hace que aparezca la presión del gas. En el gas perfecto los choques mutuos de las moléculas en el

volumen del recipiente no varían la presión del gas sobre las paredes de éste. En virtud del carácter caótico del movimiento térmico de las moléculas (II.1.1.3°), la presión del gas es igual sobre todas las paredes del recipiente y, por definición (II.1.3.2°), es igual a la fuerza media que actúa perpendicularmente sobre la unidad de área de la superficie de la pared.

2°. La ecuación fundamental de la teoría cinética de los gases es

$$pV = 2/3 W_c,$$

en la que p es la presión del gas; V , su volumen, y $W_c =$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{m_i u_i^2}{2},$$

la energía cinética total del movimiento de

traslación de las N moléculas de gas que hay en el recipiente.

3°. Para un gas homogéneo $m_i = m$, las masas de todas las moléculas son iguales, pero sus velocidades u_i son distintas (II.3.3.1°) y

$$W_c = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N u_i^2.$$

Es conveniente introducir la velocidad cuadrática media v_c del movimiento de traslación de las moléculas del gas:

$$v_c = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^2},$$

en la que N es el número total de moléculas que hay en el volumen V . La velocidad cuadrática media caracteriza el conjunto de moléculas y carece de sentido al referirse a una molécula o a un pequeño número de ellas. La expresión para W_c , introduciendo v_c , tiene la forma:

$$W_c = \frac{1}{2} N m v_c^2 \quad pV = \frac{1}{3} N m v_c^2 = \frac{1}{3} M v_c^2,$$

donde $M = Nm$ es la masa del gas.

La ecuación fundamental para la presión del gas es

$$p = \frac{2}{3} W_c = \frac{1}{3} n_0 m v_c^2 = \frac{1}{3} \rho v_c^2,$$

en la que $W_{c_0} = \frac{W_c}{V}$; $n_0 = \frac{N}{V}$ es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen, y $\rho = n_0 m$ es la densidad del gas.

4°. De la comparación de la ecuación de Mendeléiev — Clapeyron (II.1.4.4°) con la ecuación fundamental (p. 3°), $RT = \frac{1}{3} \mu v_c^2$, se deduce que

$$v_c = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1,73 \sqrt{pv},$$

donde k es la constante de Boltzmann (II.1.4.5°); m , la masa de una molécula; N_A , el número de Avogadro (IX); p , la presión del gas, y v , su volumen específico.

5°. La energía cinética media del movimiento de traslación de una molécula de gas perfecto es

$$\langle w_c \rangle = \frac{W_c}{N} = \frac{mv_c^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$



Fig. II.3.1.

La energía cinética media (w_c) es directamente proporcional a la temperatura absoluta y no depende de nada más (fig. II.3.1). La temperatura absoluta es la medida de la energía

cinética media del movimiento de traslación de las moléculas de gas perfecto. Este resultado de la teoría cinética de los gases no es correcto en la región de temperaturas ultrabajas próximas al cero absoluto (VII.2.3.3°).

§ II.3.3. Ley de Maxwell de distribución de s moléculas por velocidades y energías

1°. La ley de distribución de las moléculas de gas perfecto según sus velocidades, establecida teóricamente por Maxwell, determina el número dn de moléculas de gas perfecto monoatómico homogéneo que, del número total n_0 de sus moléculas en la unidad de volumen, tiene, a una temperatura dada, las velocidades comprendidas en el intervalo de u a $u + du$. Esta ley es aplicable a los gases en estado de equilibrio termodinámico (II.1.3.3°). La distribución de las moléculas de este gas según

sus velocidades es estacionaria. La distribución de Maxwell se establece como resultado de los choques por parejas de las moléculas de gas durante su movimiento caótico. La distribución de las moléculas por el volumen del recipiente es uniforme, es decir, la densidad del gas es constante.

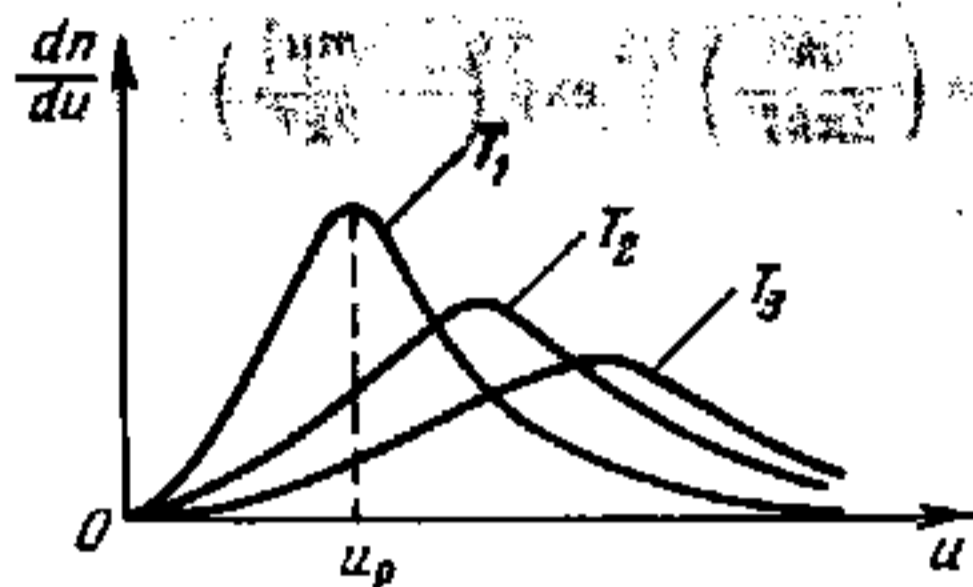


Fig. II.3.2.

2°. La forma que más se utiliza de la ley de distribución de las moléculas según los módulos de velocidades es:

$$dn = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 4\pi u^2 du.$$

Aquí u es el módulo de la velocidad de la molécula; m , la masa de ésta; k , la constante de Boltzmann, y T , la temperatura absoluta.

La fig. II.3.2 representa las curvas de distribución de las moléculas por velocidades a distintas temperaturas $T_1 < T_2 < T_3$. Por estas curvas puede verse que, al aumentar la temperatura, la velocidad más probable de las moléculas (p. 4°), aumenta, y la parte de las moléculas que tienen esta velocidad, disminuye.

3°. La distribución de Maxwell también se utiliza en la forma

$$dn = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} du_x du_y du_z,$$

en la que u_x , u_y y u_z son las proyecciones de la velocidad de la molécula sobre los ejes de coordenadas. En virtud del carácter caótico del movimiento térmico de las moléculas (II.1.1.1°), su

distribución según las proyecciones de las velocidades u_i sobre los ejes de coordenadas ($i = x, y, z$), es independiente y, por lo tanto,

$$dn = n_0 f(u_x) f(u_y) f(u_z) du_x du_y du_z,$$

donde

$$f(u_i) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{mu_i^2}{2kT} \right) \quad (i = x, y, z)$$

es la función de distribución de las moléculas según las proyecciones de las velocidades.

La distribución de Maxwell es isótropa. Esto se manifiesta en que la función $f(u_x, u_y, u_z)$ sólo depende del módulo de la velocidad, y la función $f(u_i)$ es igual respecto de todos los ejes.

4°. De la ley de distribución de las moléculas según sus velocidades (p. 2°) se puede determinar la *velocidad más probable* u_p de éstas, correspondiente al máximo de la función

$$f(u) = \frac{dn}{du} = 4\pi n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mu^2}{2kT}}$$

La condición $\left[\frac{d}{du} \left(e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2 \right) \right]_{u=u_p} = 0$ da

$$u_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = v_c \sqrt{\frac{2}{3}}$$

5°. Una tercera forma de la ley de distribución de las moléculas por velocidades es

$$dn = \frac{4n_0}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2/u_p^2} \left(\frac{u}{u_p} \right)^2 \frac{du}{u_p}$$

La porción de moléculas de gas dn/n_0 , cuyas velocidades se encuentran en el intervalo de u a $u + du$, es numéricamente igual al área dS rayada del trapecio curvilíneo en la fig. II.3.3, que representa la curva de variación de $\frac{u_p}{n_0} \frac{dn}{du}$ en función de $\frac{u}{u_p}$

$$dS = \left(\frac{u_p}{n_0} \frac{dn}{du} \right) \frac{du}{u_p} = \frac{dn}{n_0}$$

El área limitada por la curva de la fig. II.3.3 y el eje de abscisas es igual a la unidad. Esta área caracteriza la porción de molé-

culas que tienen todos los valores posibles de velocidades desde 0 hasta ∞ .

6°. La velocidad media aritmética (u) de traslación de las moléculas de gas perfecto, calculada por medio de la ley de distribución (p. 2°), constituye

$$\langle u \rangle = v_c \sqrt{\frac{8}{3\pi}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 1,60 \sqrt{pv}.$$

7°. La distribución de las moléculas de gas perfecto según sus energías determina la porción dn_w/n_0 de moléculas que, del

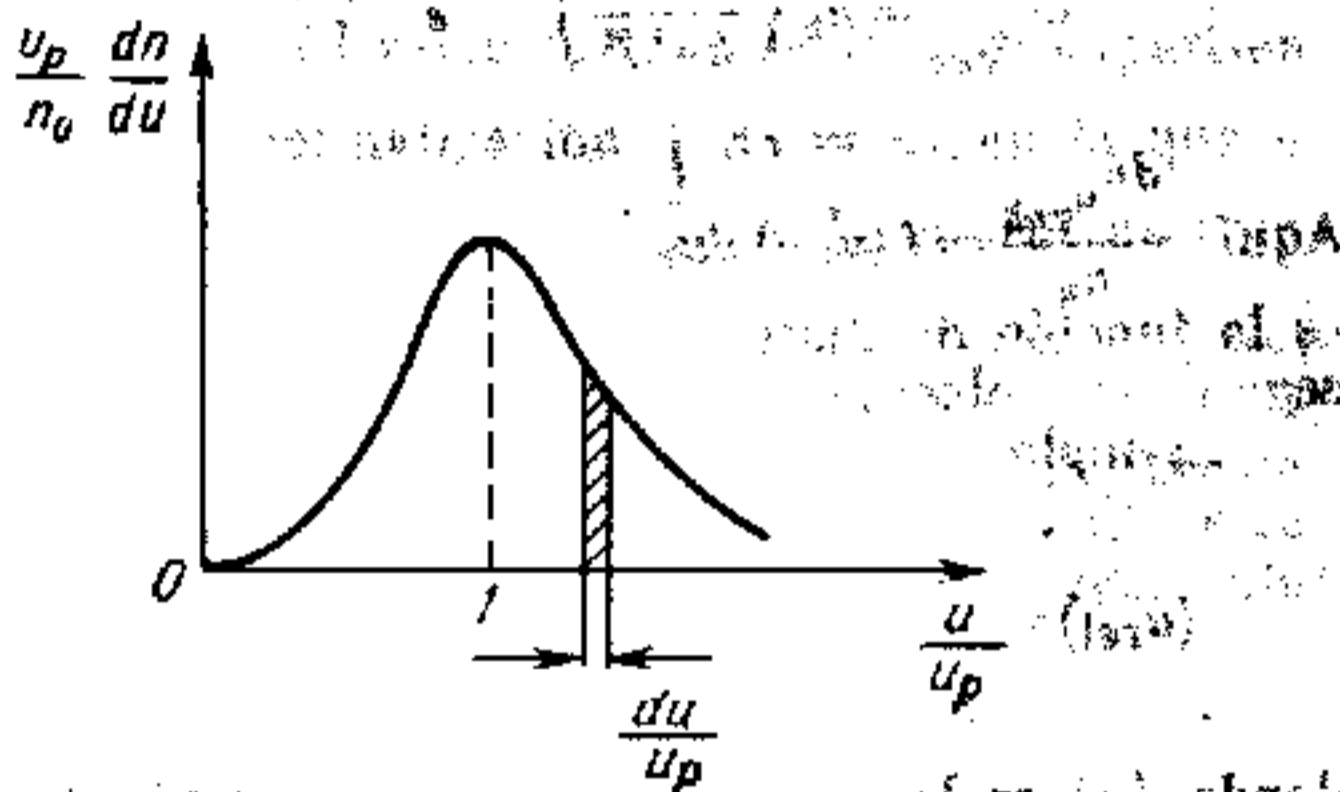


Fig. II.3.3.

número total n_0 de éstas, tienen energías cinéticas $w_c = mu^2/2$ comprendidas en el intervalo de w_c a $w_c + dw_c$:

$$dn_w = \frac{2n_0}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\frac{w_c}{kT}} \sqrt{w_c} dw_c.$$

Aquí $dn_w/n_0 = f(w_c) dw_c$, donde $f(w_c)$ es la función de distribución de las moléculas de gas perfecto según sus energías.

Ejemplo. La energía cinética media (w_c) de las moléculas de gas perfecto,

$$\langle w_c \rangle = \int_0^{\infty} w_c f(w_c) dw_c = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} w_c e^{-\frac{w_c}{kT}} \sqrt{w_c} dw_c = \frac{3}{2} kT$$

(compárese con II.3.2.4°).

8°. El movimiento relativo (I.7.f.2°) de dos partículas de masas m_1 y m_2 equivale al movimiento de una partícula de masa reducida $m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Para un gas homogéneo $m_1 = m_2 = m$ y $m_r = m/2$. La distribución de las moléculas según sus velocidades relativas establece la porción $dn_{u_{rel}}/n_0$ de estas cuyas velocidades relativas u_{rel} se encuentran dentro de los límites de u_{rel} a $u_{rel} + du_{rel}$.

$$dn_{u_{rel}} = n_0 \left(\frac{m}{4\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m u_{rel}^2}{4kT}} 4\pi u_{rel}^2 du_{rel}.$$

Aquí $\frac{dn_{u_{rel}}}{n_0} = f(u_{rel}) du_{rel}$; $f(u_{rel}) = 4\pi \left(\frac{m}{4\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m u_{rel}^2}{4kT}} u_{rel}^2$ es la función de distribución de las moléculas de gas perfecto según sus velocidades relativas.

Ejemplo. La velocidad relativa media de las moléculas $\langle u_{rel} \rangle$ es

$$\langle u_{rel} \rangle = \int_0^{\infty} u_{rel} f(u_{rel}) du_{rel} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{2} \langle u \rangle.$$

donde $\langle u \rangle$ es la velocidad media aritmética de las moléculas (p. 6°).

§ II.3.4. Distribución de las partículas en un campo de fuerzas potencial (distribución de Boltzmann)

1°. Generalmente el gas se encuentra en el campo de potencial de atracción de la Tierra (I.6.2.1°). Si este campo no existiera, el aire de la atmósfera se dispersaría en el Universo. Por otra parte, si no existiera el movimiento térmico, las moléculas del aire atmosférico caerían sobre la Tierra. La atracción y el movimiento térmico conducen a un estado estacionario en el cual decrece la concentración y la presión del gas a medida que aumenta la altura sobre la Tierra.

2°. Si un gas (u otro sistema de partículas) se encuentra en un campo de fuerzas potencial externo (I.3.1.6°), la distribución

de las partículas respecto al volumen se describe por la *ley de Boltzmann*, que establece el número de partículas $dn(x, y, z)$ cuyas coordenadas se encuentran en los intervalos de x a $x + dx$, de y a $y + dy$ y de z a $z + dz$. En otras palabras, $dn(x, y, z)$ es el número de moléculas que se encuentran en el volumen elemental $dV = dx dy dz$. La ley de Boltzmann tiene la forma

$$dn(x, y, z) = \text{const } e^{-\frac{w_p(x, y, z)}{kT}} dx dy dz,$$

donde $w_p(x, y, z)$ es la energía potencial de una partícula en el campo de fuerzas exterior; k , la constante de Boltzmann; y T , la temperatura absoluta. El valor de const se determina partiendo de la condición de normalización $\int dn = n_0$, en la que n_0 es el número total de partículas que hay en la unidad de volumen.

Ejemplo. Para las partículas de masa m que se encuentran en el campo de atracción de la Tierra, $w_p = mgh$ (I.3.3.3°), donde g es la aceleración de la gravedad (I.7.3.3°), y h , la altura. En cualquier altura existe una distribución de Maxwell de las moléculas por velocidades (II.3.3.1°). El número de moléculas que hay en el volumen dV constituye

$$dn(x, y, z) = \text{const } e^{-\frac{mgh}{kT}} dV.$$

La densidad del gas $\rho = m \frac{dn}{dV}$ disminuye al aumentar la altura, de acuerdo con la ley exponencial $\rho = \text{const } e^{-\frac{mgh}{kT}}$. El valor de const se determina partiendo de la condición $\rho = \rho_0 = \text{const}$ para $h = 0$. La densidad del gas, o su presión, varía de acuerdo con la *fórmula barométrica*

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad \text{y} \quad p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

3°. La distribución de las moléculas de gas según las coordenadas y las velocidades, en presencia de un campo de potencial arbitrario, se describe por la *ley (distribución) de Maxwell — Boltzmann*:

$$dn = \text{const } e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{3mkT} - \frac{w_p(x, y, z)}{kT}} dp_x dp_y dp_z dx dy dz,$$

en la que dn es el número de moléculas que se encuentran en el elemento de volumen $d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ del espacio de seis dimensiones; $w_p(x, y, z)$ es la energía potencial de una molécula en el punto (del campo de fuerzas exterior) de coordenadas x, y, z y de proyecciones del impulso sobre los ejes p_x, p_y, p_z . La ley de Maxwell — Boltzmann es el producto de dos funciones de distribución. Una de ellas define la distribución según las coordenadas, y la otra, según los impulsos (o velocidades).

La distribución de las moléculas en el espacio de seis dimensiones es dada por la ley de Maxwell — Boltzmann.

§ II.3.5. Recorrido libre medio de las moléculas

1°. Las moléculas de gas tienen dimensiones finitas (II.1.4.1°) y durante el movimiento térmico chocan unas con otras. Entre dos choques consecutivos, las moléculas, animadas de movimiento rectilíneo y uniforme, recorren ciertas distancias llamadas recorridos libres λ . Recibe el nombre de *recorrido libre medio* $\langle \lambda \rangle$ la distancia media que recorre una molécula sin chocar. El recorrido libre medio es característico de todo el conjunto de moléculas de gas a una presión p y una temperatura T dadas.

2°. En la unidad de tiempo cada molécula sufre un *número medio de colisiones* $\langle z \rangle$ igual a

$$\langle z \rangle = \pi d^2 n_0 \langle u_{\text{rel}} \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n_0 \langle u \rangle.$$

Aquí d es el diámetro eficaz de la molécula (II.1.4.1°); n_0 , el número de moléculas de gas que hay en la unidad de volumen; $\langle u_{\text{rel}} \rangle$, la velocidad relativa media de las moléculas (II.3.3.8°), y $\langle u \rangle$, su velocidad media aritmética (II.3.3.6°).

3°. La distancia media recorrida por una molécula en la unidad de tiempo es igual a $\langle u \rangle$. Por esto $\langle u \rangle = \langle \lambda \rangle \langle z \rangle$. El recorrido libre medio

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0}.$$

A temperatura constante, n_0 es proporcional a la presión del gas p (II.1.4.5°), por lo que, para un gas dado, el recorrido libre medio es inversamente proporcional a la presión

$$p_1 \langle \lambda_1 \rangle = p_2 \langle \lambda_2 \rangle = \text{const.}$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a dos estados del gas.

4°. Si de una fuente de partículas («horno molecular») se escapan moléculas y, mediante un diafragma, se forma un haz de ellas, será correcta la siguiente *ley de distribución de los recorridos libres* de las moléculas en ese haz:

$$N = N_0 e^{-x/(\lambda)},$$

donde N es el número de moléculas del haz que recorren sin chocar la distancia x ; y N_0 , el número de moléculas del haz cuando $x = 0$, es decir, a la salida del diafragma.

§ II.3.6. Ley de equipartición de la energía por grados de libertad. Energía interna de un gas perfecto

1°. *El número de grados de libertad de un cuerpo es el número mínimo de coordenadas (número de coordenadas independientes) que hay que tener para determinar totalmente la posición de dicho cuerpo en el espacio.*

Por ejemplo, un punto material que se mueva a lo largo de uno de los ejes de coordenadas, tendrá cierto grado de libertad. Este mismo punto, moviéndose sobre un plano, tendrá dos grados de libertad. La posición de un punto material que se mueva libremente en el espacio, se determinará por tres grados de libertad, es decir, por las coordenadas x, y, z . Un sólido indeformable (I.1.1.4°) tiene seis grados de libertad: su posición

en el espacio se determina por las tres coordenadas de su centro de masas (I.2.3.3°), los dos ángulos θ y φ que definen la dirección de un eje asociado al cuerpo que pasa por su centro de masas (fig. II.3.4) y, además, por el ángulo ψ que determina la dirección de un segundo eje asociado al cuerpo y perpendicular al primero. La variación de las tres coordenadas del centro de masas cuando se dan los ángulos θ, φ y ψ , corresponde al movimiento de traslación del sólido indeformable. Las coordenadas del centro de masas son los tres grados de libertad del movimien-

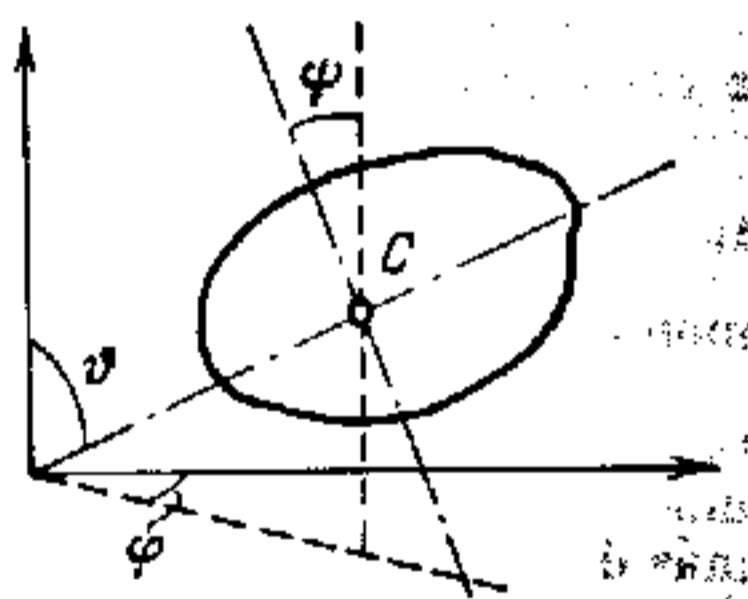


Fig. II.3.4.

to de traslación. Las variaciones de los ángulos θ , φ y ψ , cuando la posición del centro de masas no varía, hacen que el sólido indeformable gire. Por esto, los respectivos grados de libertad se dice que son de rotación. Para definir la posición en el espacio de un cuerpo no rígido, cuyas partes puedan desplazarse unas respecto de otras, se introducen los grados de libertad adicionales correspondientes al movimiento de oscilación (p. 5°).

2°. En una serie de problemas la *molécula de gas monoatómico* se puede considerar como un punto material (compárese con II.1.4.1°). Esto se basa en el hecho de que la masa de este átomo está prácticamente concentrada en el núcleo (VIII.1.1.1°), cuyas dimensiones son muy pequeñas. La molécula de gas monoatómico tiene tres grados de libertad de movimiento de traslación. Su energía cinética media $\langle w_c \rangle$ es igual a la energía cinética de una molécula que se mueva con velocidad igual a la cuadrática media v_c (II.3.2.4°):

$$\langle w_c \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Esta energía, en virtud del carácter caótico del movimiento térmico de las moléculas, se distribuye proporcionalmente entre los tres grados de libertad, de manera que, por término medio, a cada grado de libertad del movimiento de traslación de la molécula monoatómica le corresponde una misma energía cinética $\langle w_{c_0} \rangle = \frac{1}{3} \langle w_c \rangle = \frac{1}{2} kT$, donde k es la constante de Boltzmann y T , la temperatura absoluta.

3°. La *molécula de un gas diatómico* está formada, en primera aproximación, por dos átomos A y B unidos rígidamente por una ligadura incompresible e indeformable (fig. II.3.5). Además de los tres grados de libertad del movimiento de traslación de su centro de inercia C (I.2.3.3°), esta molécula tiene otros dos grados de libertad correspondientes al movimiento de rotación alrededor de los ejes $O_1 - O_1$ y $O_2 - O_2$. La rotación alrededor del tercer eje $O' - O'$ no hace aportación a la energía de la molécula, ya que el momento de inercia de los átomos (I.4.2.1°) respecto a dicho eje es infinitamente pequeño. De este modo, la molécula diatómica tiene cinco grados de libertad. Las moléculas formadas por tres y más átomos tienen 6 grados de libertad: tres de traslación y tres de rotación (fig. II.3.6).

4°. *Ley de equipartición de la energía por grados de libertad*: a cada grado de libertad de una molécula le corresponde, por término medio, una misma energía cinética, igual a $\frac{kT}{2}$. Si la

molécula tiene i grados de libertad, su energía media será

$$\langle w_c \rangle = i \frac{kT}{2}.$$

La ley de equipartición de la energía por grados de libertad lleva a la conclusión de la equivalencia de todos los grados de libertad de la molécula, es decir, todos ellos hacen la misma

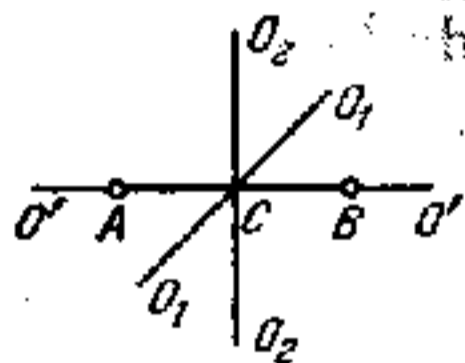


Fig. II.3.5.

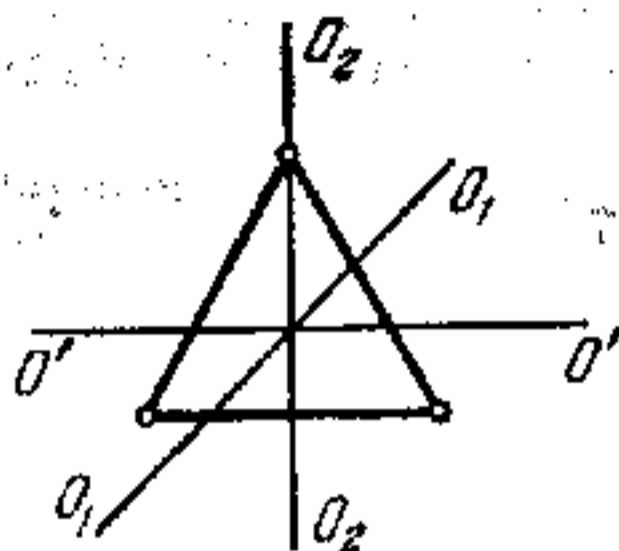


Fig. II.3.6.

aportación a su energía media. Esta conclusión tiene en realidad un campo de aplicación limitado y ha sido revisada en la estadística cuántica (VII.2.1.1°).

5°. Para las moléculas reales, no indeformables, los grados de libertad oscilatorios contribuyen a la energía de la molécula de acuerdo con la ley del punto 4°. A cada grado de libertad oscilatorio le corresponde no sólo la energía cinética w_c , sino también la energía potencial w_p . Para las oscilaciones armónicas (IV.1.1.3°), $\langle w_{c0} \rangle = \langle w_{p0} \rangle$. Según la ley del p. 4°.

$$\langle w_{c_0} \rangle = \langle w_{p_0} \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

donde $\langle w_{c_0} \rangle$ y $\langle w_{p_0} \rangle$ son, respectivamente, las energías medias cinética y potencial correspondientes a un grado de libertad del movimiento oscilatorio.

El valor medio $\langle w_0 \rangle$ de la energía total correspondiente a un grado de libertad del movimiento oscilatorio constituye

$$\langle w_0 \rangle = \langle w_{c_0} \rangle + \langle w_{p_0} \rangle = 2 \langle w_{c_0} \rangle = kT.$$

Esto es correcto para las oscilaciones armónicas de las partículas (átomos, moléculas o iones) que vibran en los nudos de las redes cristalinas de los sólidos (II.1.1.4°).

6°. La energía interna (II.2.1.2°) de un gas poliatómico es igual a la energía cinética de todas las formas de movimiento

de sus partículas. Para un mol de este gas

$$U = \langle w_c \rangle N_A = \frac{i}{2} k N_A T = i \frac{RT}{2},$$

donde N_A es el número de Avogadro (IX); i , el número de grados de libertad de la molécula (p. 4°), y R , la constante universal de los gases (II.1.4.4°).

§ II.3.7. Capacidades caloríficas de los gases monoatómicos, diatómicos y poliatómicos

1°. Las moléculas de un gas monoatómico tienen tres grados de libertad (II.3.6.2°) y, según (II.3.6.6°), la energía interna de un mol de gas $U = \frac{3}{2} k N_A T$.

La capacidad calorífica molar de este gas, a volumen constante (II.2.5.4°), será

$$C_{V\mu} = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R = 1246,5 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \approx 3 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}},$$

ya que $R \approx 2 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.

Para un gas poliatómico cuya molécula tenga i grados de libertad,

$$C_{V\mu} = \frac{iR}{2} = 4,16i \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \approx i \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

2°. La capacidad calorífica molar a presión constante $C_{p\mu}$ (II.2.5.7°—8°) de un gas cuya molécula tenga i grados de libertad será

$$C_{p\mu} = \frac{(i+2)R}{2} = 4,16(i+2) \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \approx (i+2) \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

La ley de equipartición de la energía por grados de libertad (II.3.6.4°) lleva a la conclusión de que las capacidades caloríficas de un gas dependen del número de grados de libertad de sus moléculas y no de la temperatura. Los datos experimentales contradicen estas conclusiones de la teoría clásica de las capacidades caloríficas. Las experiencias demuestran que al au-

mentar la temperatura crecen las capacidades caloríficas de los gases y, al disminuir la temperatura, decrecen.

3°. La explicación teórica de los datos experimentales sobre la dependencia de la capacidad calorífica respecto de la temperatura, en un amplio intervalo de temperaturas, se da en la *teoría cuántica de las capacidades caloríficas*. En esta teoría se toman en consideración los siguientes resultados de la descripción mecanocuántica de las propiedades de las moléculas diatómicas y poliatómicas:

a) De las cuatro partes que componen la energía w de la molécula*) (VI.2.5.2°),

$$w = w_{tr} + w_{el} + w_{osc} + w_{rot},$$

solamente w_{tr} (energía del movimiento de traslación del centro de masas de la molécula (I.2.3.3°)) varía de un modo continuo. Las energías de todas las formas de movimientos intramoleculares están cuantificadas y sólo toman valores discretos (VI.2.4.5°). Nos referimos aquí a las energías siguientes: energía del movimiento de los electrones de la molécula, w_{el} ; energía del movimiento oscilatorio de los núcleos en la molécula, w_{osc} ; y energía del movimiento de rotación de la molécula, w_{rot} .

b) Los movimientos intramoleculares pueden considerarse, en primera aproximación, como independientes. Así, si las amplitudes de las oscilaciones de los núcleos son pequeñas, pueden no tenerse en cuenta las variaciones de los momentos de inercia (I.4.2.1°) de las moléculas debidas a las oscilaciones, despreciando la influencia del movimiento oscilatorio intramolecular sobre la rotación de la molécula.

c) Cuando la sustancia se calienta a un grado no se produce variación de la energía de los movimientos electrónicos en la molécula. Los niveles energéticos vecinos de los electrones de la molécula están separados por una energía del orden de varios eV, a lo que corresponden temperaturas de varias decenas de millares de grados (p. 6°). Por esto, al resolver el problema de las capacidades caloríficas de los gases monoatómicos y poliatómicos, hasta llegar a las temperaturas más altas se pueden despreciar las energías de los movimientos electrónicos en la molécula.

4°. El movimiento oscilatorio de los núcleos en la molécula se define, en primera aproximación, como las oscilaciones de un

*) No se toma en cuenta la energía interna de la molécula, que no influye en su capacidad calorífica.

oscilador armónico (VI.1.5.4°) cuya masa m es igual a la masa reducida del sistema de átomos que oscilan $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (m_1 y m_2 son las masas de los átomos). La energía del movimiento oscilatorio de la molécula en este caso constituye

$$w_{osc} = h\nu_0 (n + 1/2),$$

donde n es un número cuántico que toma valores numéricos enteros: $n = 0, 1, 2, \dots$; ν_0 , la frecuencia propia de las oscilaciones (VI.1.5.5°); y h , la constante de Planck (IX). La energía del oscilador armónico, igual a $h\nu_0/2$ para $n = 0$, se conserva por muy profundo que sea el enfriamiento, incluso cuando $T \rightarrow 0$ (VI.1.5.6°). La diferencia de energías entre dos niveles oscilatorios $\Delta w_{osc} = h\nu_0$ y no depende del número cuántico. A temperaturas ambientes y más bajas es correcta la condición $\Delta w_{osc} \gg kT$. A estas temperaturas no se observan variaciones de la energía del movimiento oscilatorio de las moléculas. En los cálculos de las capacidades caloríficas de los gases en estas condiciones, los grados de libertad oscilatorios de las moléculas pueden no tenerse en cuenta. En el caso general, los movimientos oscilatorios hacen la aportación U_{osc} a la energía interna (II.2.1.2°), y $C_{V\mu}$ a la capacidad calorífica (II.2.5.2°). Para un mol,

$$U_{osc} = \frac{N_A h\nu}{2} \frac{\left(e^{\frac{h\nu}{2kT}} + e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \right)}{\left(e^{\frac{h\nu}{2kT}} - e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \right)},$$

$$C_{V\mu osc} = \frac{N_A k}{4} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \left(\frac{e^{\frac{h\nu}{2kT}} - e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{2} \right)^{-2}$$

donde T es la temperatura absoluta; k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°); y N_A , el número de Avogadro (IX). A altas temperaturas $\left(T \gg \frac{h\nu}{k} \right)$,

$$U_{osc} \approx N_A kT = RT \quad (C_{V\mu osc} \approx N_A k = R.)$$

Estos resultados coinciden con los clásicos que se obtienen de la ley de equipartición de la energía por grados de libertad (II.3.6.5°). La energía del oscilador en estas condiciones se puede considerar que varía de un modo continuo, puesto que

$\Delta w_{osc} \ll kT$. A temperaturas suficientemente bajas ($T \ll \frac{h\nu}{k}$)

$$U_{osc} \approx \frac{N_A h\nu}{2} + N_A h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad C_{V\mu osc} \approx N_A k \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

Cuando $T \rightarrow 0$ la energía $U_{osc} \rightarrow \frac{N_A h\nu}{2}$. Esta energía se llama *energía de oscilación (o vibración) del punto cero* del sistema (VI.1.5.6°). Si $T \rightarrow 0$ la capacidad calorífica $C_{V\mu osc} \rightarrow 0$ de acuerdo con el tercer principio de la termodinámica (II.4.8.4°). En la fig. II.3.7 se representa la dependencia $C_{V\mu osc} = f(T)$ para los gases diatómicos.

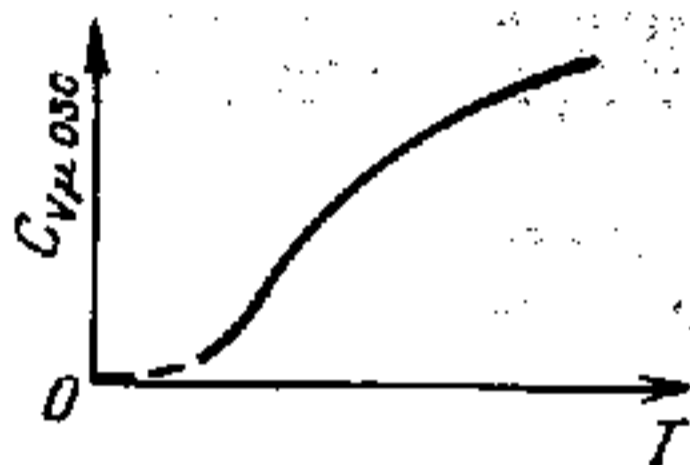


Fig. II.3.7.

5°. El movimiento de rotación de una molécula diatómica se puede considerar, en primera aproximación, como el movimiento de una pesa de gimnasia, rígida, que gira alrededor de

su centro de inercia con el momento de inercia $I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2$,

donde $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida de la molécula (m_1 y m_2 son las masas de los átomos), y r_0 es la distancia entre los átomos en la molécula. La energía de este sistema es

$$w_{rot} = \frac{h^2}{8\pi I} J(J+1),$$

siendo J un número cuántico que toma valores numéricos enteros: $J = 0, 1, 2, \dots$. La diferencia entre las energías de dos niveles de rotación vecinos es

$$\Delta w_{rot} = \frac{2h^2}{8\pi^2 I} (J+1).$$

La magnitud Δw_{rot} es de 800 a 1000 veces menor que Δw_{osc} .

A temperaturas ordinarias, para los gases diatómicos y algunos poliatómicos (vapor de agua, metano y otros), $\Delta w_{rot} \ll kT$ y se puede despreciar la cuantificación de la energía del movimiento de rotación de las moléculas. En estas condiciones,

para calcular la aportación que hace a la capacidad calorífica el movimiento de rotación, se puede utilizar la ley de equipartición de la energía por grados de libertad (II.3.6.4°).

La aportación del movimiento de rotación de las moléculas diatómicas a la energía interna y a la capacidad calorífica de un mol constituye:

a) A temperaturas altas $\left(T \gg \frac{h^2}{8\pi^2 k I} \right)$,

$$U_{\text{rot}} \approx N_A k T \left(1 - \frac{h^2}{24\pi^2 I k T} \right), \quad C_{V\mu\text{rot}} \approx N_A k = R.$$

La capacidad calorífica $C_{V\mu\text{rot}}$ a altas temperaturas tiene el valor que resulta de la ley de equipartición de la energía por grados de libertad (II.3.6.4°).

b) A temperaturas bajas $\left(T \ll \frac{h^2}{8\pi^2 I k} \right)$,

$$U_{\text{rot}} \approx \frac{3h^2 N_A}{4\pi^2 I} e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 I k T}},$$

$$C_{V\mu\text{rot}} \approx 3 \left(\frac{h^2}{4\pi^2 I} \right)^2 \frac{N_A}{k T^2} e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 I k T}}$$

cuando $T \rightarrow 0$ la capacidad calorífica $C_{V\mu\text{rot}} \rightarrow 0$ (p. 4°). La marcha general de la dependencia $C_{V\mu\text{rot}} = f(T)$ es semejante a la representada en la fig. II.3.7.

A medida que el gas se enfría, la disminución de la energía de sus moléculas conduce al decrecimiento del número de moléculas que pasan a niveles energéticos de rotación más altos. Cuando las temperaturas del gas son suficientemente bajas, es prácticamente imposible excitar la rotación de sus moléculas, por lo que los grados de libertad rotacionales no hacen aportación a la capacidad calorífica del gas. La capacidad calorífica de todos los gases a bajas temperaturas se hace igual a la de los gases monoatómicos, en los cuales las moléculas carecen de grados de libertad rotacionales.

6°. A temperaturas muy altas, del orden de decenas de millares de grados, se produce un aumento de la capacidad calorífica debido a que los valores de kT en estas condiciones se hacen comparables, por su orden de magnitud, con Δw_{el} , es decir, con la variación de la energía de los electrones al pasar de los

niveles de energía más bajos a niveles más altos. Además, a altas temperaturas hacen aportación a la capacidad calorífica los procesos de disociación e ionización de los gases.

§ II.3.8. Fenómenos de transporte en los gases

1°. Los fenómenos de transporte agrupan los procesos debidos a la no uniformidad de la densidad, temperatura o velocidad del desplazamiento ordenado de determinadas capas de la sustancia. La nivelación de las heterogeneidades hace que surjan fenómenos de transporte. A estos fenómenos pertenecen la difusión, el rozamiento interno y la conductibilidad calorífica.

2°. Los fenómenos de transporte en los gases y en los líquidos consisten en que en estas sustancias se produce el transporte ordenado y dirigido de la masa (difusión), del impulso (rozamiento interno) y de la energía interna (conductibilidad calorífica). Con esto, en los gases se altera el carácter totalmente caótico del movimiento de las moléculas y la distribución de Maxwell de las moléculas por velocidades (II.3.3.2°). La desviación de la ley de Maxwell se explica por el transporte orientado de las características físicas de la sustancia en los fenómenos de transporte. En los casos más simples de fenómenos de transporte unidimensionales, las magnitudes físicas que determinan estos fenómenos dependen solamente de una coordenada cartesiana.

3°. Se llama *difusión* el fenómeno de penetración mutua y de mezcla espontánea de las partículas de dos gases, líquidos o sólidos en contacto. En los gases químicamente puros a temperatura constante, la difusión se produce a consecuencia de la desigualdad de la densidad en distintas partes del volumen del gas. En las mezclas de gases la difusión es provocada por la diferencia de densidad de los gases en disversas partes del volumen de la mezcla.

En un gas químicamente homogéneo, el fenómeno de difusión consiste en el transporte de la masa de gas desde un punto donde su densidad es mayor, a otro donde ésta es menor. Dicho transporte cumple la *ley de Fick*:

$$m_s = -D \frac{dp}{dx}$$

Aquí m_s es el *flujo específico de masa*, igual numéricamente a la masa de la sustancia que se difunde en la unidad de tiempo a

través de una superficie plana, de área igual a la unidad, perpendicular a la dirección de transporte de la substancia; ρ , la densidad del gas; y D , el *coeficiente de difusión*. La derivada $\frac{d\rho}{dx}$ es igual numéricamente al gradiente de densidad, o sea, a la variación de la densidad por unidad de longitud. El coeficiente de difusión es igual numéricamente al flujo específico de masa para el gradiente unitario de densidad. El signo menos de la ley de Fick indica que el transporte de masa se efectúa en el sentido en que decrece la densidad.

Otra forma de la ley de Fick es

$$j = -D \frac{dn_0}{dx},$$

en la que $j = \frac{m_s}{m}$ es la densidad del flujo de moléculas en

la difusión, es decir, el número de moléculas que se difunden en la unidad de tiempo a través de la superficie indicada en el p. 3°; n_0 , la concentración de moléculas, igual al número de ellas por unidad de volumen; y m , la masa de una molécula, de modo que $\rho = n_0 m$.

La expresión para el coeficiente D que se obtiene en la teoría cinética de los gases constituye

$$D = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle,$$

donde $\langle u \rangle$ es la velocidad media aritmética del movimiento térmico de las moléculas (II.3.3.6°), y $\langle \lambda \rangle$, el recorrido libre medio (II.3.5.1°).

4°. Se da el nombre de *rozamiento interno* (*viscosidad*) al fenómeno que pone de manifiesto las fuerzas de rozamiento entre las capas de gas o de líquido que se mueven paralelamente una respecto de otra con velocidades de distinta magnitud. La capa que se mueve más de prisa actúa con fuerza acelerante sobre la que se mueve más despacio. Y viceversa, la capa que se mueve lentamente frena la capa de gas más rápida. Las fuerzas de rozamiento interno que aparecen entonces están dirigidas tangencialmente a la superficie de contacto de las capas. La causa de la viscosidad es la superposición del movimiento ordenado de las capas del gas con velocidades v distintas, y el movimiento caótico térmico de las moléculas con velocidades dependientes de la temperatura. El movimiento caótico de las moléculas hace que éstas pasen de la capa B , que se mueve con velocidad v_2 ,

a la capa A , que se mueve con velocidad v_1 (fig. II.3.8). Con esto se produce el transporte de los impulsos mv del movimiento ordenado de las moléculas. Si $v_1 > v_2$, las moléculas que antes estaban en la capa B , al encontrarse en la A chocan con las moléculas de esta capa, por lo que su movimiento ordenado se acelera, mientras que el movimiento ordenado de las moléculas de la capa A se retarda. Y al contrario, cuando las moléculas pasan de la capa A , que se mueve más de prisa, a la B , llevan grandes impulsos mv_1 , y las colisiones intermoleculares que se producen aceleran el movimiento de las moléculas de esta última capa.

El fenómeno de rozamiento interno viene definido por la ley de Newton:

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dn}$$

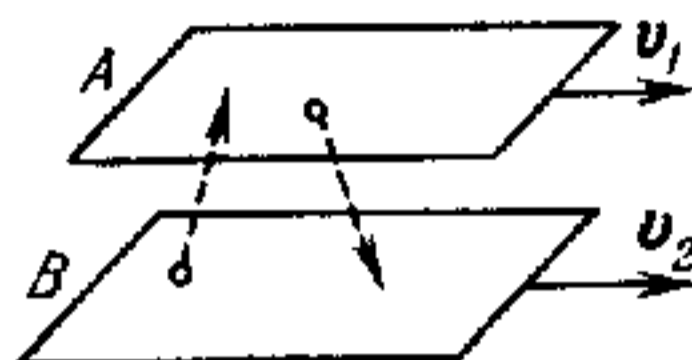


Fig. II.3.8.

donde τ es la intensidad del rozamiento, es decir, una magnitud numéricamente igual a la fuerza de rozamiento interno que actúa sobre la unidad de área de la superficie de la capa: dv/dn es el gradiente de velocidad, o sea, la variación de la velocidad del movimiento de las capas por unidad de longitud en dirección de la normal interna n a la superficie de la capa. La fuerza de rozamiento interno tiene sentido contrario al de la derivada, respecto de n , del vector velocidad v del movimiento del gas.

La magnitud η se llama *coeficiente de rozamiento interno* o *coeficiente dinámico de viscosidad*. Este coeficiente es numéricamente igual a la intensidad del rozamiento cuando el gradiente de velocidad es igual a la unidad.

Recibe el nombre de *coeficiente cinemático de viscosidad* la magnitud $\nu = \eta/\rho$ en la que ρ es la densidad de la substancia.

El coeficiente de rozamiento interno se calcula por la fórmula

$$\eta = \frac{1}{3} \langle u \rangle \langle \lambda \rangle \rho,$$

donde $\langle u \rangle$ es la velocidad media aritmética del movimiento térmico de las moléculas (II.3.3.6°), y $\langle \lambda \rangle$, el recorrido libre medio (II.3.5.1°). El coeficiente de rozamiento interno no depende de la presión (o de la densidad) del gas, puesto que $\langle \lambda \rangle \sim 1/\rho$. Esto se explica por el hecho de que al aumentar isométricamente la densidad del gas, por ejemplo, en dos veces, se duplica el

número de portadores de impulso, pero cada molécula (átomo) recorre sin chocar una distancia dos veces menor y transporta la mitad del impulso. Por esto, en conjunto, el transporte de impulso no varía.

5°. El tercer fenómeno de transporte —la *conductibilidad calorífica*— se efectúa con la condición de que exista una diferencia de temperaturas creada en el cuerpo en una dirección determinada. Por ejemplo, dos paredes opuestas de un recipiente con gas pueden tener distintas temperaturas, mantenidas por fuentes externas. Las moléculas del gas que se encuentren en partes diferentes del volumen tendrán distintas energías cinéticas medias (II.3.2.4°). En estas condiciones el movimiento térmico caótico de las moléculas originará un transporte dirigido de energía en forma de calor (II.2.2.6°). Las moléculas que pasan de las partes calientes del volumen del gas a las más frías, en el proceso de las colisiones moleculares ceden parte de su energía cinética media a las moléculas circundantes. Y viceversa, las moléculas que se mueven lentamente, al pasar de las partes menos calientes del volumen del gas a las más calientes, aumentan su energía cinética media a expensas de las colisiones con las moléculas que tienen grandes velocidades.

En la conductibilidad térmica unidimensional la temperatura del gas depende solamente de una coordenada $T = T(x)$, y el transporte de energía en forma de calor se efectúa a lo largo del eje OX , siendo válida la *ley (ecuación) de Fourier*

$$q_x = -K \frac{dT}{dx},$$

en la que q es el *flujo específico de calor*, magnitud física numéricamente igual a la energía transmitida en forma de calor por unidad de tiempo a través de una superficie plana, de área igual a la unidad, situada perpendicularmente a la dirección de transporte de energía. La magnitud K se llama *coeficiente de conductividad térmica*. Este coeficiente es numéricamente igual al flujo específico de calor cuando el gradiente de temperatura dT/dx (variación de la temperatura por unidad de longitud) es igual a la unidad. El signo menos en la ecuación de Fourier indica que en la conductibilidad calorífica la energía se transporta en dirección de disminución de la temperatura.

De acuerdo con la teoría cinética de los gases, el coeficiente de conductividad térmica

$$K = \frac{1}{3} (u) (\lambda) c_v \rho,$$

donde c_v es el calor específico del gas en el proceso isocoro (II.2.5.4°). Las demás notaciones se indican en el p. 4°. De esta fórmula se deduce que el coeficiente de conductividad térmica no depende de la densidad del gas. Esto se explica de un modo análogo a como en el p. 4° se explicó la causa de la independencia de η respecto de la densidad.

6°. Las leyes de los fenómenos de transporte, dadas en los pp. 3°—5°, pueden escribirse también de esta otra forma:

$$dM = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt, \quad dF = -\eta \frac{dv}{dn} dS, \quad dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt.$$

Aquí dM es la masa transportada por difusión en el tiempo dt a través de la superficie elemental dS perpendicular a la dirección en que se efectúa la difusión; dQ , la cantidad de energía en forma de calor que es transportada por conductibilidad calorífica en el tiempo dt a través de la misma superficie dS perpendicular al eje OX ; dF , la fuerza de rozamiento interno que actúa sobre un elemento de área dS de la superficie de la capa. Las notaciones de las demás magnitudes que figuran en las fórmulas se dan en los pp. 3°—5°.

7°. Entre los coeficientes de los fenómenos de transporte existen dependencias sencillas:

$$\eta = \rho D \quad \text{y} \quad \frac{K}{\eta c_v} = 1.$$

Por uno de los coeficientes de transporte, de estas fórmulas se pueden deducir todos los demás (conociendo los valores de ρ y

Tabla II.3.1

Fenómeno	Magnitud física transportada	Ecuación de transporte	Fórmula del coeficiente de transporte
Difusión	Masa	$dM = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt$	$D = \frac{1}{3} (u) (\lambda)$
Rozamiento interno (viscosidad)	Impulso	$dF = -\eta \frac{dv}{dn} dS$	$\eta = \frac{1}{3} (u) (\lambda) \rho$
Conductibilidad calorífica	Energía en forma de calor	$dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt$	$K = \frac{1}{3} (u) (\lambda) c_v \rho$

$\epsilon \nu$). A su vez, si se conocen los coeficientes de transporte, se pueden determinar unas características tan importantes del gas como el recorrido libre medio de sus moléculas (II.3.5.1°) y el diámetro eficaz de estas últimas (II.1.4.1°).

En la tabla II.3.1 se da el cuadro sinóptico de los fenómenos de transporte.

§ II.3.9. Nociones de las propiedades de los gases enrarecidos

1°. Un gas se dice que está *enrarecido* si su densidad es tan pequeña que el recorrido libre medio de sus moléculas $\langle \lambda \rangle$ puede compararse con las dimensiones lineales del recipiente que lo contiene. Este estado del gas se llama también *vacío*. Se distinguen los siguientes grados de enrarecimiento de un gas: vacío ultra alto ($\langle \lambda \rangle \gg d$), alto ($\langle \lambda \rangle > d$), medio ($\langle \lambda \rangle \leq d$) y bajo ($\langle \lambda \rangle \ll d$). En los tres primeros grados de vacío las propiedades de los gases enrarecidos difieren de las propiedades de los no enrarecidos. Esto puede verse en la tabla II.3.2 donde se dan algunas características de los distintos grados de vacío.

2°. En el estado de alto vacío (p. 1°) la disminución de la densidad del gas enrarecido conduce al correspondiente decrecimiento del número de partículas sin que varíe $\langle \lambda \rangle$. Por consiguiente, disminuye el número de portadores de impulso o de

Tabla II.3.2.

Característica	Vacío			
	Bajo	Medio	Alto	Ultra alto
Presión en mm Hg	760 - 1	$1 - 10^{-3}$	$10^{-3} - 10^{-7}$	10^{-8} y menos
Número de moléculas en la unidad de volumen (en m^{-3})	$10^{25} - 10^{23}$	$10^{23} - 10^{19}$	$10^{19} - 10^{13}$	10^{13} y menos
Dependencia, respecto de la presión, de los coeficientes K y η	No depende de la presión	La dependencia de p se define por el parámetro $\langle \lambda \rangle / d$	Directamente proporcional a la presión	La conductividad calorífica y la viscosidad no existen prácticamente

energía interna en los fenómenos de viscosidad y de conductibilidad calorífica. Los coeficientes de transporte en estos fenómenos son directamente proporcionales a la densidad del gas (compárese con II.3.8.4° y II.3.8.5°). En los gases muy enrarecidos no existe prácticamente rozamiento interno. En su lugar se produce el rozamiento externo del gas con las paredes del recipiente, debido a que los impulsos de las moléculas varían solamente en las interacciones con dichas paredes. En estas condiciones la intensidad del rozamiento en primera aproximación es proporcional a la densidad del gas y a la velocidad de su movimiento (compárese con II.3.8.4°). El flujo específico de calor en los gases muy enrarecidos es proporcional a la diferencia de temperaturas y a la densidad del gas (compárese con II.3.8.5°).

3°. El estado estacionario de un gas enrarecido que se encuentra en dos recipientes unidos entre sí por un tubo delgado es posible a condición de que sean iguales los flujos de partículas contrapuestos que van de un recipiente a otro: $n_1 \langle u_1 \rangle = n_2 \langle u_2 \rangle$, donde n_1 y n_2 son, respectivamente, el número de moléculas por cm^3 que hay en ambos recipientes, y $\langle u_1 \rangle$ y $\langle u_2 \rangle$, sus velocidades medias aritméticas (II.3.3.6°).

Si T_1 y T_2 son las temperaturas del gas en los recipientes, las condiciones de estacionaridad antedichas se pueden escribir en forma de una ecuación que expresa el efecto Knudsen:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

donde p_1 y p_2 son las presiones del gas en los dos recipientes

Capítulo II.4. Segunda ley (segundo principio) de la termodinámica

§ II.4.1. Transformaciones cerradas (ciclos).

Ciclo de Carnot

1°. Se llama *transformación cerrada* o *ciclo* el conjunto de procesos termodinámicos (II.1.3.7°) como resultado de los cuales un sistema retorna a su estado inicial. En los diagramas de estado $p - V$, $p - T$ y otros, las transformaciones cerradas en

equilibrio (II.1.3.7°) se representan por medio de curvas cerradas, ya que a los dos estados idénticos —inicial y final— de la transformación cerrada les corresponde en el diagrama un mismo punto representativo.

El sistema termodinámico que efectúa una transformación cerrada y que intercambia energía con otros cuerpos recibe el nombre de *agente de transformación* o *substancia activa*. Este agente, por lo general, es un gas.

2°. Una transformación cerrada arbitraria, en equilibrio, $C_1aC_2bC_1$ (fig. II.4.1), efectuada por un gas perfecto se puede

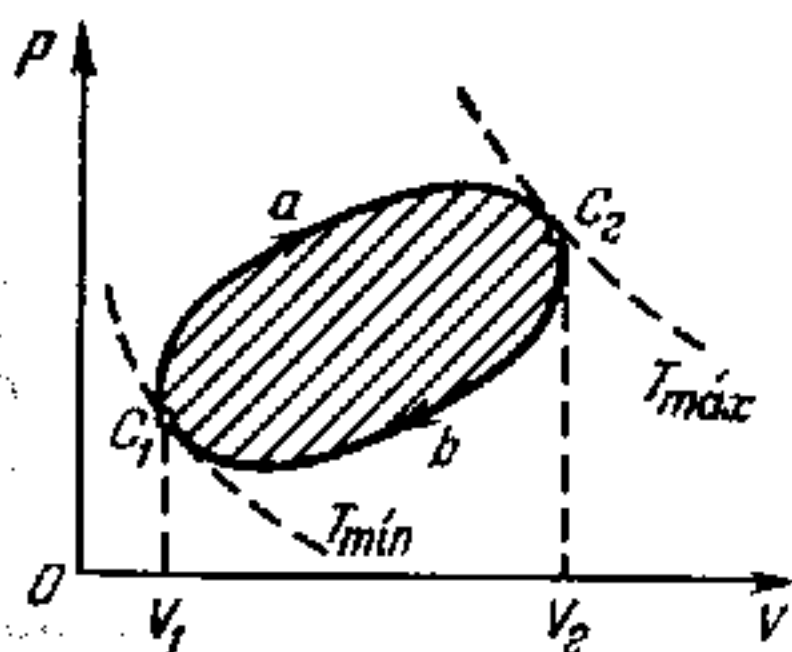


Fig. II.4.1.

dividir en una transformación de expansión del gas desde el estado C_1 hasta el estado C_2 (curva C_1aC_2), y una transformación de compresión del gas desde el estado C_2 hasta el estado C_1 (proceso C_2bC_1). Durante la expansión, el gas realiza el trabajo positivo A_1 , que se mide por el área de la figura $V_1C_1aC_2V_2$ (II.2.4.2°). La compresión del gas se efectúa bajo la acción de fuerzas externas, las cuales realizan un trabajo positivo $A'_2 = -A_2$ que se mide por el área de la figura $V_1C_1bC_2V_2$. Como $A_1 > A'_2$ (fig. II.4.1), el gas realiza, durante un ciclo, el trabajo positivo $A = A_1 + A_2 = A_1 - A'_2$ que se mide por el área limitada por la curva de la transformación $C_1aC_2bC_1$. Esta área es la rayada en la fig. II.4.1.

3°. Se llama *ciclo directo* la transformación cerrada en la cual el sistema realiza trabajo positivo $A = \oint p dV > 0$. La curva cerrada del diagrama $p - V$, representativa del ciclo directo, se describe en el sentido de las agujas del reloj (fig. II.4.1). Un ejemplo de ciclo directo es el efectuado por el agente de transformación de un motor térmico. En este motor el agente de transformación (p. 1°) recibe energía en forma de calor (II.2.2.1°) de fuentes externas, y parte de él lo cede en forma de trabajo (II.2.2.1°) (véase el p. 5°).

4°. El *ciclo inverso* es una transformación cerrada en la que el sistema realiza trabajo negativo $A = \oint p dV < 0$. En el dia-

grama $p - V$ se representa el ciclo inverso en forma de una curva cerrada recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj. Un ejemplo de ciclo inverso es el ciclo del agente de transformación de una instalación refrigeradora. En esta instalación el agente de transformación recibe energía en forma de trabajo y transmite energía en forma de calor de un cuerpo frío a otro más caliente (véase el p. 5°).

5°. En virtud de que la variación total de la energía interna del gas, resultante de una transformación cerrada, es nula (II.2.1.3°), la primera ley de la termodinámica (II.2.3.1°) tiene para este proceso la forma

$$Q = \Delta U + A = A,$$

en la que Q es la cantidad total de calor que se le comunica al gas en la transformación cerrada, y A es el trabajo que realiza dicho gas en esta transformación.

En el ciclo directo (p. 3°) $Q > 0$ y $A > 0$ y el gas realiza trabajo a expensas del calor que se le suministra. En el ciclo inverso (p. 4°), sobre el gas se realiza el trabajo $A' = -A$ ($A > 0$) y del gas se extrae la cantidad de calor equivalente a este trabajo.

6°. Se da el nombre de *ciclo de Carnot* a la transformación cerrada que representa la fig. II.4.2. El *ciclo directo de Carnot* consta de cuatro transformaciones consecutivas: la expansión isotérmica $1-1'$ a la temperatura T_1 ($T_1' = T_1$), la expansión adiabática $1'-2$, la compresión isotérmica $2-2'$ a la temperatura T_2 ($T_2' = T_2$) y la compresión adiabática $2'-1$.

7°. Prácticamente el ciclo directo de Carnot lo efectúa un gas encerrado en un recipiente con émbolo móvil. En la transformación $1-1'$ el gas se encuentra en contacto térmico y en equilibrio con un *foco caliente* (*emisor de calor*) cuya temperatura T_1 es constante*). El gas recibe del foco caliente cierta cantidad de calor Q_1 ($Q_1 > 0$). Se considera que con esto la temperatura del foco caliente no varía, lo que en rigor es posible si su capacidad calorífica es infinita. En la transformación $1'-2$ el gas se aísla térmicamente y su expansión es adiabática**) (II.2.5.10°).

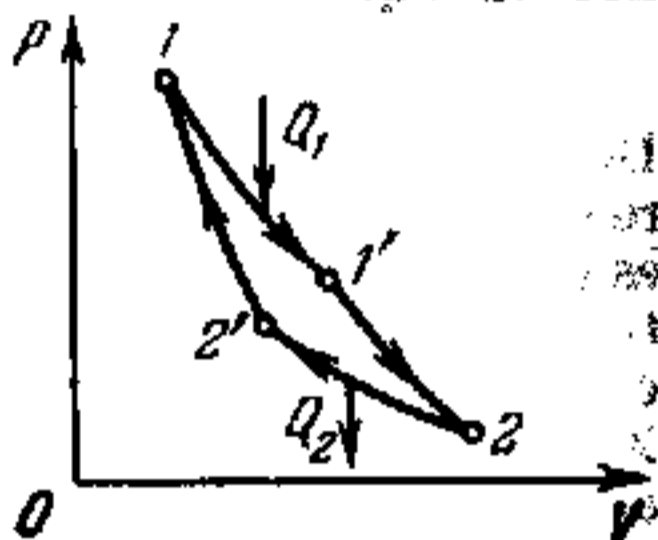


Fig. II.4.2.

*) Por ejemplo, un gran depósito de agua.

**) Por ejemplo, el cilindro con el gas se cubre con una gruesa capa de fieltro.

En el tramo 2—2' el gas se pone en contacto térmico con un *foco frío* (receptor de calor) de temperatura constante T_2 ($T_2 < T_1$). El gas se comprime isotérmicamente y cede al foco frío cierta cantidad de calor $-Q_2$ (suponiendo que Q es la cantidad de calor que el gas recibe de dicho foco). La capacidad calorífica del foco frío se considera infinitamente grande. En el estado 2' vuelve a aislarse térmicamente el gas y se comprime adiabáticamente hasta el estado inicial 1.

8°. El trabajo que realiza el gas en el ciclo directo de Carnot en equilibrio (II.1.3.7°) es:

$$A = Q = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|.$$

De esta fórmula se deduce que $A < Q_1$, es decir, el trabajo que realiza el agente de transformación (p. 1°) en el ciclo de Carnot es menor que la energía que recibe del foco caliente en la magnitud de la energía que cede al foco frío en forma de calor. Esto es correcto para una transformación cerrada arbitraria: el trabajo A realizado durante el ciclo es siempre menor que la suma Q_{sum} de todas las cantidades de calor suministradas al agente de transformación por los focos calientes.

En el ciclo directo de Carnot se basa el funcionamiento de las máquinas térmicas.

9°. Se llama *rendimiento térmico* η la relación entre el trabajo A realizado por el agente de transformación en un ciclo directo, y la suma Q_{sum} de todas las cantidades de calor suministradas por los emisores de calor a dicho agente durante el ciclo

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{sum}}}.$$

La magnitud η caracteriza el grado de perfección de un motor térmico.

10°. El rendimiento térmico del ciclo directo de Carnot en equilibrio, realizado por un gas perfecto, es igual a

$$\eta_K = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

La magnitud η_K sólo depende de la relación de las temperaturas de los focos frío T_2 y caliente T_1 .

11°. El ciclo inverso de Carnot se ha representado en la fig. II.4.3. Durante la compresión isotérmica que ocurre en la transformación 1'—1, se extrae del gas la cantidad de calor Q_1 a la temperatura T_1 que permanece constante. En la transformación 2'—2 de expansión isotérmica a la temperatura $T_2 < T_1$

se le cede al gas la cantidad de calor Q_2 . En el ciclo inverso de Carnot $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$, y el trabajo A realizado por el gas durante un ciclo es negativo: $A = (Q_1 + Q_2) < 0$. Esta conclusión es válida para cualquier ciclo inverso. Si un agente de transformación realiza un ciclo inverso, en este caso se puede transportar energía en forma de calor (II.2.2.1°) de un cuerpo frío a otro caliente, a expensas del trabajo correspondiente que realizan las fuerzas externas. Esta es la base del funcionamiento de las instalaciones frigoríficas. Una máquina frigorífica será tanto más económica cuanto menor sea el trabajo $A' = -A$ que gasten las fuerzas externas en extraer del cuerpo frío la cantidad de calor Q_2 :

$$Q_2 = A - Q_1 =$$

$$= A - \frac{A}{\eta} = -\frac{(1-\eta)}{\eta} A',$$

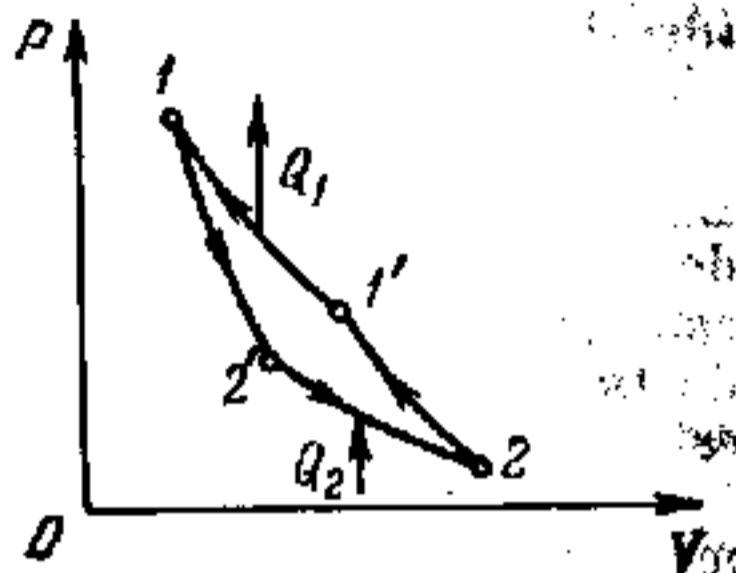


Fig. II.4.3.

donde η es el rendimiento térmico del ciclo directo entre las mismas temperaturas T_1 y T_2 (pp. 3° y 4°).

§ II.4.2. Transformaciones reversibles e irreversibles

1°. En termodinámica se dice que una transformación es reversible si al efectuarla un sistema termodinámico (II.1.3.1°), primero en sentido directo y después en sentido inverso, tanto el propio sistema como todos los cuerpos externos que interactúan con él retornan al estado inicial. En otras palabras, durante la transformación inversa, el sistema termodinámico vuelve a su estado inicial de tal modo que en el medio que lo rodea no queda ninguna variación. La condición necesaria para que una transformación termodinámica sea reversible, consiste en que todos los estados sucesivos en ella sean de equilibrio (II.1.3.3°). No obstante, el equilibrio del proceso no significa ni mucho menos, que el mismo es reversible.

Ejemplo 1. Es un proceso reversible el movimiento mecánico de un cuerpo en el vacío en completa ausencia de las fuerzas de rozamiento. Supongamos, por ejemplo, que en estas condiciones se lanza un proyectil en el campo de la gravedad (I.6.2.1°),

con cierta velocidad inicial y con un ángulo de inclinación determinado respecto del horizonte. Este proyectil, después de describir una trayectoria parabólica, caerá sobre la tierra en un punto establecido. Si ahora el proyectil se lanza desde este punto, con la misma inclinación e igual velocidad inicial, pero en sentido contrario, él describirá la misma trayectoria en sentido inverso y caerá en el punto inicial. Cualquier estado intermedio del proyectil en su movimiento directo e inverso será totalmente idéntico. La *reversibilidad de los movimientos mecánicos* significa que éstos son simétricos respecto de la sustitución del futuro por el pasado, es decir, con relación al cambio de signo del tiempo. La reversibilidad de los movimientos mecánicos se desprende de las ecuaciones diferenciales del movimiento (I.2.4.4°). Al cambiar en ellas el signo del tiempo, también cambia el signo de la velocidad del cuerpo, pero la aceleración que figura en estas ecuaciones conserva su signo.

Ejemplo 2. Otro proceso reversible son las oscilaciones inamortiguadas que efectúa en el vacío un cuerpo suspendido de un muelle perfectamente elástico (IV.1.2.3°). El sistema «cuerpo — muelle» es conservativo (I.3.1.7°). Sus oscilaciones mecánicas no provocan variaciones de la energía del movimiento caótico térmico de las partículas del sistema. Sólo las variaciones de la configuración y de la velocidad del movimiento del sistema hacen que varíe su estado. Pero estas variaciones se repiten exactamente al cabo del período T de las oscilaciones (IV.1.1.2°), y las condiciones de reversibilidad del proceso (p. 1°) se cumplen.

2°. Toda transformación que no satisface las condiciones de reversibilidad (p. 1°) se llama *irreversible*.

Ejemplo 1. Es irreversible el proceso directo de retardación de un cuerpo por la acción de las fuerzas de rozamiento. Si dichas fuerzas son las únicas que actúan sobre el cuerpo, su velocidad disminuye y éste al fin y al cabo se para. La energía del movimiento mecánico del cuerpo en conjunto disminuye y se gasta en aumentar la energía del movimiento caótico de las partículas del propio cuerpo y del medio que lo rodea. La energía interna (II.2.1.2°) del cuerpo y del medio aumenta y éstos se calientan a expensas de la acción de las fuerzas de rozamiento. La transformación directa considerada en el p. 2° transcurre espontáneamente: se efectúa en ausencia de toda clase de procesos en que participen los cuerpos circundantes. Para que se produzca la transformación inversa y el sistema retorne a su estado inicial es necesario que el cuerpo parado se ponga de nuevo en movimiento a costa de enfriarse tanto él como el medio que lo rodea. Pero las experiencias demuestran que el movimiento térmico

caótico de las partículas de un cuerpo no se puede convertir espontáneamente en movimiento ordenado de todas las partículas de dicho cuerpo en conjunto. Para que se efectúe este movimiento es preciso un *proceso compensador* adicional de enfriamiento del cuerpo y el medio hasta la temperatura inicial. En este caso al foco frío le será cedida la cantidad de calor Q , y sobre el cuerpo se realizará el trabajo $A' = Q$.

Así, pues, la realización sucesiva de estas transformaciones, directa e inversa, hace que el sistema «cuerpo — medio» vuelva a su estado inicial, pero el estado de los cuerpos externos varía. Por esto todas las transformaciones acompañadas de rozamiento son irreversibles.

Ejemplo 2. El proceso de intercambio de calor (II.2.2.4°) entre cuerpos en contacto a distinta temperatura se produce espontáneamente. Pero el proceso inverso de calentamiento de un cuerpo a expensas del enfriamiento de otro que tenga al principio la misma temperatura que el primero, no se puede producir espontáneamente. Para efectuar este proceso se utiliza un dispositivo refrigerador (II.4.1.11°). El proceso de intercambio de calor, siendo finita la diferencia de temperaturas, es irreversible.

§ II.4.3. Segunda ley (segundo principio) de la termodinámica

1°. La referencia a los resultados de las experiencias para demostrar la irreversibilidad de los procesos de intercambio de calor y de movimiento con rozamiento (II.4.2.2°—3°) no es casual. El primer principio de la termodinámica (II.2.3.1°) no puede describir completamente las transformaciones termodinámicas. Una limitación esencial del primer principio es la imposibilidad de predecir con su ayuda el sentido en que transcurre una transformación termodinámica. Desde el punto de vista de este primer principio, toda transformación que no infrinja la ley de conservación de la energía, es posible. En particular, es posible el proceso de transmisión espontánea de energía en forma de calor de un cuerpo menos caliente a otro más caliente. También es posible una transformación cuyo único resultado sería la obtención de cierta cantidad de calor de un cuerpo y su transformación en trabajo equivalente a ella. Todo dispositivo de acción periódica, basado en la primera ley de la termodinámica, que realice trabajo a expensas del enfriamiento de una

fuente de calor (por ejemplo, la energía interna de los grandes depósitos de agua), se llama *móvil perpetuo de segunda especie*.

2°. Se da el nombre de *segundo principio (ley) de la termodinámica* a la afirmación, deducida experimentalmente, de que es imposible construir un móvil perpetuo de segunda especie (p. 1°). Las dos formas más usadas de enunciar el segundo principio, equivalentes entre sí, son:

a) es imposible todo proceso cuyo único resultado sea transformar todo el calor obtenido de un cuerpo cualquiera en un trabajo equivalente a él;

b) es imposible todo proceso cuyo único resultado sea la transmisión de la energía en forma de calor de un cuerpo menos caliente a otro más caliente.

3°. Del segundo principio de la termodinámica se deduce que el trabajo y el calor no son dos formas equivalentes de transmisión de energía. La transformación del movimiento ordenado de un cuerpo en conjunto, en movimiento caótico de sus partículas, es irreversible y se efectúa sin procesos compensadores (II.4.2.3°). En cambio, la transformación del movimiento desordenado de las partículas de un cuerpo, en movimiento ordenado de éste en conjunto, requiere que al mismo tiempo se realice algún proceso compensador*).

Ejemplo 1. Cuando un gas perfecto se expande isotérmicamente, se efectúa un trabajo equivalente a la cantidad de calor suministrada al gas (II.2.5.9°). El calor recibido por el gas se transforma totalmente en trabajo equivalente. Pero con esto el gas no retorna a su estado inicial. La transformación del calor en trabajo*) no es el único resultado de la expansión isotérmica del gas perfecto.

Ejemplo 2. Una máquina térmica que funcione según el ciclo directo de Carnot (II.4.1.8°) realizará trabajo a expensas del calor suministrado por el foco caliente. Pero una parte de la cantidad de calor absorbida por el gas es transmitida al foco frío (II.4.2.7°), por lo que el trabajo realizado durante un ciclo no será equivalente a toda la cantidad de calor cedida al agente de transformación.

Ejemplo 3. En las instalaciones de refrigeración que funcionan de acuerdo con el ciclo inverso de Carnot (II.4.1.11°), del cuerpo frío se transmite cierta cantidad de calor al cuerpo más caliente. Pero al mismo tiempo las fuerzas exteriores realizan trabajo y, por consiguiente, existe un proceso compensador.

*) A veces esta transformación se llama, no muy correctamente, «transformación del calor en trabajo».

4°) *Teorema de Carnot*: el rendimiento térmico (11.4.1.9°) del ciclo reversible de Carnot no depende de la composición del agente de transformación y siempre puede ser expresado por la fórmula (11.4.1.10°)

$$\eta_K = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

El rendimiento térmico del ciclo irreversible de Carnot $\eta_{K_{ir}}$ es siempre menor que el rendimiento térmico η_K del ciclo reversible de Carnot realizado entre las mismas temperaturas T_1 y T_2 ,

$$\eta_{K_{ir}} < \eta_{K_{rev}},$$

El rendimiento térmico de un ciclo reversible cualquiera no puede ser nunca mayor que el rendimiento térmico η_K del ciclo reversible de Carnot efectuado valiéndose de un foco caliente y de un foco frío a las temperaturas T_1 y T_2 ,

$$\eta_{rev} \leq \eta_K = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

5°. Con la ayuda del teorema de Carnot (p. 4°) se establece la *escala termodinámica de temperaturas*. De la fórmula del p. 4° se deduce que $\frac{T_2}{T_1} = -\frac{Q_2}{Q_1}$ o, como $Q_2 < 0$, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{|Q_2|}{Q_1}$.

Para comparar las temperaturas T_1 y T_2 de dos cuerpos es necesario efectuar un ciclo reversible de Carnot en que estos cuerpos hagan las veces de foco caliente y foco frío. Entonces, por la razón de los valores numéricos de las cantidades de calor cedidas (o absorbidas) por ellos, se determina la razón de las temperaturas de los cuerpos. El resultado de la comparación de las temperaturas no depende de la composición química del agente de transformación que efectúa el ciclo (p. 4°). Por esto, la escala termodinámica de temperaturas no depende de las propiedades del cuerpo termométrico (11.1.3.4°) y en este sentido posee una gran coincidencia. Pero como todas las transformaciones termodinámicas reales son irreversibles, la comparación de las temperaturas de los cuerpos por el procedimiento antes indicado es prácticamente irrealizable y sólo tiene un valor esencialmente teórico.

§ II.4.4. Entropía y energía libre

1°. La relación entre la cantidad de calor Q absorbida por un cuerpo en una transformación isotérmica, y la temperatura T del cuerpo donador de calor, se llama *cantidad de calor reducida* Q^* , es decir, $Q^* = \frac{Q}{T}$. Cuando el cuerpo se calienta ($Q > 0$),

Q^* es positiva, y cuando se enfría ($Q < 0$), Q^* es negativa.

La cantidad de calor reducida que se le cede al cuerpo en un trozo infinitesimal de transformación arbitraria es igual a $\delta Q/T$, donde T es la temperatura correspondiente al cuerpo donador de calor*). La cantidad de calor reducida Q_{1-2}^* para un tramo arbitrario $1 \rightarrow 2$ de la transformación $C_1 C_2$ será:

$$Q_{1-2}^* = \int_{C_1}^{C_2} \frac{\delta Q}{T}$$

2°. La cantidad de calor reducida Q_{rev}^* que se le cede a un cuerpo en una transformación cerrada cualquiera es nula:

$$Q_{\text{rev}}^* = \oint_{\text{rev}} \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Aquí T es la temperatura a que se le comunica al cuerpo la cantidad elemental de calor δQ . De la expresión anterior se deduce que la función $\delta Q/T$ es la diferencial total de cierta función S [a diferencia de δQ , que no es una diferencial total (II.2.4.3°)]:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}}$$

La función de estado unívoca S (II.2.1.3°) cuya diferencial total se determina por la última fórmula, se llama *entropía* del cuerpo. De la fórmula se deduce que dS y δQ tienen el mismo signo. Por consiguiente, el carácter de variación de la entropía puede servir para determinar en qué sentido se realiza el intercambio de calor (II.2.2.4°). Cuando el cuerpo se calienta ($\delta Q > 0$), su entropía crece ($dS > 0$), y cuando se enfría ($\delta Q < 0$), su entropía decrece ($dS < 0$).

*) En el caso de una transformación reversible, T coincide con la temperatura del cuerpo que efectúa la transformación.

Ejemplo. La diferencial total de la entropía de un gas perfecto puede ser expresada por la fórmula

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{rev}} = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} \frac{dT}{T} + \frac{M}{\mu} R \frac{dV}{V},$$

donde M es la masa de gas; μ , su masa molar (II.1.4.3°); $C_{V\mu}$, la capacidad calorífica molar del gas a volumen constante (II.2.5.4°); R , la constante universal de los gases (II.1.4.4°); T , la temperatura del gas; y V , su volumen. Este resultado se obtiene utilizando el primer principio de la termodinámica (II.2.3.1°) para δQ , teniendo en cuenta la ecuación de Mendeléiev — Clapeyron (II.1.4.4°).

La variación $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ de la entropía del gas perfecto, al pasar del estado 1 al estado 2, no depende del tipo de la transformación $1 \rightarrow 2$:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{M}{\mu} \left(C_{V\mu} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

3°. He aquí algunas de las propiedades más importantes de la entropía de los sistemas cerrados (II.2.1.7°):

a) La entropía de un sistema cerrado que realiza el ciclo reversible de Carnot (II.4.1.6°) no varía:

$$\Delta S_{\text{rev}} = 0; \quad S = \text{const.}$$

b) La entropía de un sistema cerrado que realiza el ciclo irreversible de Carnot aumenta:

$$\Delta S_{\text{ir}} > 0.$$

c) La entropía de un sistema cerrado, cualesquiera que sean las transformaciones que ocurran en él, no decrece:

$$\Delta S \geq 0.$$

Si el estado de un sistema cerrado sufre una variación elemental, la entropía del sistema no disminuye: $dS \geq 0$.

El signo igual se refiere a las transformaciones reversibles, y el de desigualdad, a las irreversibles. El punto c) es uno de los enunciados de la segunda ley (principio) de la termodinámica.

4°. Para una transformación arbitraria que se realice en un sistema termodinámico (II.1.3.1°) es válida la relación

$$\delta Q \leq T dS,$$

donde T es la temperatura del cuerpo que le comunica al sistema termodinámico la energía δQ en el transcurso de una variación infinitesimal del estado del sistema. Utilizando para δQ el primer principio de la termodinámica (II.2.3.1°), la desigualdad anterior se puede escribir de una forma que unifica los principios primero y segundo de la termodinámica:

$$TdS \geq dU + \delta A.$$

5°. Para un proceso reversible

$$\delta A = - (dU - T dS),$$

o bien

$$\delta A = - d (U - TS) - S dT = - dF - S dT,$$

donde

$$F = U - TS$$

se llama *energía libre*. La energía libre es la diferencia entre dos funciones de estado (II.1.3.8°) y, por lo tanto, también es una función de estado del sistema termodinámico.

Si el sistema realiza una transformación isotérmica reversible, $dT = 0$ y $\delta A_{\text{isot}} = - dF$. Al pasar el sistema del estado 1 al estado 2 en una transformación isotérmica reversible

$$A_{\text{isot}} = E_1 - F_2.$$

La disminución de la energía libre es la medida del trabajo que realiza el sistema (cuerpo) durante la transformación isotérmica reversible.

6°. De la fórmula $U = F + TS$ se infiere que la energía interna del cuerpo (sistema) es igual a la suma de la energía libre F más la *energía ligada* TS . La energía ligada es la parte de la energía interna del cuerpo (sistema) que no puede ser transferida en forma de trabajo en la transformación isotérmica. En este sentido, dicha parte de la energía interna está «desvalorizada». La energía ligada es tanto mayor cuanto mayor es la entropía del cuerpo (sistema). Por esto la entropía del cuerpo (sistema) sirve de medida de su energía «desvalorizada».

§ II.4.5. Interpretación estadística de la segunda ley de la termodinámica

1°. La afirmación hecha por la segunda ley (principio) de la termodinámica, acerca de la imposibilidad de disminuir la entropía en un sistema aislado (II.4.4.3°), se puede interpretar

estadísticamente, basándose en la teoría cinético-molecular de la estructura de la sustancia, con ayuda de la *fórmula de Boltzmann*:

$$S = k \ln P + \text{const.},$$

donde S es la entropía del sistema; k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°); y P , la probabilidad termodinámica del estado.

2°. La *probabilidad termodinámica* P de un estado del cuerpo (sistema) es igual al número de todas las distribuciones posibles de las partículas según las coordenadas y velocidades correspondientes al estado termodinámico dado (II.1.3.3°). Por definición, P es un número entero no menor que la unidad ($P \geq 1$). De la fórmula de Boltzmann (p. 1°) se desprende la siguiente interpretación estadística de la segunda ley de la termodinámica:

La probabilidad termodinámica del estado de un sistema cerrado, con todas las transformaciones que ocurran en él, no puede decrecer. En cualquier proceso que transcurra en un sistema cerrado y lo transforme de un estado 1 a un estado 2, la variación ΔP de la probabilidad termodinámica P es positiva o igual a cero: $\Delta P = P_2 - P_1 \geq 0$.

En el caso de una transformación reversible $\Delta P = 0$, es decir, la probabilidad termodinámica P es constante. Si se efectúa una transformación irreversible, $\Delta P > 0$ y P aumenta. Esto significa que el proceso irreversible transforma el sistema de un estado menos probable a un estado más probable, el cual en el límite es un estado de equilibrio (II.1.3.3°).

3°. El segundo principio de la termodinámica, siendo una ley estadística, describe las regularidades del movimiento caótico del gran número de partículas que componen el sistema cerrado. En los sistemas formados por un número pequeño de partículas, se observan fluctuaciones (II.4.6.1°) que son desviaciones de la segunda ley de la termodinámica.

4°. El segundo principio de la termodinámica, establecido para los sistemas cerrados que se encuentran en la Tierra, no puede hacerse extensivo al Universo infinito. Tal extensión lleva a la conclusión, errónea desde los puntos de vista filosófico y físico, de que la temperatura de todos los cuerpos del Universo deberá igualarse. Con esto todas las formas de movimiento, excepto el movimiento térmico caótico, deberán cesar y llegará la llamada «muerte térmica» del Universo. En realidad, debido a la infinitud del Universo, en algunas de sus partes son inevitables las fluctuaciones (II.4.6.1°) que infringen el equilibrio térmico. La duración y la magnitud de estas fluctuaciones pueden

ser muy grandes. Se ha demostrado que para el Universo infinito no puede existir el estado de equilibrio correspondiente a la «muerte térmica».

§ II.4.6. Fluctuaciones

1°. En los sistemas compuestos por un número de partículas relativamente pequeño son posibles grandes desviaciones de los valores medios de algunas magnitudes físicas características del sistema. Estas desviaciones reciben el nombre de *fluctuaciones* de las magnitudes físicas. Por ejemplo, en los gases fuertemente enrarecidos, la densidad en distintas partes del volumen del gas puede diferir de la densidad media correspondiente al estado de equilibrio de determinados valores de p y T . Del mismo modo pueden observarse desviaciones casuales de la temperatura T , de la presión p y de otras magnitudes físicas.

2°. Si M es el valor verdadero de una magnitud física, y $\langle M \rangle$ es su valor medio, entonces la magnitud ΔM ($\Delta M = M - \langle M \rangle$) y su valor medio $\langle \Delta M \rangle = \langle M - \langle M \rangle \rangle$ no se pueden medir a partir de la fluctuación de la magnitud M . La magnitud ΔM no es constante en función del tiempo, y la magnitud

$$\langle \Delta M \rangle = \langle M \rangle - \langle M \rangle = 0 \text{ *).$$

La última igualdad se deduce de que las desviaciones de la magnitud M respecto de $\langle M \rangle$ ocurren hacia ambos lados — hacia el de los valores mayores que el medio y hacia el de los valores menores que el medio — con la misma frecuencia.

3°. La medida de las fluctuaciones de la magnitud física M es el valor medio del cuadrado de la diferencia ΔM , que se llama a *fluctuación cuadrática*,

$$\langle (\Delta M)^2 \rangle = \langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle = \langle M^2 \rangle - (\langle M \rangle)^2 \text{ **).$$

La fluctuación cuadrática es esencialmente positiva o igual a cero: $\langle (\Delta M)^2 \rangle \geq 0$.

*) Aquí se aplica la afirmación de que el valor medio de una magnitud constante $\langle M \rangle$ coincide con esta misma magnitud.

** Dicha igualdad, que se deduce de las reglas de las operaciones algebraicas con magnitudes medias, subraya que el valor medio del cuadrado de la magnitud $\langle M^2 \rangle$ no debe confundirse con el cuadrado del valor medio de la magnitud $(\langle M \rangle)^2$.

Se llama *fluctuación absoluta* la magnitud $\sqrt{\langle(\Delta M)^2\rangle}$ que también caracteriza la discrepancia de M respecto de $\langle M \rangle$. La pequeñez de la fluctuación absoluta significa que las grandes desviaciones de M con relación a $\langle M \rangle$ ocurren muy raras veces.

Se denomina *fluctuación relativa* δ_M la relación entre la fluctuación absoluta y el valor medio $\langle M \rangle$ de la magnitud física:

$$\delta_M = \frac{\sqrt{\langle(\Delta M)^2\rangle}}{\langle M \rangle}.$$

Las fluctuaciones relativas de la concentración de partículas (o densidad) del gas, de su presión y temperatura son tanto menores cuanto mayor es el número N de moléculas de gas que hay en el recipiente:

$$\delta_\rho = \frac{\sqrt{\langle(\Delta\rho)^2\rangle}}{\langle\rho\rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \delta_p = \frac{\sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle}}{\langle p \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}},$$

$$\delta_T = \frac{\sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle}}{\langle T \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Cuando $N = N_A$ (número de Avogadro (IX)), δ_ρ , δ_p y δ_T tienen valores del orden de 10^{-14} .

Si se tiene un sistema formado por N partes independientes, la fluctuación relativa de cualquier función de estado (II.2.1.3°) aditiva del sistema, es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de N :

$$\delta_M \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

4°. Ejemplos de fluctuación de las magnitudes físicas:

Ejemplo 1. Cuando se mide la temperatura valiéndose de un termómetro de gas perfecto (II.1.4.1°), las indicaciones de éste no permanecen constantes debido a las fluctuaciones de la temperatura. Las variaciones de la temperatura que mide el termómetro no pueden ser menores que la fluctuación absoluta de las indicaciones del aparato, igual a $\sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle}$, es decir, $\Delta t \geq \sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle}$.

La fluctuación absoluta puede hallarse por la fórmula del p. 3°:

$$\sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle} \sim \frac{\langle T \rangle}{\sqrt{N}}.$$

Por lo tanto,

$$\Delta t \geq \sqrt{\langle (\Delta T)^2 \rangle} \sim \frac{\langle T \rangle}{\sqrt{N}}.$$

Si el termómetro de gas contiene 10^{-8} moles, es decir, $N = 6,02 \cdot 10^{15}$, la variación mínima de la temperatura Δt que puede descubrir el aparato es, por su orden de magnitud, $\Delta t \approx 10^{-10} \langle T \rangle$. Esta magnitud indica el límite de sensibilidad del termómetro de gas.

Las variaciones reales de las temperaturas que suelen medirse en los experimentos son incomparablemente mayores que Δt .

Ejemplo 2. Las fluctuaciones eléctricas en los circuitos restringen los límites de sensibilidad de los aparatos receptores de radio. En particular, las fluctuaciones del número de electrones emitidos por el cátodo caldeado provoca las fluctuaciones de la corriente que pasa por una válvula electrónica. Este fenómeno es conocido con el nombre de *efecto de granalla*. La medida de este efecto es la fluctuación cuadrática de la corriente:

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle \approx \frac{e I_0}{t},$$

donde e es la carga del electrón; I_0 , la intensidad media de la corriente durante el tiempo t en que se mide esta última, siendo $t \gg \tau$, donde τ es el tiempo de tránsito del electrón por la válvula.

§ II.4.7. Movimiento browniano

1°. Se da el nombre de *movimiento browniano*, al movimiento caótico continuo (observado al microscopio) de partículas pequeñas suspendidas en un gas o en un líquido. El movimiento browniano se debe a las fluctuaciones de la presión (II.4.6.1°) que ejercen las moléculas del gas o del líquido sobre las partículas en suspensión. Como resultado de las fluctuaciones de la presión, las partículas brownianas experimentan por todas partes la acción de fuerzas no equilibradas que ocasionan el movimiento complejo visible de estas partículas.

2°. Cuando las condiciones externas son constantes, en el movimiento browniano de las partículas no se observa ninguna variación y el mismo continúa por un tiempo ilimitado. Esto pone de manifiesto el carácter continuo del movimiento térmico

caótico de las moléculas, que hace que se muevan las partículas brownianas. La velocidad v y la energía w del movimiento de las partículas brownianas dependen de las dimensiones de éstas y no de su naturaleza química; las magnitudes v y w crecen al elevarse la temperatura y al disminuir la viscosidad del líquido o del gas.

3°. Experimentalmente se ha establecido que durante su movimiento las partículas brownianas se pueden desplazar hacia arriba, como si «emergieran» en el gas o en el líquido. Esto puede ocurrir en caso de que la partícula browniana reciba de las moléculas del gas (o del líquido) un impulso no compensado en dirección vertical de abajo arriba. Con esto la energía potencial de la partícula aumenta a expensas de la energía cinética de las moléculas que la rodean y se produce un enfriamiento local del gas o del líquido. La energía mecánica de una partícula browniana aumenta a expensas del enfriamiento de una fuente de calor — líquido o gas —, lo que contradice el segundo principio de la termodinámica (II.4.3.2°). De este modo el movimiento browniano demuestra el carácter limitado de este segundo principio, su carácter estadístico (II.4.5.1°).

4°. El movimiento de una partícula browniana es totalmente caótico. Por esto el desplazamiento medio $\langle x \rangle$ de la partícula a lo largo de una dirección arbitraria es igual a cero. El cuadrado medio del desplazamiento $\langle x^2 \rangle$ es proporcional al tiempo t de observación de la partícula y puede ser expresado por la fórmula de Einstein:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt,$$

donde D es el coeficiente de difusión de las partículas brownianas. Para partículas de forma esférica y radio r

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta N_A}.$$

Aquí T es la temperatura absoluta; R la constante universal de los gases (II.1.4.4°); η , el coeficiente de viscosidad del líquido o gas (II.3.8.3°), y N_A , el número de Avogadro (IX).

§ II.4.8. Tercera ley de la termodinámica

1°. La entropía, como función unívoca del estado de un sistema, se introduce mediante la relación diferencial (II.4.4.2°). Por esto, la entropía sólo se puede determinar con la exactitud de hasta una constante arbitraria que no puede hallarse par-

tiendo de las leyes primera y segunda de la termodinámica. En vista de esto, resulta imposible la determinación del valor absoluto de la entropía.

2°. El estudio experimental de las propiedades de las sustancias a temperaturas ultrabajas ha conducido al establecimiento de la *tercera ley de la termodinámica* o *principio de Nernst*: en cualquier transformación isotérmica que se cumpla a la temperatura del cero absoluto, la variación de la entropía es nula:

$$\Delta S_{T=0} = 0 \quad \text{y} \quad S = S_0 = \text{const}$$

independientemente de las variaciones que sufran otros parámetros de estado cualesquiera (por ejemplo, el volumen, la presión, la intensidad del campo de fuerzas externo, etc.).

El tercer principio no permite hallar el valor absoluto de la entropía. Pero la constancia de entropía cuando $T \rightarrow 0$ da la posibilidad de elegir esta constante como punto de referencia de la entropía y, por lo tanto, de determinar la variación de la entropía en los procesos que se estudian.

3°. El principio de Nernst, según lo enunció Planck, dice: a la temperatura del cero absoluto, la entropía del sistema es nula. Si W_0, W_1, \dots, W_n es la sucesión de los niveles energéticos de un sistema (VI.1.2.5°), entonces, a la temperatura del cero absoluto el sistema en equilibrio se encontrará en el estado más bajo con una energía igual a W_0 y cuya probabilidad termodinámica (II.4.5.2°) $P = 1$. Por eso es necesario estimar que la constante en la fórmula de Boltzmann (II.4.5.1°) es igual a cero:

$$S_0 = k \ln P = 0.$$

4°. Para todos los cuerpos a $T = 0$ K, la capacidad calorífica a volumen constante $C_{V\mu}$ (II.2.5.4°) se anula. En efecto, si la temperatura del sistema es suficientemente baja, de manera que la energía cinética media de las partículas kT (II.3.6.4°) es mucho menor que la diferencia ΔW entre los niveles energéticos inferior y primero ($\Delta W \gg kT$), las excitaciones térmicas del sistema son insuficientes para que éste pase del sistema de estado de energía W_0 al estado de energía W_1 . Por esto, a temperaturas ultrabajas el sistema debe encontrarse en estado de menor energía W_0 . La energía interna U_0 del sistema (II.2.1.2°) es igual a W_0 , es decir, $U_0 = W_0$, por lo que su capacidad calorífica, a volumen constante,

$$C_{V\mu} = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \left(\frac{dW_0}{dT} \right)_V = 0 \quad \text{cuando} \quad T \rightarrow 0.$$

A la temperatura del cero absoluto también se anula el coeficiente de dilatación volumétrica (VII.1.2.3°).

Del tercer principio se deduce que es imposible toda transformación como resultado de la cual un cuerpo pueda ser enfriado hasta la temperatura del cero absoluto (*principio de imposibilidad de alcanzar la temperatura del cero absoluto*).

Capítulo II.5. Gases reales y vapores

§ II.5.1. Fuerzas intermoleculares

1°. Las propiedades de los gases no muy enrarecidos difieren de las de los gases perfectos que cumplen la ecuación de Mendeléiev — Clapeyron (II.1.4.4°). Las experiencias demuestran que los calores específicos (II.2.5.2°), los coeficientes de viscosidad (II.3.8.4°) y otras magnitudes tienen en los gases reales valores distintos de los correspondientes a las magnitudes físicas de los gases perfectos.

2°. Se llama *gas real* aquel entre cuyas moléculas actúan fuerzas intermoleculares.

Vapor es el gas real que se halla en estados próximos a la condensación.

3°. Las fuerzas intermoleculares disminuyen muy rápidamente al aumentar la distancia entre las moléculas (*fuerzas de acción próxima*). Cuando las distancias entre las moléculas son mayores de 10^{-9} m, las fuerzas intermoleculares pueden despreciarse. Las fuerzas intermoleculares se dividen en *fuerzas de atracción* y *fuerzas de repulsión*. Estos dos tipos de fuerzas actúan simultáneamente. En caso contrario sería imposible determinar los volúmenes de los cuerpos líquidos y sólidos, ya que las partículas que los forman se esparcirían en distintas direcciones o se juntarían hasta ocupar el menor volumen posible.

4°. Las fuerzas de atracción y repulsión mutua dependen distintamente de la distancia r entre las moléculas. A distancias comparables con las dimensiones lineales de los átomos y de las pequeñas moléculas inorgánicas (10^{-10} m) prevalecen las fuerzas de repulsión F_1 ; y a distancia r del orden de 10^{-9} m, las de atracción mutua F_2 . Si \mathbf{r} es el radio vector trazado al punto donde se encuentra la molécula A desde otro punto en que se halla la

molécula B que actúa sobre la primera con las fuerzas F_1 y F_2 , tenemos que

$$F_1 = F_{1r} \frac{r}{r} \quad \text{y} \quad F_2 = F_{2r} \frac{r}{r}.$$

Las proyecciones F_{1r} y F_{2r} de las fuerzas F_1 y F_2 sobre la dirección r dependen de r del modo siguiente:

$$F_{1r} = b/r^{13}, \quad F_{2r} = -a/r^7,$$

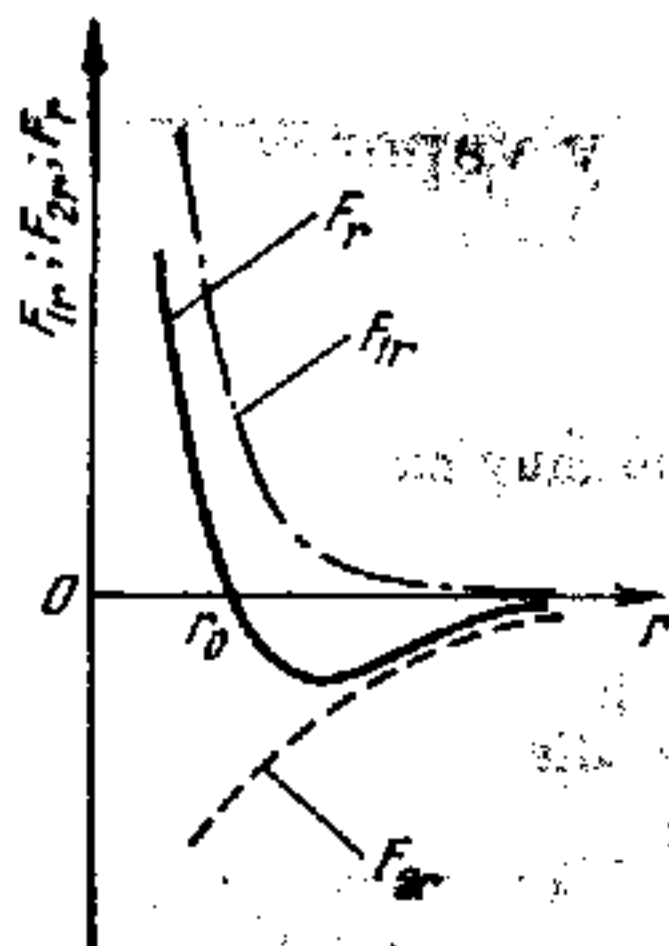


Fig. II.5.1.

donde a y b son unos coeficientes que dependen de la estructura de las moléculas y del tipo de las fuerzas intermoleculares. En la fig. II.5.1 se muestran las curvas F_{1r} y F_{2r} en función de r . Las fuerzas de repulsión se consideran generalmente positivas, y las de atracción, negativas (fig. II.5.1).

La fuerza resultante es

$$F = F_1 + F_2 = F_r \frac{r}{r},$$

siendo $F_r = F_{1r} + F_{2r}$. La fig. II.5.1 representa también la curva F_r en función de r .

5°. Cuando $r = r_0$ las fuerzas F_1 y F_2 se equilibran y $F = 0$.

Para $r > r_0$ la fuerza $F_2 > F_1$, y para $r < r_0$ la fuerza $F_2 < F_1$. Así, pues, r_0 es la distancia de equilibrio entre las moléculas, a la cual se encontrarían éstas si no existiera el movimiento térmico.

6°. El trabajo elemental δA que realiza la fuerza resultante F cuando aumenta en dr la distancia entre las moléculas, es igual a la disminución de la *energía potencial mutua* W_p de las dos moléculas (1.3.3.1°):

$$\delta A = (F, dr) = F_r dr = -dW_p.$$

Integrando por r desde r hasta ∞ :

$$\int_{W_p}^{W_{p\infty}} dW_p = - \int_r^{\infty} F_r dr, \quad \text{y} \quad W_p - W_{p\infty} = \int_r^{\infty} F_r dr.$$

Cuando $r = \infty$ las moléculas no interaccionan y $W_{p\infty} = 0$, por lo que

$$W_p = \int_r^{\infty} F_r dr.$$

Esta integral se puede calcular gráficamente si se conoce la dependencia de F_r respecto de r (fig. II.5.1). Su valor es proporcional al área de la superficie limitada por la curva $F_r = F_r(r)$,

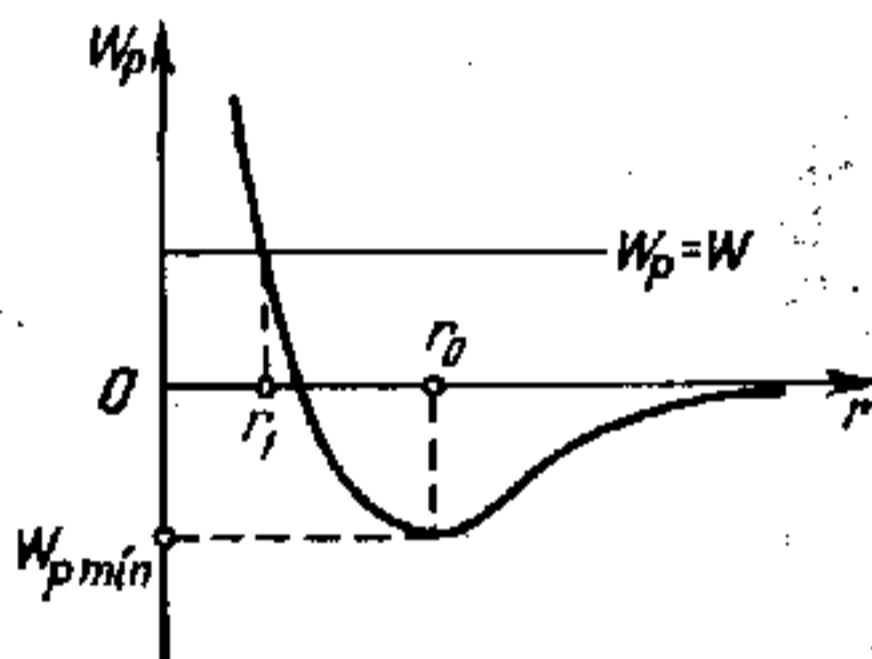


Fig. II.5.2.

el eje r y el valor de r ($r = \text{const}$) para el cual se calcula W_p . Si $r > r_0$, la energía $W_p < 0$, puesto que $F_r < 0$; si $r = r_0$, la energía W_p alcanza el mínimo: $W_p = W_{\text{mín}}$. Esto se deduce de la ecuación

$$\left(\frac{dW_p}{dr} \right)_{r=r_0} = -F_r(r_0) = 0.$$

Un sistema compuesto de dos moléculas que interaccionan entre sí y que se encuentran en estado de equilibrio estable ($r = r_0$), posee la energía potencial mínima. Cuando $r < r_0$ la energía W_p comienza a aumentar, se hace positiva y después crece bruscamente debido al rápido aumento que experimentan las fuerzas de repulsión al disminuir r (fig. II.5.2).

7°. La magnitud $W = W_{p \text{ mín}}$, energía potencial mínima de interacción molecular, sirve de criterio para los diversos estados de agregación de la sustancia.

Si $|W|_{p \text{ mín}} \ll kT$, la sustancia se encuentra en estado gaseoso. Cuando $|W|_{p \text{ mín}} \gg kT$, la sustancia está en estado sólido. La condición $|W|_{p \text{ mín}} \approx kT$ corresponde a la substan-

cia en estado líquido. Aquí kT es la energía media duplicada correspondiente a un grado de libertad del movimiento térmico de las moléculas (II.3.6.4°).

8°. Se llaman *fuerzas de Van der Waals* las fuerzas de atracción débiles *) que actúan entre las moléculas a distancias del orden de 10^{-9} m (p. 4°). Estas fuerzas causan la corrección de la presión interna en la ecuación de estado de Van der Waals para el gas real (II.5.2.4°). Existen tres tipos de fuerzas de atracción de Van der Waals, todas ellas de naturaleza eléctrica:

a) *Las fuerzas de atracción de orientación* de las moléculas polares (II.4.1.4°). Estas fuerzas se deben a la orientación predominante del momento eléctrico dipolar p_e (III.2.2.4°) de una molécula polar en el campo eléctrico de otra molécula polar. A dicha orientación de las moléculas se opone el movimiento térmico de éstas. La fuerza de atracción de orientación de dos moléculas homogéneas es

$$F_{or} = 4 \frac{p_e^2}{kT} \frac{1}{r^3},$$

donde r es la distancia entre las moléculas; k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°), y T , la temperatura.

b) *La fuerza de atracción de inducción* de dos moléculas polares (y en el caso de moléculas diferentes, también de una molécula polar y otra no polar) debidas a la variación de los momentos dipolares de las moléculas bajo la influencia de los campos eléctricos de éstas, es decir, a la polarización por deformación de las moléculas que interaccionan (III.4.2.2°). Para dos moléculas homogéneas

$$F_{ind} = 12\alpha p_e^2 \frac{1}{r^7},$$

siendo α la polarizabilidad de la molécula (III.4.1.3°).

c) *Las fuerzas de atracción de dispersión* que actúan tanto entre las moléculas polares como entre las no polares. El origen de estas fuerzas es mecanocuántico. La explicación clásica de las fuerzas de dispersión es la siguiente. En virtud del movimiento de los electrones, la configuración de éstos en las moléculas varía continuamente. Por eso la molécula no polar tiene momento eléctrico dipolar nulo solamente en término medio. En

* Se tiene en cuenta la pequeñez de la magnitud de estas fuerzas en comparación con las de atracción que aseguran la formación de moléculas estables (p. 9°).

cada instante dicha molécula posee un momento eléctrico instantáneo y provoca la correspondiente polarización por deformación de la molécula vecina, en virtud de lo cual las moléculas se atraen. La fuerza de atracción de dispersión es igual al valor medio de la fuerza de atracción instantánea de dos moléculas para todas las configuraciones posibles de los electrones en ellas. De acuerdo con el modelo más simple (de Drude), en el cual las moléculas se consideran como osciladores tridimensionales,

$$F_{\text{disp}} = \frac{9}{2} \alpha^2 h \nu_0 \frac{1}{r^7},$$

siendo h la constante de Planck, y ν_0 , la frecuencia de las vibraciones del oscilador (la magnitud $h\nu_0$ suele aproximarse al valor de la energía de ionización de las moléculas).

Por lo general, el papel determinante en la atracción mutua de las moléculas lo desempeñan las fuerzas de dispersión. En la mayoría de las sustancias, incluso con moléculas polares, las fuerzas de atracción de dispersión superan considerablemente tanto las de atracción de orientación como las de atracción de inducción.

El nombre de fuerzas de dispersión lo deben estas fuerzas a la analogía de su aparición con el fenómeno de dispersión que se produce cuando las ondas electromagnéticas pasan por una sustancia (V.3.4.1°).

9°. La fuerza de atracción entre las moléculas F_r , representada en la fig. II.5.1, es el resultado de todos los tipos de fuerzas atractivas enumeradas en el p. 8°. La energía potencial de la atracción de Van der Waals es igual a $(0,4-4) \cdot 10^3$ J/mol.

A distancias $r \leq 10^{-10}$ m aparece entre las moléculas, además de la interacción electromagnética, una interacción cuántica especial que hace que surjan fuerzas de repulsión entre dichas moléculas (II.5.1.4°) o que se produzca una fuerte atracción de los átomos vecinos (o grupos de ellos) y que aparezcan enlaces químicos — iónicos y covalentes (VI.2.4.3°, VI.2.4.4°) — entre ellos. El resultado de estos enlaces es la formación de moléculas estables. La energía potencial de los enlaces químicos es mayor que la energía de la atracción de Van der Waals, y su magnitud es del orden de $(0,4-4) \cdot 10^4$ J/mol.

10°. En un sistema de dos moléculas, las fuerzas de interacción, por ser internas (I.2.2.4°), no pueden hacer que varíe la energía total W del sistema, compuesta de la energía cinética W_c de las moléculas y de su energía potencial mutua W_p . Por

esto $dW = dW_c + dW_p = 0$, ó $dW_c = -dW_p = F_r dr$.

$$dW = dW_c + dW_p = 0, \text{ ó } dW_c = -dW_p = F_r dr.$$

Aquí se ha aplicado la fórmula del p. 6°.

Cuando las moléculas se aproximan ($dr < 0$) hasta la distancia r_0 (fig. II.5.1), W_p disminuye y W_c aumenta respectivamente. Esto ocurre a expensas del trabajo positivo realizado por la fuerza resultante de la atracción mutua entre las moléculas (p. 4°) ($F_r < 0$ cuando $r > r_0$). Si las moléculas continúan acercándose se realiza por ellas un trabajo contra la fuerza resultante de la repulsión mutua ($F_r > 0$) para $r < r_0$. Entonces la energía cinética de las moléculas disminuye. En el instante de la máxima aproximación de las moléculas ($r = r_1$ en la fig. II.5.2), toda la energía cinética de éstas ha sido invertida en realizar trabajo contra las fuerzas de repulsión: $W_c = 0$ y la energía total W es igual a la energía potencial W_p , es decir, $W = W_p$ (fig. II.5.2).

Si permanecen constantes todos los parámetros de estado de los gases reales, excepto la temperatura, la distancia r_1 disminuye al calentarse el gas. Pero esta disminución es muy pequeña incluso a grandes temperaturas. Esto se debe a que las fuerzas de repulsión F_1 crecen muy lentamente al disminuir r (fig. II.5.1). La distancia r_1 es, por lo tanto, el diámetro eficaz d de la molécula (II.1.4.1°). Las dimensiones finitas de las moléculas de los gases reales se explican por la acción de las fuerzas de repulsión entre dichas moléculas.

§ II.5.2. Ecuación de Van der Waals

1°. Se da el nombre de *gas de Van der Waals* a un modelo de gas real en el cual las moléculas se consideran como bolitas sólidas indeformables de diámetro d (II.5.1.10°) entre las cuales actúan fuerzas de atracción mutua. Las dimensiones finitas de las bolitas significan que también se toman en consideración las fuerzas de repulsión entre las moléculas del gas real.

2°. Las moléculas del gas real, que tienen cada una el volumen $\tilde{v} = \frac{1}{6}\pi d^3$, se mueven dentro del recipiente con menos

libertad que las moléculas «puntuales» del gas perfecto. Por esto en la ecuación de Mendeléiev — Clapeyron (II.1.4.4°) $pV_\mu = RT$, en vez del volumen total V_μ del recipiente ocupado por

el gas, debe considerarse el volumen «libre»

$$V'_\mu = V_\mu - b,$$

donde b es la corrección de Van der Waals al volumen propio de las moléculas. La corrección b es igual al cuádruplo del volumen de todas las moléculas que hay en un mol de gas:

$$b = 4N_A \tilde{v},$$

donde N_A es el número de Avogadro (IX), y \tilde{v} , el volumen de una molécula.

3°. Las fuerzas de atracción mutua entre las moléculas se tienen en cuenta en el gas de Van der Waals introduciendo la corrección a la presión del gas en la ecuación de Mendeléiev — Clapeyron (II.1.4.4°). En virtud del carácter de acción próxima de las fuerzas de atracción (II.5.1.3°), cada molécula sólo interacciona con aquellas partículas que se encuentran de ella a distancias $r \leq R_m$, donde R_m es el *radio de acción molecular*, cuya magnitud es del orden de 10^{-9} m. La esfera de radio R_m , descrita tomando como centro el de la molécula, se llama *esfera de acción molecular*.

Para una molécula situada dentro del volumen del gas, las fuerzas que la atraen hacia otras moléculas se equilibran entre sí y no ejercen influencia sobre el movimiento de dicha molécula. Pero si la molécula se halla en la capa de gas que limita con la pared del recipiente, entonces experimenta una fuerza de atracción no compensada, dirigida hacia dentro del gas. A causa de esto, cuando esta molécula choca con la pared, le comunica menos impulso (II.3.2.1°), y la presión p que ejerce sobre la pared el gas real es menor que la presión p_{id} que ejercería un gas perfecto de la misma densidad y que estuviera a la misma temperatura,

$$p = p_{id} - p^*,$$

o bien

$$p_{id} = p + p^*,$$

donde p^* es la corrección de Van der Waals condicionada por la acción de las fuerzas de atracción mutua y denominada *presión interna*. La presión interna p^* es inversamente proporcional al cuadrado de la capacidad V_μ del recipiente en que se encuentra el gas

$$p^* = \frac{a}{V_\mu^2},$$

siendo a el coeficiente de Van der Waals que depende de la naturaleza química del gas.

4°. La ecuación de Van der Waals que define el estado de un gas real, difiere de la ecuación de Mendeléiev — Clapeyron (II.1.4.4°) en que se introducen las correcciones b y p^* (pp. 2° y 3°). Para un mol de gas, la primera de estas ecuaciones tiene la forma

$$\left(p + \frac{a}{V_{\mu}^2}\right) (V_{\mu} - b) = RT.$$

5°. La ecuación de Van der Waals para una masa arbitraria de gas real, de masa molar μ (II.1.4.3°), es

$$\left(p + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}\right) \left(V - \frac{M}{\mu} b\right) = \frac{M}{\mu} RT.$$

Esta ecuación es correcta para los gases no muy comprimidos. Para los gases fuertemente enrarecidos $V_{\mu} \gg b$, $p^* \ll p$ y la ecuación de Van der Waals no difiere de la de Mendeléiev — Clapeyron.

§ II.5.3. Isotermas de los gases reales.

Transiciones de fase

1°. La curva del volumen molar de un gas en función de la presión, a temperatura constante, se llama *isoterma del gas real*. En la fig. II.5.3 se representan las isotermas para el anhídrido carbónico. A temperaturas T menores que $T_K = 340$ K, todas las isotermas tienen trozos horizontales en los cuales, además de T , es constante la presión del gas, y los volúmenes molares varían. La diferencia $V_C - V_B$ de los volúmenes molares en los trozos horizontales de las isotermas disminuye al elevarse la temperatura (fig. II.5.3). Cuando $T = T_K$ esta diferencia se anula. La temperatura $T = T_K$, correspondiente a la condición $V_C - V_B = 0$, recibe el nombre de *temperatura crítica*.

La isoterma de un gas real para $T = T_K$ se llama *isoterma crítica*. En esta isoterma los puntos C y B se confunden en el punto K , que se denomina *punto crítico*. Los parámetros de estado del gas (II.1.3.2°) en el punto crítico son los parámetros críticos $V_{\mu K}$, p_K y T_K .

El punto crítico K es el punto de inflexión de la isoterma crítica. Por consiguiente, la tangente a la isoterma en este punto es paralela al eje OV_{μ} .

2°. Cualquier isoterma inferior a la crítica ($T < T_K$) es una curva de transformación continua de la sustancia del estado gaseoso al líquido. Dicha curva tiene tres partes: TC , CB y BA , cada una de las cuales describe distintos estados de la sustancia. En el trozo TC la sustancia se encuentra en estado gaseoso; el tramo CB corresponde a la transición de la sustancia del estado gaseoso al líquido. En la región BA de la isoterma, la

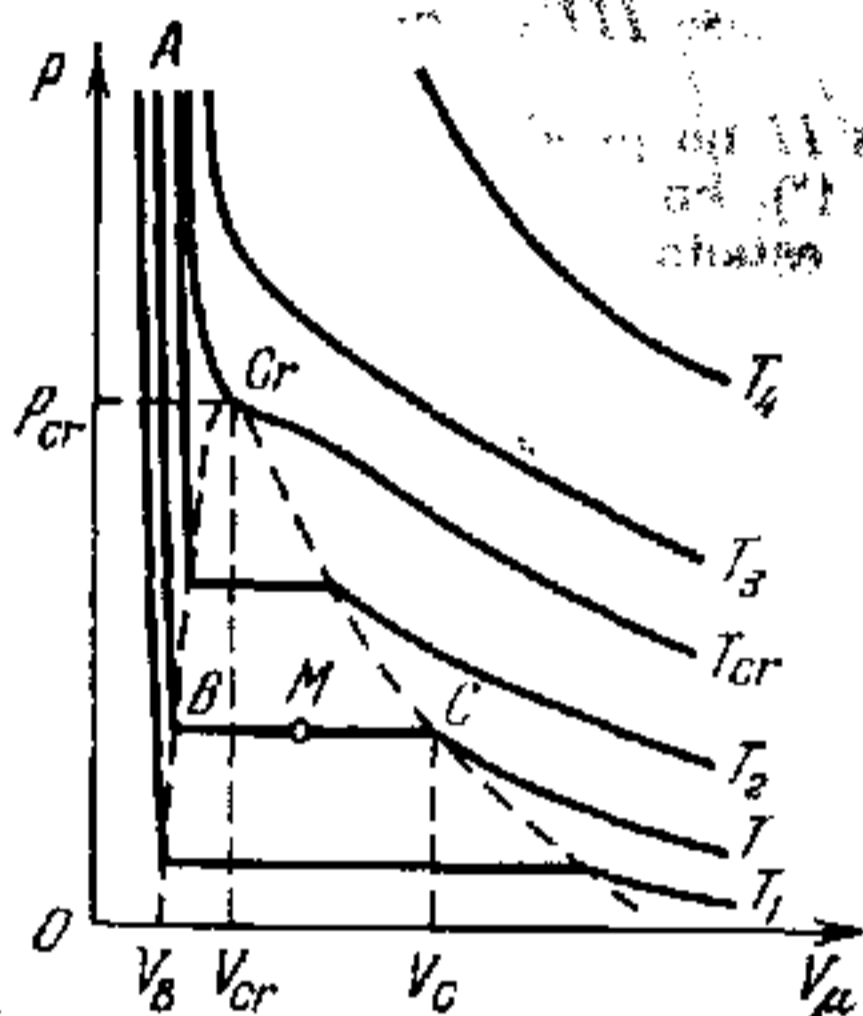


Fig. II.5.3.

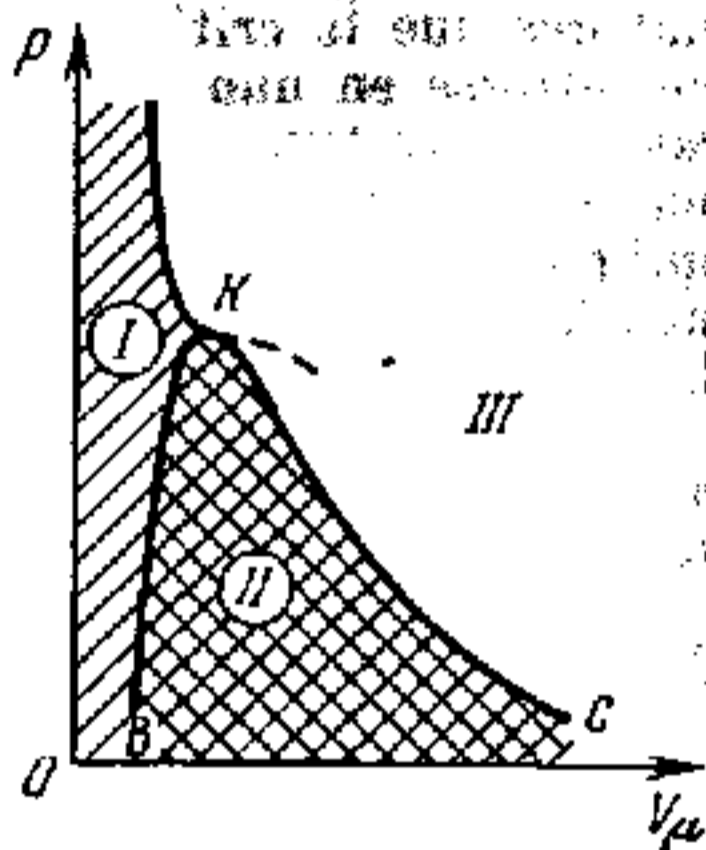


Fig. II.5.4.

sustancia es líquida. La parte BA de la curva es casi vertical a causa de la pequeña compresibilidad del líquido. Los puntos C y B del trozo horizontal de la isoterma corresponden al principio y al fin de la condensación durante la compresión isotérmica del gas real. Y, al contrario, durante la expansión isotérmica del líquido, los puntos B y C corresponden al principio y al fin de la ebullición. El punto B representa el estado de líquido en ebullición, y el C , el de vapor saturado seco. La mezcla de líquido en ebullición y vapor saturado seco que existe en cualquier punto M del tramo BC se llama vapor húmedo (fig. II.5.3).

3°. En termodinámica se da el nombre de fase al conjunto de todas las partes de un sistema que tienen la misma composición química y que se encuentran en un mismo estado. El vapor húmedo es un sistema de dos fases: líquido en ebullición y vapor saturado seco.

En la fig. II.5.4 se dan dos curvas límites BK y CK , construidas uniendo respectivamente los puntos B y los puntos C (fig. II.5.3) para distintas temperaturas. Las curvas BK y CK se encuentran en el punto crítico K . La curva de ebullición BK separa la región de una fase (líquido) I de la región de dos fases (vapor húmedo) II . La curva BK es la curva en que comienza la *transición de fase de I orden* del estado líquido de la sustancia al estado gaseoso. La curva límite CK separa la región de dos fases II de la región de una fase III en que la sustancia se halla en estado gaseoso..

4°. La región de dos fases II no puede existir a presiones mayores que la crítica p_K (p. 1°), en que la sustancia puede encontrarse en uno de los dos estados, líquido o gaseoso. Un gas a temperatura superior a la crítica T_K es imposible de licuar por compresión isotérmica cualquiera que sea la presión que se aplique. Las temperaturas críticas de una serie de gases son muy bajas: $\simeq 5$ K la del helio, y 33 K la del hidrógeno. Esto dificulta la licuefacción de dichos gases.

5°. En el estado crítico de la sustancia, además de la diferencia de los volúmenes molares del líquido en ebullición y del vapor saturado seco, se anulan el calor de vaporización (II.6.6.4°) y el coeficiente de tensión superficial del líquido (II.6.4.4°). En el estado crítico de la sustancia desaparecen totalmente las diferencias entre los estados líquido y gaseoso de ésta.

6°. La ecuación de Van der Waals (II.5.2.4°) es una ecuación de tercer grado respecto del volumen molar V_μ , con coeficientes que dependen de la presión, temperatura y naturaleza química del gas. Esta ecuación tiene una o tres raíces reales en dependencia de los valores numéricos de p y T . La fig. II.5.5 representa las isothermas de un gas real que cumple la ecuación de Van der Waals para distintas temperaturas ($T_1 < T_2 < T < T_3 < T_K < T_5 < T_6$).

En todas las isothermas inferiores a la crítica existe una zona rayada en la que a cada presión le corresponden tres estados distintos cuyos puntos representativos en la isoterma son B , E y C . Las partes onduladas $BDEFC$ de las isothermas de la fig. II.5.5 definen más exactamente la transición de la sustancia del estado gaseoso al líquido que los tramos horizontales de las isothermas experimentales (rectas trazadas BC). El trozo BD de la isoterma corresponde al *líquido recalentado*, que se puede obtener deteniendo el comienzo de la ebullición en el punto B . El tramo CF de la isoterma describe el estado de *vapor sobresaturado* que se produce durante la compresión isotérmica lenta en ausencia de centros de condensación. Si estos

centros (partículas de polvo, iones) se introducen en el vapor sobresaturado, éste se condensa rápidamente. En la parte *DEF* de la isoterma, al mismo tiempo que aumenta (o disminuye) la presión, aumenta (o disminuye) el volumen molar. Estos estados de la substancia son irrealizables. Los segmentos horizontales

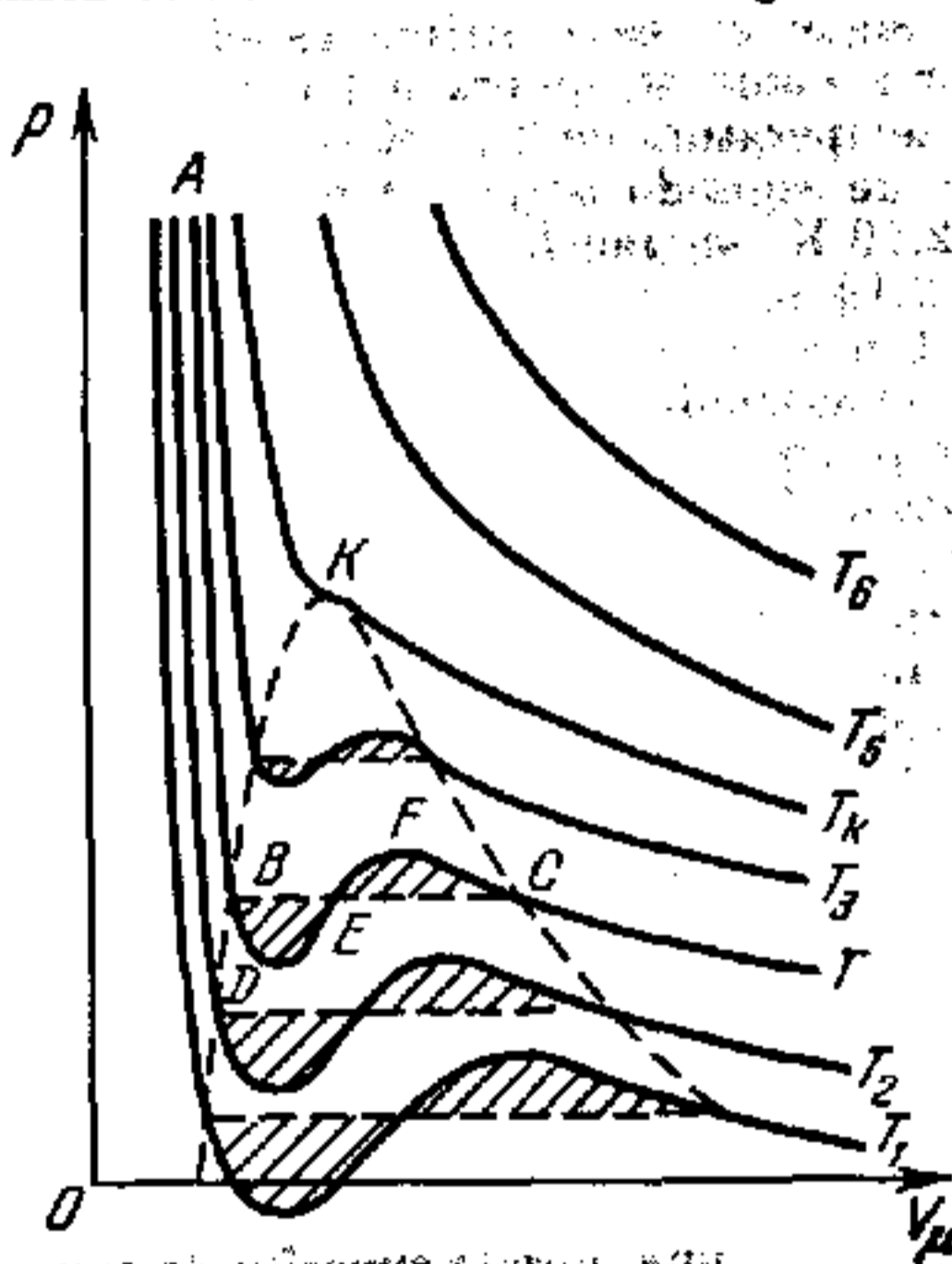


Fig. II.5.5.

BC cortan los tramos *BDEFC* de las isothermas de tal modo, que las superficies *BDEB* y *EFCE* de la fig. II.5.5 son iguales entre sí (*regla de Maxwell*).

7°. Los valores de los parámetros críticos p_K , $V_{\mu K}$ y T_K (p. 1°) se expresan por medio de los coeficientes a y b de la ecuación de Van der Waals (II.5.2.4°) y de la constante universal de los gases R (II.1.4.4°):

$$p_K = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}, \quad V_{\mu K} = 3b, \quad T_K = \frac{8}{27} \frac{a}{bR}.$$

§ II.5.4. Superfluidez del helio

1°. El helio es una sustancia que al pasar del estado gaseoso al líquido, a la presión atmosférica normal y a 4,22 K de temperatura, sigue en este último estado si se enfría hasta llegar tan cerca como se quiera del cero absoluto (II.4.8.4°).

2°. A la temperatura de 2,19 K ocurre en el helio una transición de fase de segundo orden: el helio líquido I, que existe cuando $T > 2,19$ K, se transforma en helio líquido II, que existe cuando $T < 2,19$ K.

Se llama *transición de fase de II orden* una transformación de la sustancia no asociada, con el desprendimiento o la absorción de calor como ocurre en las transiciones de fase de I orden. En las transiciones de fase de II orden varían a saltos la capacidad calorífica, los coeficientes de dilatación y algunas otras características de la sustancia. Ejemplos de transiciones de fase de II orden son: la transformación del hierro en el punto de Curie (III.13.5.2°), de sustancia ferromagnética en paramagnética (III.13.3.5°), y la transición de ciertos metales y aleaciones, a temperaturas muy bajas, al estado de superconductividad (VII.2.6.1°).

3°. Se ha descubierto el fenómeno de *superfluidez del helio II*, es decir, la casi total ausencia de viscosidad cuando éste pasa por tubos capilares (II.6.5.5°). El coeficiente de viscosidad (II.3.8.4°) del helio II es menor de 10^{-12} Pa·s, mientras que el del helio I a temperatura próxima a 4,22 K tiene un valor del orden de 10^{-6} Pa·s.

4°. El helio II es una mezcla superfluida y normal de componentes (*modelo de los dos líquidos*). La componente superfluida se mueve sin rozamiento y no participa en el transporte de energía en forma de calor (II.2.2.1°). La componente normal se mueve con rozamiento y participa en el transporte de energía.

5°. La teoría de la superfluidez se basa en la mecánica cuántica (VI.1.1.2°). La mecánica cuántica explicó, ante todo, por qué el helio es el único líquido que no se hiela a temperaturas ultrabajas y presión normal. Las oscilaciones del punto cero (VI.1.5.6°) de los átomos ligeros del helio son suficientemente intensas y no permiten que las débiles fuerzas de atracción entre los átomos del helio, a presiones ordinarias, formen una estructura cristalina.

La base de la teoría moderna de la superfluidez es el estudio del espectro energético del helio a temperaturas ultrabajas. El espectro energético continuo en estas condiciones se puede

considerar como un conjunto de excitaciones elementales o de cuasipartículas de energía $h\nu_i$, donde h es la constante de Planck, y ν_i , las frecuencias de los fonones (VII.2.7.5°) correspondientes a estas excitaciones. Las cuasipartículas no pueden confundirse con los átomos reales de helio. Ellas se identifican con todo el conjunto de dichos átomos, y los valores de la energía de excitación elemental describen el espectro energético de todo el sistema cuántico, o sea, del helio líquido en conjunto. A bajas temperaturas el estado excitado del helio está constituido por ondas sonoras, que son las excitaciones elementales de la parte normal del helio líquido II. Con estas excitaciones está ligada la reserva de energía interna que hay en el helio líquido y la existencia de rozamiento en él. Pero en el helio II son posibles estados correspondientes a la parte superfluida del helio II, en los cuales las «excitaciones elementales» no son energéticamente convenientes y no se producen. Como resultado de la fuerte interacción de las partículas de la parte superfluida del helio II, se forma un conjunto ligado en el cual no se producen excitaciones térmicas y la parte superfluida del helio II carece de reserva de energía interna y de viscosidad. A la temperatura del cero absoluto en el helio II no debe haber parte normal y todo él debe ser superfluido. A medida que se calienta, el número de fonones crece y aumenta la parte de la componente normal del helio II. Pero mientras la temperatura no alcanza 2,19 K, en el helio II se conserva la componente superfluida con sus características propias. A la temperatura de 2,19 K el helio II se transforma en helio I y desaparecen todas las propiedades peculiares del helio II.

Capítulo II.6. Líquidos

§ II.6.1. Algunas propiedades de los líquidos

1°. Se llaman *líquidos* los cuerpos que, teniendo un volumen determinado, toman la forma del recipiente que los contiene. Del movimiento térmico en los líquidos se habló en II.1.1.5°. El carácter del movimiento térmico en los líquidos determina la semejanza de las propiedades de los líquidos con las de los sólidos y las de los gases. Lo mismo que los sólidos, los líquidos son poco compresibles. Esta propiedad se debe a la fuerte acción intermolecular de las partículas de los líquidos. Al comprimir los líquidos disminuye la distancia entre sus moléculas y aumen-

tan bruscamente las fuerzas de repulsión que impiden la compresión (II.5.1.4°). Los líquidos tienen una densidad relativamente grande y, lo mismo que los sólidos, resisten no sólo la compresión, sino también la tracción (VII.1.3.6°). Esto se manifiesta en el hecho de que las isoterma de Van der Waals penetran en la región de las presiones negativas (isoterma para $T = T_1$ en la fig. II.5.5). La semejanza de las propiedades de los líquidos y los gases reales, a altas temperaturas y pequeñas densidades, se manifiesta, por ejemplo, en que al elevarse la temperatura disminuyen los coeficientes de tensión superficial de los líquidos (II.6.4.4°) y el calor específico de vaporización (II.6.6.4°). Además, al elevarse la temperatura se aproximan los valores de las densidades del vapor saturado seco (II.5.3.2°) y del líquido en ebullición (II.5.3.2°).

2°. La semejanza de los líquidos y los sólidos se confirma por los datos del análisis estructural de rayos X (V.2.4.1°). A temperaturas próximas a la de cristalización, la disposición de las partículas en los líquidos se parece a la disposición ordenada de las partículas característica de los líquidos cristalizados. La disposición mutua de las partículas vecinas en los líquidos es semejante a la disposición ordenada de las partículas vecinas en los cristales. Pero esta ordenación sólo se observa en los líquidos dentro de pequeños volúmenes. A distancias $r > (3 - 4)d$ de una molécula elegida como «central», la ordenación se difumina (d es el diámetro eficaz de la molécula (II.1.4.1°)). Este orden en la disposición de las partículas se llama *ordenación próxima en los líquidos*.

3°. Los roentgenogramas de los líquidos no se diferencian de los de los cuerpos policristalinos (V.2.4.5°) formados por cristalitos muy pequeños (con dimensiones lineales del orden de 10^{-9} m) orientados arbitrariamente unos con respecto a otros en las llamadas *regiones cibotáxicas*. Dentro de los límites de estas regiones la distribución de las partículas es ordenada, pero el carácter de ordenación varía de una región a otra. El intensivo movimiento térmico a temperaturas no demasiado bajas, hace que varíe rápidamente con el tiempo la distribución y la estructura de las regiones cibotáxicas.

§ II.6.2. Teoría de los huecos del estado líquido

1°. Un parámetro muy importante, que determina la estructura y las propiedades físicas de un líquido, es el volumen específico. Cuando se funde un cuerpo cristalino, su volumen es-

pecífico aumenta un poco, aproximadamente en un 10%. Este crecimiento del volumen específico se produce en el sólido por la acción de una presión negativa igual al límite de rotura teórico (VII.1.3.7°) de dicho sólido. Esto da la posibilidad de considerar el líquido como un cuerpo en el cual se ha quebrantado la integridad en diversos puntos. Al fundirse los cuerpos cristalinos, adquieren mayor movilidad las partículas de la sustancia. Esto condiciona la importante propiedad de la *fluidéz de los líquidos*, así como la violación del orden remoto de los cristales y la aparición del orden próximo en los líquidos (II.6.1.2°). Además, como resultado de la mayor movilidad de las partículas, en el líquido se producen rupturas microscópicas, microcavidades o *huecos*. El movimiento térmico en los líquidos hace que los huecos desaparezcan espontáneamente de unos sitios y simultáneamente, aparezcan en otros. Esto equivale a un desplazamiento caótico de los huecos.

2°. La teoría de los huecos de la estructura de los líquidos es inaplicable a los líquidos sometidos a gran presión exterior, del orden de millares de atmósferas, en cuyo caso la compresibilidad de éstos es comparable con la de los sólidos. A altas temperaturas, próximas a la crítica *), el líquido, por sus propiedades y estructura, se aproxima al gas, para el que carece de sentido el concepto de hueco, y tampoco es aplicable la teoría de los huecos de la estructura de los líquidos.

3°. Del carácter del movimiento térmico en los líquidos (II.1.1.5°) se deduce que la molécula oscila en torno a cierta posición de equilibrio durante un tiempo τ , después de lo cual esta posición de equilibrio se desplaza de un salto a una distancia cuyo orden de magnitud es igual a la distancia media $\langle d \rangle$ entre las moléculas vecinas:

$$\langle d \rangle \approx \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho}}$$

donde n_0 es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen; N_A , el número de Avogadro (IX); ρ , la densidad del líquido; y μ , su masa molar. Por ejemplo, para el agua $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,018 \text{ kg/mol}$ y $\langle d \rangle \simeq 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

4°. Se llama *tiempo de relajación* el tiempo medio (τ) en el que permanece «sedentaria» una molécula del líquido junto a una posición de equilibrio. Con el aumento de la temperatura, $\langle \tau \rangle$ disminuye rápidamente (p. 5°). Esto explica la gran movilidad

*) No se tienen en cuenta las sustancias de temperatura crítica muy baja.

de las moléculas del líquido a temperaturas elevadas y la pequeña viscosidad de los líquidos en estas condiciones.

5°. Para que las moléculas pasen de una posición de equilibrio a otra (p. 4°) se requiere cierta *energía de activación* W . Esta transición se estudia como el salto de una barrera de potencial de altura W (VI.1.7.1°), ya que para su realización la energía potencial de la molécula debe elevarse en la magnitud W , y solamente después de esto puede pasar a su nueva posición de equilibrio. Todo este proceso es posible porque, como resultado de los choques durante el movimiento térmico, en algunas moléculas se concentra una gran energía cedida por las otras moléculas. La dependencia del tiempo de relajación (p. 4°) respecto de W y de la temperatura absoluta tiene la forma

$$\langle \tau \rangle = \tau_0 e^{W/kT},$$

en la que k es la constante de Boltzmann (II.1.4.5°), y τ_0 , el período medio de las oscilaciones de la molécula en torno a la posición de equilibrio.

6°. Si sobre el líquido actúa durante un tiempo $t \gg \langle \tau \rangle$ una fuerza exterior, las partículas del líquido se desplazan principalmente en la dirección de esta fuerza y se pone de manifiesto la fluidez del líquido. Si $t \ll \langle \tau \rangle$, durante la actuación de la fuerza, las moléculas no tienen tiempo de cambiar sus posiciones de equilibrio y el líquido revela sus propiedades elásticas, resistiéndose a cambiar de volumen y de forma.

En el tiempo $\langle \tau \rangle$ una partícula de líquido se traslada, por término medio, a una distancia $\langle d \rangle$ y la velocidad media de traslación de las moléculas $\langle v \rangle$ se determina por la fórmula

$$\langle v \rangle = \frac{\langle d \rangle}{\langle \tau \rangle} \quad \text{o} \quad \langle v \rangle = \frac{\langle d \rangle}{\langle \tau_0 \rangle} e^{-W/kT}.$$

Las velocidades medias del movimiento de las moléculas de un líquido es generalmente grande, pero menor en un grado de magnitud que las velocidades medias de las moléculas de vapor de la misma sustancia a iguales temperaturas.

§ II.6.3. Fenómenos de difusión y de rozamiento interno en los líquidos

1°. Si en los líquidos se dan las condiciones necesarias para que se originen fenómenos de transporte (II.3.8.1°), se producen en ellos la difusión, la conductibilidad del calor y el rozamien-

to interno. Las diferencias entre los fenómenos de transporte en los líquidos y en los gases influyen sobre las magnitudes de los coeficientes de transporte y sobre sus dependencias de las propiedades características de los líquidos.

2°. Para un líquido químicamente homogéneo, el coeficiente de difusión D (II.3.8.3°) se calcula por la fórmula

$$D = \frac{1}{6} \frac{\langle d \rangle^2}{\tau_0} e^{-W/kT}.$$

El sentido de las notaciones puede verse en II.6.2. pp. 3°, 4° y 5°.

El coeficiente de difusión crece rápidamente al aumentar la temperatura, a expensas, principalmente, del crecimiento brusco del tiempo de relajación $\langle \tau \rangle$ (II.6.2.4°). Además, al aumentar T crece algo la magnitud $\langle d \rangle$ (II.6.2.3°).

3°. Si la temperatura se aproxima a la crítica (II.5.3.1°), la velocidad media $\langle v \rangle$ de las partículas del líquido se aproxima a la velocidad media de las moléculas del gas real, y los valores del coeficiente de difusión D de los líquidos se acercan a las magnitudes de los coeficientes de difusión de los gases.

A temperaturas mucho menores que la crítica, los coeficientes de difusión en los líquidos son muy pequeños en comparación con los coeficientes de difusión en los respectivos vapores o en los gases a presiones ordinarias. Por ejemplo, para el agua a $T = 300$ K tenemos que $D \simeq 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, mientras que para su vapor en el aire, a la misma temperatura y presión atmosférica, $D \simeq 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

4°. A temperaturas próximas a la crítica *) el movimiento térmico en los líquidos toma un carácter distinto del descrito en (II.1.3.5°) y se aproxima al movimiento térmico en los gases. En estas condiciones el rozamiento interno tiene en los líquidos la misma naturaleza que en los gases (II.3.8.4°).

Cuando las temperaturas son próximas a la de fusión, la viscosidad de los líquidos no puede explicarse del mismo modo que la de los gases. El mecanismo de aparición del rozamiento interno tiene un carácter complejo. El coeficiente de rozamiento interno η (II.3.8.4°) de los líquidos se puede relacionar con la *movilidad de las moléculas* u_0 , entendiéndose por ésta la velocidad u que adquiere la molécula por la acción de una fuerza F igual a la unidad: $u_0 = \frac{F}{u}$. La relación entre η y u_0

resulta ser inversamente proporcional: $\eta \simeq u_0^{-1}$. A su vez

*) Véase la llamada de la pág. 203.

$u_0 \sim \frac{D}{kT}$, donde D es el coeficiente de difusión; T , la temperatura absoluta; y k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°). Por consiguiente, $\eta \sim T/D$ o $\eta \sim T e^{W/kT}$, donde W es la energía de activación (II.6.2.5°). Con la elevación de la temperatura, sobre todo en la región de temperaturas bajas, la viscosidad de los líquidos disminuye rápidamente. A grandes presiones la viscosidad de los líquidos crece rápidamente cuando aumenta la presión. Esto ocurre a expensas del aumento de la energía de activación (II.6.2.5°) y del correspondiente incremento del tiempo de relajación (II.6.2.4°).

§ II.6.4. Tensión superficial de los líquidos

1°. Sobre las moléculas del líquido que se encuentran en la capa superficial actúan fuerzas de atracción no compensadas, dirigidas hacia dentro y ejercidas por la parte de líquido restante. Como resultado de esto, la capa superficial ejerce sobre el líquido gran *presión interna* del orden de decenas de millares de atmósferas.

2°. Las partículas de la capa superficial del líquido tienen mayor energía potencial que las partículas que se hallan sumergidas en él. Esto se debe a que para el paso isotérmico de las moléculas que están sumergidas en el líquido, a la superficie de éste, aquéllas deben realizar trabajo para vencer las fuerzas de la presión interna (p. 1°) dirigidas hacia el interior del líquido. Este trabajo eleva la energía potencial de las moléculas que pasan a la superficie.

El trabajo A que hay que realizar para aumentar isotérmicamente la capa superficial del líquido es

$$A = \langle (F_S - F_V) \rangle N,$$

donde $\langle (F_S - F_V) \rangle$ es la diferencia media de la energía libre (II.4.4.5°) correspondiente a una molécula en la superficie F_S y dentro del volumen del líquido F_V ; y N , el número de moléculas que hay en la capa superficial.

3°. La mínima energía potencial necesaria para que el líquido se encuentre en equilibrio estable se realiza cuando el área de su superficie es la menor posible. El estado de equilibrio estable de un líquido incompresible corresponde a la relación mínima entre el área de su superficie y su volumen. Por esto

las pequeñas gotas de líquido que se hallan en suspensión en el aire tienen forma esférica. El líquido tiende a que el área de su superficie libre disminuya, por lo que la capa superficial se asemeja a una película elástica tensa: sobre ella actúan fuerzas de tensión (véase también el p. 5°).

4°. El trabajo de formación isotérmica de la unidad de área de la superficie del líquido se llama *tensión superficial* (*coeficiente de tensión superficial*) σ de un líquido dado en el límite con otra fase (II.5.3.3°):

$$\sigma = \frac{A}{S} = \langle (F_S - F_V) \rangle \frac{N}{S} = \langle (F_S - F_V) \rangle n_1,$$

donde $n_1 = \frac{N}{S}$ es el número de moléculas que hay en la unidad de área de la capa superficial. El coeficiente de tensión superficial se calcula también por la fórmula

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

en la que ΔF es la variación de la energía libre de la capa superficial, y ΔS , la variación del área de la superficie.

El coeficiente de tensión superficial σ depende de la composición química del líquido y de su temperatura. Cuando la temperatura aumenta, σ disminuye y se anula a la temperatura crítica (II.5.3.1°). Si se introducen en el líquido *agentes tensoactivos* o *surfactivos*, el coeficiente de tensión superficial disminuye. Esto se debe a que dichas sustancias son absorbidas en la capa superficial del líquido y reducen la energía libre de esa capa (II.4.4.5°).

5°. Entre la capa superficial de un líquido y una película elástica (p. 3°) existe una diferencia esencial. La tensión superficial de los líquidos no depende de las dimensiones de la superficie libre y tiende a reducirla hasta cero. En cambio, la tensión de una película elástica ordinaria es directamente proporcional a su deformación e igual a cero para una determinada área finita de la superficie de la película.

Las propiedades peculiares de las películas líquidas se deben a que durante la tracción (compresión) isotérmica de estas películas varía el número de moléculas que hay en la capa superficial, y la distancia media entre las moléculas y las fuerzas intermoleculares determinadas por estas distancias, no varían. Por esto, la magnitud de la tensión superficial no depende del área de la superficie libre del líquido.

6°. Si la superficie del líquido está limitada por un perímetro de contacto (II.6.5.1°), la magnitud σ es igual a la fuerza que actúa sobre la unidad de longitud del perímetro de contacto dirigida perpendicularmente a ella. Esta fuerza se encuentra en el plano tangente a la superficie libre del líquido.

§ II.6.5. Mojabilidad y fenómenos capilares

1°. La superficie libre de un líquido que se curva junto a las paredes del recipiente, se llama *menisco*. La línea de intersección del menisco con el sólido recibe el nombre de *perímetro de contacto*. Para caracterizar el menisco se introduce el *ángulo*

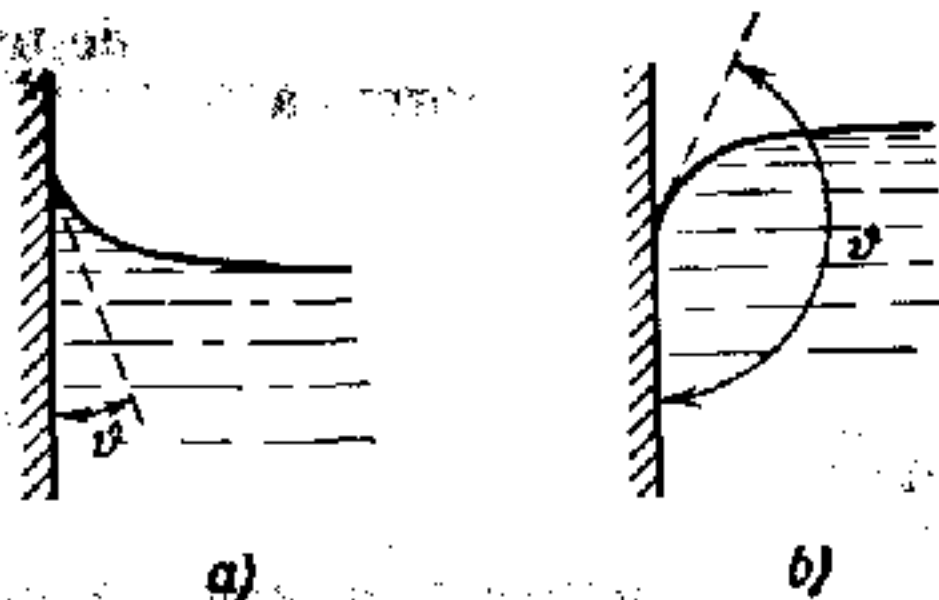


Fig. II.6.1.

de contacto o de enlace ϑ entre la superficie de contacto de la pared y el menisco en sus puntos de intersección. Si $\vartheta < \pi/2$ (fig. II.6.1., a), el líquido *moja* la pared, y si $\vartheta > \pi/2$, el líquido *no moja* la pared (fig. II.6.1, b).

La mojabilidad (o no mojabilidad) de un sólido por un líquido es perfecta cuando $\vartheta = 0$ ($\vartheta = \pi$). En este caso el menisco tiene forma esférica cóncava o convexa. A la ausencia de mojabilidad o no mojabilidad corresponde la condición $\vartheta = \pi/2$ con la cual el líquido tiene plana la superficie libre.

2°. La formación del menisco se debe a que las moléculas del líquido interactúan entre sí y con las partículas del sólido. La molécula A de la capa superficial, que se encuentra cerca de la pared del recipiente y cuya esfera de acción molecular (II.5.2.3°) tiene el radio R_m (fig. II.6.2), sufre la acción de la fuerza resultante de su atracción por todas las demás moléculas del líquido (F_1) y de todas las partículas de la pared (F_2). La

fuerza F_2 es perpendicular a la pared. Esto se desprende de las razones de simetría. La dirección de la fuerza F_1 depende de la forma del menisco y de la posición de la molécula A con respecto a la pared. Por ejemplo, si el menisco es plano (p. 1°) y la molécula A está en contacto directo con la pared, la dirección de la

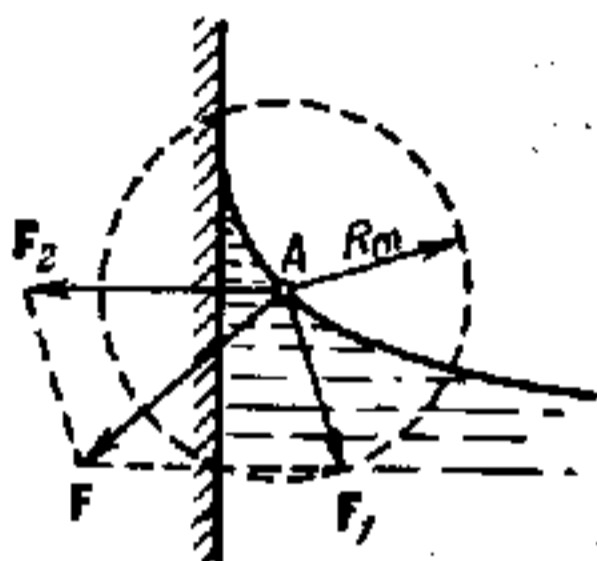


Fig. II.6.2.

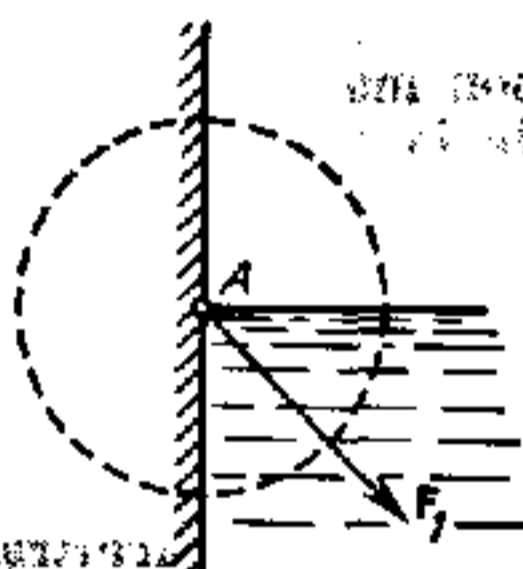


Fig. II.6.3.

fuerza F_1 forma un ángulo de 45° con dicha pared (fig. II.6.3). La molécula A se halla en equilibrio únicamente en el caso en



a)

b)

c)

Fig. II.6.4.

que la dirección de la fuerza resultante $F = F_1 + F_2$ es perpendicular a la superficie del líquido *). En el caso contrario la molécula A se desplazaría a lo largo de la superficie.

3°. La forma del menisco viene determinada por las tres direcciones posibles de la fuerza F :

a) si la fuerza F es paralela a la superficie de la pared, la superficie del líquido será plana y $\theta = \pi/2$ (fig. II.6.4, a);

*) En este caso despreciamos la gravedad de la molécula A , ya que es insignificante en comparación con las fuerzas F_1 y F_2 .

b) si la fuerza F está dirigida hacia el lado de la pared, las fuerzas de atracción de la molécula A por la pared son mayores que las fuerzas con que la atraen las moléculas del líquido. Este último tiene entonces un menisco cóncavo, $\theta < \pi/2$, es decir, el líquido moja la pared (fig. II.6.4., b);

c) si la fuerza F está dirigida hacia el lado del líquido, las fuerzas de atracción de la molécula A por las moléculas del líquido son mayores que las fuerzas con que la atraen las partículas de la pared. En este caso el menisco del líquido será convexo, $\theta > \pi/2$, y el líquido no mojará la pared (fig. II.6.4, c).

4°. La capa superficial curvada ejerce sobre el líquido una presión Δp adicional a la exterior y originada por las fuerzas de tensión superficial. Esta presión es semejante a la que ejerce una envoltura elástica tensa sobre el gas contenido en ella. La presión adicional que ejerce sobre el líquido una capa superficial de forma arbitraria, se calcula por la fórmula

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

en la que σ es el coeficiente de tensión superficial (II.6.4.4°), y R_1 y R_2 , los radios de curvatura de dos secciones cualesquiera, perpendiculares entre sí y normales a la superficie del líquido en el punto en que se encuentra la molécula A *). El radio de curvatura R_1 (ó R_2) se considera positivo si el centro de curvatura de la sección respectiva se encuentra dentro del líquido. En el caso contrario el radio de curvatura se considera negativo. De este modo, $\Delta p > 0$ si el menisco es convexo, y $\Delta p < 0$ si el menisco es cóncavo. En caso de que la superficie sea plana, $R_1 = R_2 = \infty$ y no existirá presión adicional ($\Delta p = 0$). Cuando la superficie es esférica, $R_1 = R_2 = R$ y $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$. Por ejemplo, esta presión adicional existe dentro de una burbuja de gas de radio R que se encuentre dentro de un líquido y cerca de su superficie.

La sobrepresión dentro de una burbuja de jabón de radio R es producida por ambas capas superficiales de la fina película esférica de jabón, y $\Delta p = \frac{4\sigma}{R}$.

*) Se llama sección normal la superficie en un punto A , la curva que se obtiene como resultado de la intersección de la superficie con un plano que pase por la normal a la superficie en este punto.

5°. El nivel del líquido en un *tubo capilar* de radio r difiere del nivel del mismo líquido en un vaso ancho comunicante con aquél. El nivel del líquido en el tubo capilar es más alto (más bajo) que en el vaso, en la magnitud h , si el líquido moja (no moja) sus paredes:

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{rg\rho},$$

donde ϑ es el ángulo de contacto (p. 1°); ρ , la densidad del líquido; y g , la aceleración de la gravedad (I.7.3.3°).

Cuando el capilar tiene la forma de intersticio de anchura constante δ , el menisco es cilíndrico de radio $\delta/2$, y la altura a que se eleva (si moja) o desciende (si no moja) el líquido en dicho capilar constituye

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\delta g\rho}.$$

6°. La presión del vapor saturado (II.5.3.2°) sobre la superficie curvada del líquido depende de la forma del menisco. Si éste es cóncavo (convexo), la presión del vapor saturado es menor (mayor) que sobre la superficie plana en la magnitud Δp_m :

$$\Delta p_m = \frac{\rho}{\rho_1 - \rho} \Delta p,$$

donde ρ es la densidad del vapor saturado; ρ_1 , la densidad del líquido; y Δp , la presión adicional debida a la curvatura de la superficie (p. 4°).

§ 11.6.6. Evaporación y ebullición de los líquidos

1°. El proceso de vaporización que tiene lugar en la superficie libre de un líquido se llama *evaporación*. La evaporación se produce a cualquier temperatura y aumenta al elevarse ésta. En la capa superficial del líquido hay moléculas que tienen gran velocidad y energía cinética del movimiento térmico. Su escape de la superficie del líquido explica la evaporación y la disminución, relacionada con ella, de la reserva de energía interna del líquido y su enfriamiento. De medida del proceso de vaporización sirve la *velocidad de evaporación* u apreciada por la cantidad de líquido que pasa a vapor en la unidad de tiempo. La velocidad u depende de la presión externa y del movimiento de

la fase gaseosa (II.5.3.9°) sobre la superficie libre del líquido:

$$u = \frac{cS}{p_0} (p_s - p),$$

siendo c una constante; S , el área de la superficie libre del líquido; p_s , la tensión del vapor saturado; p , la tensión del vapor del líquido sobre la superficie libre de éste; y p_0 , la presión barométrica externa.

2°. La *ebullición* es la evaporación intensa de un líquido que tiene lugar no sólo en su superficie, sino también en toda su masa dentro de las burbujas de vapor que se forman en este caso. Las dimensiones de las burbujas de vapor aumentan rápidamente y éstas emergen a la superficie y revientan. A esto se debe el borboteo característico del líquido en ebullición. La presión p dentro de una burbuja gaseosa inmersa en el líquido se compone de la presión externa p_0 , la presión hidrostática p_h de las capas del líquido que hay sobre ella, y la presión adicional Δp debida a la tensión superficial (II.6.5.4°):

$$p = p_0 + p_h + \Delta p,$$

siendo

$$p_h = \rho gh \quad \text{y} \quad \Delta p = \frac{2\sigma}{r},$$

donde r es el radio de la burbuja de vapor; h la distancia desde su centro a la superficie del líquido; y ρ y σ , respectivamente, la densidad y el coeficiente de tensión superficial del líquido.

La ebullición del líquido comienza a la temperatura en que la tensión p_s del vapor saturado dentro de la burbuja no es menor que la presión p (p. 2°):

$$p_s \geq p_0 + \rho gh + \frac{2\sigma}{r}.$$

Si esta condición no se cumple, la burbuja «se cierra» y el vapor que había en ella se condensa.

3°. Cuando los radios r de las burbujas de vapor son pequeños, la tensión p_s debe ser grande y para que el líquido empiece a hervir hay que calentarlo hasta una temperatura alta. Si en el líquido hay *centros de vaporización* (partículas de polvo, burbujas de gases disueltos, etc.), la ebullición comienza a una temperatura bastante más baja. Esto se debe a que en los centros de vaporización surgen burbujas de vapor de tal dimensión, que la influencia del tercer término de la desigualdad del p. 2° se puede despreciar. Además, por lo general, $\rho gh \ll p_0$ y la

condición aproximada para el comienzo de la ebullición tiene la forma

$$p_s \approx p_0.$$

La temperatura del líquido a la cual la tensión de su vapor saturado es igual a la presión externa se llama *temperatura (o punto) de ebullición*.

4°. A presión constante, la temperatura del líquido en ebullición también permanece constante. La cantidad de calor que se le suministra al líquido que hierve se gasta totalmente en transformar en vapor las moléculas del líquido. El calor r_e necesario para vaporizar la unidad de masa de un líquido calentado hasta la temperatura de ebullición se llama *calor de vaporización o calor latente de vaporización*. La magnitud r_e disminuye a medida que se eleva la temperatura de ebullición y se anula a la temperatura crítica (II.5.3.1°).

La variación que experimenta la energía interna de un líquido (II.2.1.1°) cuando la unidad de su masa se transforma en vapor a la temperatura de ebullición, se denomina *calor interno de vaporización*.

5°. La ebullición de un líquido y la condensación de su vapor son ejemplos de *transiciones de fase de I orden* (compárese con II.5.4.2°). Estas transiciones de fase se caracterizan por la constancia simultánea de la presión y la temperatura, pero la razón entre las masas de las dos fases varía (II.5.3.3°). Para que se efectúe la transición de fase de I orden hay que cederle al sistema o extraer del mismo el *calor r_e de transición de fase*. Refiriéndose a la unidad de masa, el calor r_e se determina por la *ecuación de Clapeyron — Clausius*:

$$r_e = (v_2 - v_1) T \frac{dp}{dT},$$

en la que v_1 y v_2 son, respectivamente, los volúmenes específicos de la sustancia en las fases inicial y final, y T y p , la temperatura y la presión de la transición de fase.

6°. De la ecuación de Clapeyron — Clausius para la ebullición de un líquido se deduce que

$$\frac{dT}{dp} = \frac{(v_v - v_l) T}{r_e},$$

donde v_l y v_v son los volúmenes específicos del líquido y el vapor a la temperatura de ebullición T . Como $v_v > v_l$ y $r_e > 0$, resulta que $\frac{dT}{dp} > 0$, es decir, cuando aumenta la presión, la temperatura de ebullición se eleva.

Capítulo III.1. Cargas eléctricas. Ley de Coulomb

§ III.1.1. Introducción

1°. Se llama *electrostática* la parte de la teoría de la electricidad en que se estudia la interacción y las propiedades de los sistemas de cargas eléctricas en reposo respecto de un sistema de referencia (I.2.1.2°) elegido.

Existen dos tipos de cargas eléctricas: *positivas* y *negativas*. Las cargas de signo contrario se atraen y las del mismo signo se repelen entre sí.

2°. La carga eléctrica de todo sistema de cuerpos consta de un número entero de cargas elementales iguales a $1,6 \cdot 10^{-19}$ C. La partícula estable de menor masa en reposo (I.5.6.1°), con carga elemental negativa, es el *electrón*. La masa en reposo del electrón es igual a $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. La partícula estable de masa mínima en reposo con carga elemental positiva, el *positrón* o *positón* (VIII.2.5.1°), tiene la misma masa en reposo que el electrón *). Existe además otra partícula estable con carga elemental positiva, el *protón*. La masa en reposo del protón es igual a $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Los electrones y los protones entran en la composición de todos los elementos químicos.

3°. *Ley de conservación de la carga eléctrica*: la suma algebraica de las cargas eléctricas de los cuerpos o partículas que forman un sistema eléctricamente aislado no varía cualesquiera que sean los procesos que ocurran en dicho sistema.

En el sistema considerado pueden formarse nuevas partículas con carga eléctrica, por ejemplo, electrones, debido al fenó-

*) La inestabilidad del positrón, ordinaria en nuestro mundo y debida a la aniquilación de los pares electrón-positrón (VIII.2.5.1°), no se toma en consideración en este caso.

meno de ionización de los átomos o moléculas (III.9.4.1°), iones a causa del fenómeno de disociación electrolítica, etc. Pero si el sistema está eléctricamente aislado, la suma algebraica de las cargas de todas las partículas nuevas surgidas en dicho sistema será siempre igual a cero. La ley de conservación de la carga eléctrica es una de las leyes de conservación fundamentales, lo mismo que las leyes de conservación del impulso (I.2.7.1°) y de la energía (I.3.4.2°).

4°. Cuando dos cuerpos eléctricamente neutros se ponen en contacto, como resultado del rozamiento, las cargas pasan de un cuerpo a otro. En cada uno de ellos se altera la igualdad de la suma de las cargas positivas y la suma de las cargas negativas, y los cuerpos se cargan con electricidades de signos distintos.

Si un cuerpo se electriza por influencia, en él se altera la distribución regular de las cargas. Éstas se distribuyen de tal forma que en una parte del cuerpo surge un exceso de cargas positivas, y en otra, un exceso de cargas negativas. Si estas dos partes del cuerpo se separan, tendrán cargas de signos distintos.

§ III.1.2. Ley de Coulomb

1°. Coulomb estableció, por vía experimental, que la fuerza de interacción F_{12} entre dos bolitas pequeñas cargadas, cuyas cargas sean iguales, respectivamente, a q_1 y q_2 (III.1.1.1°), es directamente proporcional al producto q_1q_2 e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre ellas:

$$F_{12} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

donde k_1 es el coeficiente de proporcionalidad ($k_1 > 0$).

2°. Las fuerzas que actúan sobre las cargas son *centrales* y están dirigidas a lo largo de la recta que une sus centros. Cuando interaccionan cargas del mismo signo, el producto $q_1q_2 > 0$ y $F_{12} > 0$. Esto corresponde a la repulsión de las cargas. Para cargas de signos distintos, $q_1q_2 < 0$, $F_{12} < 0$ y se produce la atracción entre esas cargas. La forma vectorial de la ley de Coulomb es

$$\mathbf{F}_{12} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r},$$

siendo F_{12} la fuerza que actúa sobre la carga q_1 por parte de la carga q_2 ; r_{12} , el radio vector que une la carga q_2 con la q_1 ; y $r = |r_{12}|$ (fig. III.1.1, a).

La fuerza F_{21} que actúa sobre la carga q_2 por parte de q_1 es

$$F_{21} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{r_{21}}{r},$$

en la que $r_{21} = -r_{12}$ es el radio vector que une las cargas q_1 y q_2 (fig. III.1.1, b). Las fuerzas F_{12} y F_{21} se llaman *coulombianas*.

3°. La ley de Coulomb es correcta para la interacción de *cargas eléctricas puntuales*, es decir, de cuerpos con cargas tales,

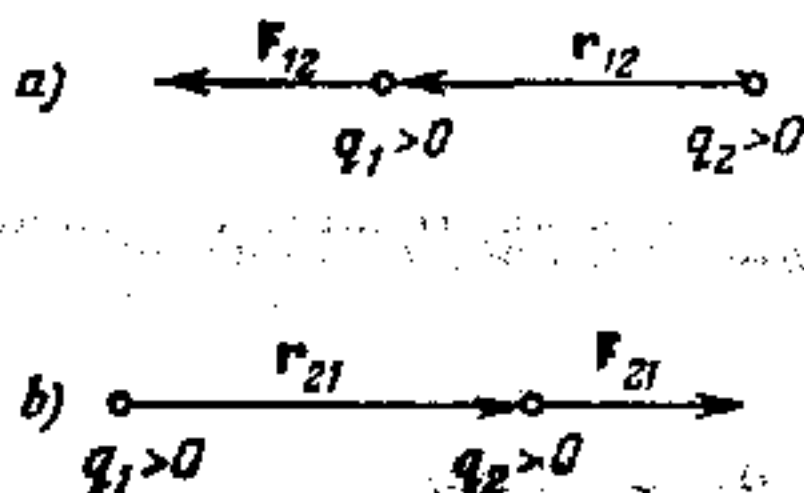


Fig. III.1.1.

que sus dimensiones lineales d sean mucho menores que la distancia r entre ellos ($d \ll r$) y que estén en reposo en el sistema inercial de referencia dado.

Ley de Coulomb: la fuerza de interacción electrostática entre dos cargas eléctricas puntuales es directamente proporcional al producto de las magnitudes de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas y está dirigida a lo largo de la recta que las une.

La ley de Coulomb en la forma del p. 2° también es correcta para la interacción de dos esferas cargadas cuyos radios sean R_1 y R_2 , si las cargas q_1 y q_2 de estas esferas están distribuidas regularmente por sus superficies o volúmenes. Los radios R_1 y R_2 pueden ser conmensurables con la distancia r entre los centros de las esferas.

4°. La fuerza de Coulomb (p. 2°) depende de las propiedades del medio en que se hallan las cargas que interaccionan. Esta dependencia se puede tener en cuenta si en las fórmulas de los pp. 1° y 2° se representa el coeficiente k_1 en forma de relación

entre dos coeficientes:

$$k_1 = k/\varepsilon,$$

donde k es un coeficiente que sólo depende del sistema de unidades de medida que se elija, y ε es la *permitividad relativa*, adimensional del medio, que caracteriza sus propiedades eléctricas. Se supone que el medio es ilimitado, homogéneo e isótropo, o sea, que sus propiedades son iguales en todo su volumen y no dependen de la dirección. Para el vacío ε se considera igual a la unidad.

5°. La ley de Coulomb para un medio de permitividad relativa ε tiene la forma

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}.$$

Para las cargas q_1 y q_2 que se hallen en el vacío ($\varepsilon = 1$),

$$F_0 = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

De aquí se deduce el sentido de la permitividad relativa ε :

$$\varepsilon = F_0/F.$$

6°. El concepto de ε introducido en los puntos 4° y 5° sólo tiene sentido en los casos estipulados en el p. 4°. La disminución de la fuerza F en ε veces se debe a la *electrostricción*, es decir, a la deformación del dieléctrico (III.5.1.1.°) bajo la influencia de los cuerpos cargados. Los dieléctricos líquidos y gaseosos, al deformarse se acercan mucho a los cuerpos con carga y ejercen sobre ellos una acción mecánica adicional que hace que disminuya la fuerza coulombiana (p. 2°). En los dieléctricos sólidos, las cargas q_1 y q_2 pueden estar dentro de ciertos planos, y el cálculo de las fuerzas F_{12} y F_{21} (p. 2°) se complica mucho. Estas fuerzas dependen de la forma de los planos en que se encuentran las cargas q_1 y q_2 . En estas condiciones la interpretación de ε dada en el p. 5° resulta imposible.

7°. En el SI (IX), el coeficiente k de las fórmulas del p. 5° se toma igual a

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

y la ley de Coulomb se escribe en la forma

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}.$$

Esta forma de escribir la ley de Coulomb y todas las leyes que de ella derivan se llama *racionalizada*.

La magnitud ϵ_0 se llama, en el SI, *constante dieléctrica*.

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \quad (\text{IX}).$$

El producto $\epsilon_0 \epsilon$ recibe a veces el nombre de *permitividad absoluta del medio*.

En el sistema CGSE (IX) la ley de Coulomb se escribe de la forma no racionalizada siguiente:

$$F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}$$

Capítulo III.2. Intensidad y desplazamiento del campo eléctrico

§ III.2.1. Campo eléctrico. Intensidad del campo

1°. Se llama *campo de fuerzas* una de las formas de la materia que estudia la física a la par que la substancia. La peculiaridad más importante de los campos de fuerzas es la de que con su ayuda se efectúan las interacciones de diversos tipos. Así, el campo de gravitación (I.6.2.1°) efectúa la interacción gravitatoria de las masas que se encuentran en él. Todos los campos poseen propiedades muy importantes que caracterizan su materialidad, en primer lugar energía. Entre el campo y la substancia no existen límites infranqueables, se pueden transformar el uno en la otra y viceversa (VIII.2.5.5°).

El campo físico no puede determinarse como el espacio en que actúan ciertas fuerzas. El espacio, lo mismo que el tiempo, es una forma de existencia de la materia. Del hecho de que los campos existan en el espacio no se deduce, ni mucho menos, que el campo pueda identificarse con el espacio, ya que una forma de existencia de la materia no puede confundirse con la materia misma.

2°. La interacción coulombiana (III.1.2.2°) entre las partículas o cuerpos eléctricamente cargados y en reposo, se efectúa por medio del *campo electrostático* que ellos crean. El campo

electrostático es el campo invariable con el tiempo, o sea, el *campo eléctrico estacionario* creado por las cargas eléctricas en reposo. Este campo es una de las formas de *campo electromagnético*, el cual efectúa la interacción entre las partículas (o cuerpos) eléctricamente cargados que se mueven, en el caso general, de un modo arbitrario con respecto al sistema de referencia elegido.

La propiedad característica de un campo eléctrico arbitrario, que lo distingue de otros campos físicos, es la de actuar tanto sobre las cargas eléctricas (partículas y cuerpos con carga) en movimiento, como sobre las que están en reposo.

3°. Para caracterizar cuantitativamente la fuerza con que actúa el campo eléctrico sobre las partículas y cuerpos cargados, sirve el vector *intensidad del campo eléctrico* \mathbf{E} . La intensidad del campo eléctrico en un punto dado del mismo es igual a la razón de la fuerza \mathbf{F} , que actúa por parte del campo sobre una *carga eléctrica puntual* (III.1.2.3°) *de ensayo* situada en el punto considerado del campo, a la magnitud q_0 de esta carga:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

Se admite que la «carga de ensayo» q_0 es tan pequeña, que su presencia no provoca la redistribución en el espacio de las cargas que crean el campo sujeto a investigación. En otras palabras, la carga de ensayo no distorsiona el campo que se estudia con su ayuda.

Un campo eléctrico se dice que es *homogéneo* (*campo eléctrico homogéneo o uniforme*) si en cualquier punto del mismo el vector intensidad \mathbf{E} tiene magnitud y dirección constantes.

4°. La intensidad del campo electrostático de una carga puntual q en un punto situado a la distancia r de ella, será

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon r^3} \mathbf{r} \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

donde \mathbf{r} es el radio vector que une la carga q con el punto en que se calcula la intensidad del campo. Los vectores \mathbf{E} tienen dirección radial en todos los puntos del campo partiendo de la carga q si $q > 0$, y convergiendo hacia ella si $q < 0$. La proyección E_r de la intensidad del campo sobre la dirección del radio vec-

tor r , es :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$E_r = \frac{q}{r^2} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Con una fórmula semejante se calcula la intensidad del campo de una esfera electrizada (por su superficie) con una carga q a la distancia r del centro de dicha esfera cuyo radio es R . Dentro de esta última, $E_r = 0$.

5°. La fuerza F que actúa por parte del campo eléctrico sobre una carga arbitraria q situada en un punto dado del campo, constituye

$$F = qE,$$

donde E es la intensidad del campo (en el punto en que se encuentra la carga q) distorsionado por esta carga, es decir, diferente del campo que existía antes de introducir en él la carga q .

6°. Para representar gráficamente los campos electrostáticos se utiliza el método de *líneas de fuerza* (*líneas de intensidad del campo*).

Se llaman *líneas de fuerza* las curvas cuyas tangentes en cada punto coinciden con la dirección del vector intensidad del campo. Las líneas de fuerza se considera que tienen la misma dirección que el vector intensidad. Las líneas de intensidad del campo no se cortan, ya que en cada punto de éste, el vector E sólo tiene una dirección.

Las líneas de fuerza no son idénticas a las trayectorias que siguen en el campo electrostático las partículas ligeras cargadas. En cada punto de la trayectoria de una partícula es tangente a ella la dirección de la velocidad. La fuerza que actúa sobre una partícula cargada y, por consiguiente, su aceleración, están dirigidas con arreglo a la tangente de la línea de fuerza.

§ III.2.2. Principio de la superposición de los campos eléctricos

1°. El problema fundamental de la electrostática se formula del modo siguiente: dada la distribución en el espacio y la magnitud de las fuentes del campo —cargas eléctricas— hallar la magnitud y la dirección del vector intensidad E en cada punto del campo.

2°. Si el campo es creado por un sistema de cargas en reposo $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, la fuerza resultante F que actúa sobre la carga de ensayo q_0 (III.2.1.2°) en cualquier punto del campo considerado, será igual a la suma vectorial de las fuerzas F_i que ejercen sobre la carga q_0 cada una de las cargas q_i :

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{F}_i.$$

De acuerdo con (III.2.1.3°) $F = q_0 E$ y $F_i = q_0 E_i$, donde E es la intensidad del campo resultante, y E_i , la intensidad del campo creado por la carga q_i . De las fórmulas precedentes se deduce el *principio de la independencia de la acción de los campos eléctricos* o *principio de la superposición* de dichos campos:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i.$$

La intensidad del campo eléctrico de un sistema de cargas es igual a la suma vectorial de las intensidades de los campos que crean cada una de las cargas por separado. La intensidad del campo resultante se halla superponiendo las intensidades de los campos de cada carga.

Para las cargas distribuidas continuamente en el espacio (p. 3°), el principio de superposición tiene la forma

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E},$$

donde la integración se extiende a todas las fuentes de los campos, distribuidas de modo continuo y que crean los campos eléctricos de intensidad $d\mathbf{E}$.

Ejemplo. Un sistema de cargas puntuales en reposo q_1, q_2, \dots, q_n crea un campo electrostático cuya intensidad E es

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_i \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_i \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

siendo \mathbf{r}_i el radio vector trazado desde la carga puntual q_i al punto que se analiza del campo. Cualquier cuerpo cargado, cuya

carga Q (p. 3°) esté distribuida en él discretamente, se puede dividir en partes muy pequeñas que tengan, cada una de ellas, carga puntual. Por esto la fórmula anterior tendrá valor general para el cálculo de los campos electrostáticos en un medio homogéneo isótropo que llene todo el campo.

3°. Las fuentes de los campos electrostáticos — cargas eléctricas — pueden estar distribuidas en el espacio *discretamente* (*distribución discreta de las cargas*), es decir en puntos determinados del espacio, o *continuamente* (*distribución continua de las cargas*). En este último caso las cargas permanecerán distribuidas a lo largo de cierta línea sobre la superficie de cualquier cuerpo o en un volumen determinado. Para la distribución continua de las cargas eléctricas se introduce el concepto de densidad de las cargas. Si las cargas eléctricas están distribuidas continuamente a lo largo de una línea, se introduce la *densidad lineal τ de las cargas*:

$$\tau = \frac{dq}{dl}$$

en la que dq es la carga de una parte infinitesimal de una línea de longitud dl .

Si las cargas eléctricas están distribuidas continuamente en una superficie, se introduce la *densidad superficial σ de las cargas*:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

siendo dq la carga situada en una porción infinitesimal de una superficie de área dS .

Cuando las cargas eléctricas están distribuidas continuamente en un volumen cualquiera, se introduce la *densidad espacial ρ de las cargas*:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

donde dq es la carga de un elemento infinitesimal de volumen dV .

Ejemplo. Campo electrostático de un dipolo eléctrico. Se da el nombre de *dipolo eléctrico* a un sistema de dos cargas eléctricas de igual magnitud y de signos opuestos, $+q$ y $-q$ ($q > 0$), separadas por una distancia l pequeña en comparación con la distancia hasta los puntos del campo que se consideran. Se llama *brazo del dipolo* el vector l dirigido (conforme al eje

del dipolo) de la carga negativa a la positiva, e igual numéricamente a la distancia l entre ellas (fig. III.2.1). El producto de la carga q del dipolo ($q > 0$) por el brazo l se denomina *momento eléctrico* p_e del dipolo:

$$p_e = ql.$$

La intensidad E del campo del dipolo en un punto arbitrario constituye

$$E = E_+ + E_-,$$

donde E_+ y E_- son las intensidades de los campos de las cargas $+q$ y $-q$ (fig. III.2.1).

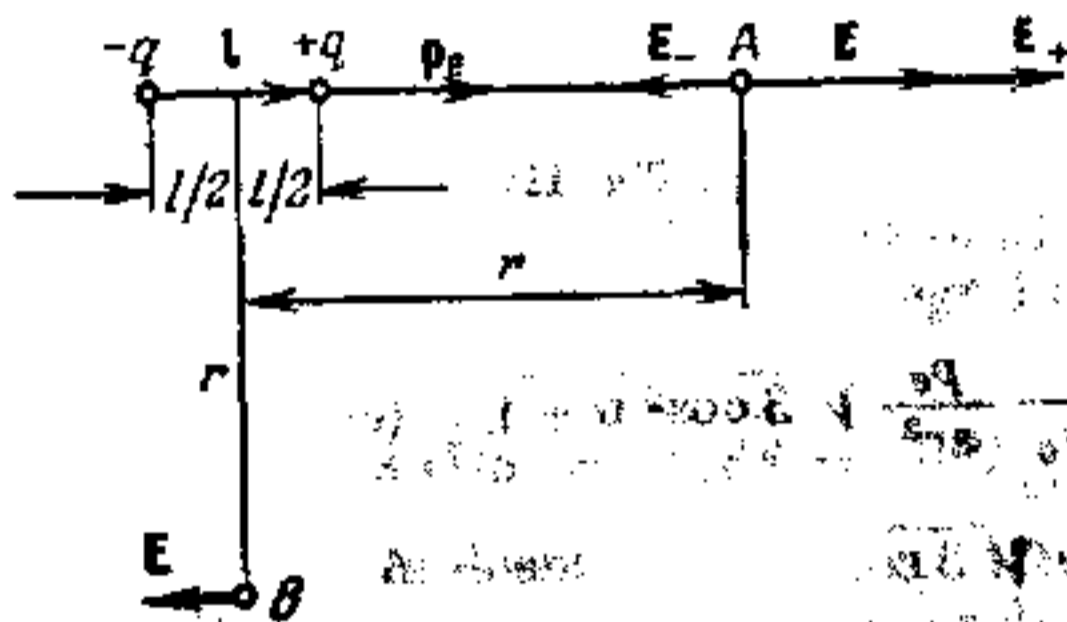


Fig. III.2.1.

En un punto A , situado sobre el eje del dipolo a la distancia r de su centro (fig. III.2.1) ($r \gg l$), la intensidad del campo del dipolo es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{r^3} \quad (\text{en el SI}),$$

$$E = \frac{2p_e}{\epsilon r^3} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

En un punto B , situado en la perpendicular levantada al eje del dipolo en su punto medio a la distancia r del centro ($r \gg l$),

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \quad (\text{en el SI}),$$

$$E = -\frac{p_e}{\epsilon r^3} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

En un punto arbitrario O , suficientemente alejado del dipolo ($r \gg l$) (fig. III.2.2), el módulo de intensidad de su campo

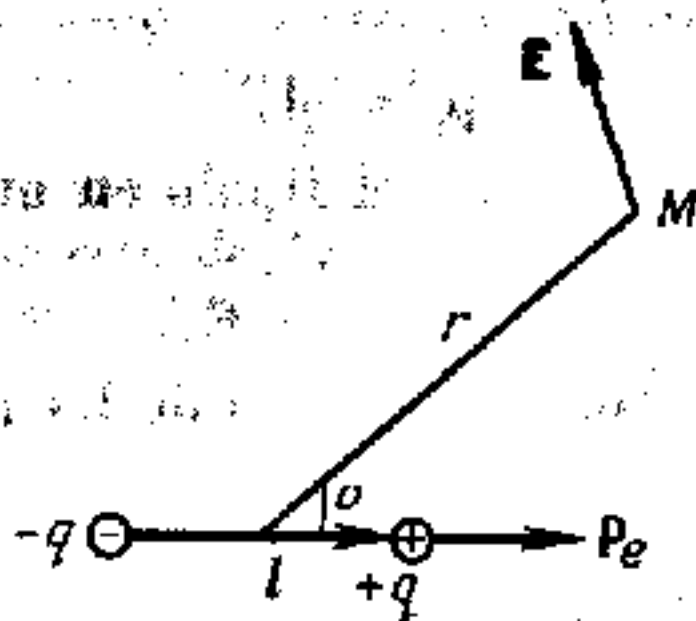


Fig. III.2.2.

constituye

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Pe}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (\text{en el SI}),$$

$$E = \frac{Pe}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

1.2.11.11.11.11

§ III.2.3. Desplazamiento eléctrico.

Teorema de Ostrogradski—Gauss

1°. La intensidad del campo eléctrico (III.2.1.2°) depende de las propiedades del medio. En un medio isótropo homogéneo la intensidad E es inversamente proporcional a ϵ (III.1.2.5°). Para caracterizar el campo eléctrico, además de la intensidad E , se introduce el vector de *desplazamiento* o *inducción eléctrica* D . Para un campo en un medio eléctricamente isótropo, la relación entre D y E tiene la forma

$$D = \epsilon_0 \epsilon E \quad (\text{en el SI}),$$

$$D = \epsilon E \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

La definición general de D , correcta para los medios no isótropos, puede verse en III.5.3.4°.

Ejemplo. Para el campo de una carga eléctrica puntual q (III.1.2.3°),

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \mathbf{r} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{D} = \frac{q}{r^2} \mathbf{r} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

La proyección de \mathbf{D} sobre la dirección del radio vector \mathbf{r} trazado desde la carga puntual al punto de un campo dado, constituye

$$D_r = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$D_r = \frac{q}{r^2} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

2.° Se llama *flujo de desplazamiento elemental* $d\Phi_e$ a través de una porción de superficie de área dS , la magnitud física escalar definida por la igualdad

$$d\Phi_e = \mathbf{D} d\mathbf{S} = D dS \cos(\widehat{\mathbf{D}\mathbf{n}}) = D_n dS = D dS_{\perp},$$

en la que \mathbf{D} es el vector de desplazamiento (p. 1°); \mathbf{n} , el versor normal a la superficie dS ; $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$, el vector de la superficie

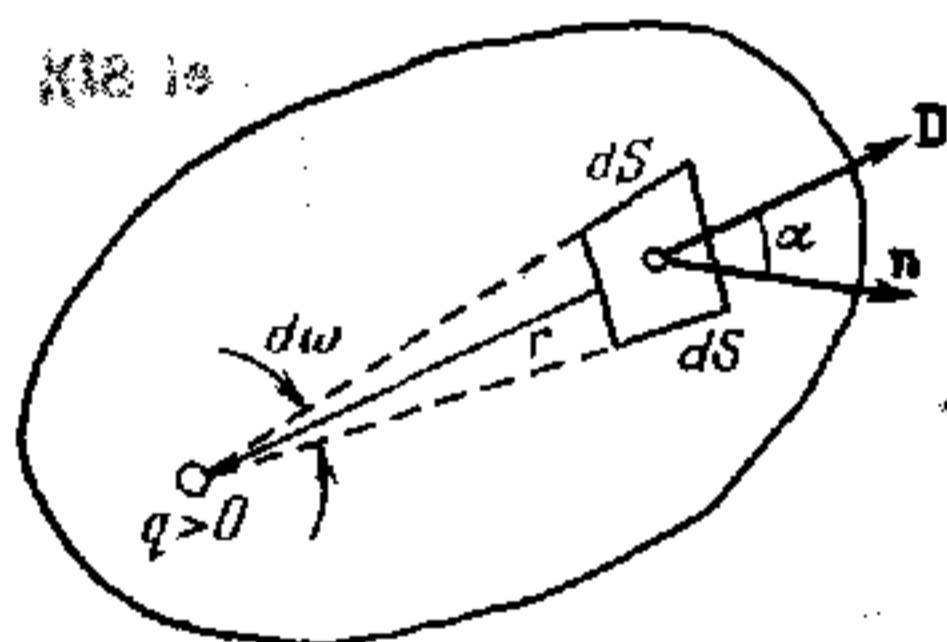


Fig. III.2.3.

dS ; $D_n = D \cos \alpha$, la proyección del vector \mathbf{D} sobre la dirección del vector \mathbf{n} ; y $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$, el área de la proyección de la superficie elemental dS sobre un plano perpendicular al vector \mathbf{D} (fig. III.2.3).

Si el campo eléctrico fue creado por una carga puntual q , el flujo de desplazamiento $d\Phi_e$ a través del área elemental dS de la superficie cerrada S que rodea dicha carga, constituye

$$d\Phi_e = \frac{q}{4\pi} d\omega,$$

donde $d\omega$ es el ángulo sólido bajo el cual se ve el área dS de la superficie S desde la carga puntual q (fig. III.2.3).

El flujo de desplazamiento total Φ_e a través de la superficie S se halla sumando o integrando todos los flujos elementales:

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_S D \, dS \cos(\widehat{\mathbf{Dn}}) = \int_S D_n \, dS = \int_S D \, dS_{\perp}.$$

En este caso todos los versores \mathbf{n} normales a las áreas dS se dirigen a un mismo lado de la superficie S . Por ejemplo, si la superficie S está cerrada (fig. III.2.3), todos los versores \mathbf{n} de las normales deberán ser o externos o internos *).

3°. *Teorema de Ostrogradski — Gauss*: el flujo de desplazamiento a través de una superficie cerrada arbitraria es igual o proporcional a la suma algebraica de las cargas eléctricas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ abarcadas por esta superficie:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S D_n \, dS = \sum_{i=1}^k q_i \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S D_n \, dS = 4\pi \sum_{i=1}^k q_i \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

El flujo de desplazamiento a través de cualquier superficie cerrada que no abarque cargas es nulo.

La forma diferencial del teorema de Ostrogradski — Gauss es una de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético (III.14.4.2°).

4°. *Teorema de Ostrogradski — Gauss para un campo electrostático en el vacío*: el flujo del vector intensidad del campo electrostático en el vacío, a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la suma algebraica de las cargas eléctricas

* En adelante sólo se utilizarán las normales externas.

abarcadas por esta superficie:

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^k q_i \quad (\text{en el SI, siendo } \epsilon_0 \text{ la constante dieléctrica (III.1.2.7°)}),$$

$$\oint_S \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = 4\pi \sum_{i=1}^k q_i \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

El teorema de Ostrogradski — Gauss para el campo de un dieléctrico se puede ver en III.5.3.3°.

5°. Junto con el principio de superposición de los campos (III.2.2.1°), el teorema de Ostrogradski — Gauss se utiliza para calcular los vectores \mathbf{D} de los campos eléctricos. Para esto hay que elegir de tal modo la superficie cerrada, que en la expresión del flujo de desplazamiento pueda sacarse \mathbf{D} fuera del signo de la integral de superficie. Para los campos creados por cargas muy simple, simétricamente situadas (línea, plano, esfera, etc. cargados), esto se puede hacer.

Capítulo III.3. Potencial del campo electrostático

§ III.3.1. Trabajo realizado al trasladar una carga eléctrica en un campo electrostático

1°. El trabajo que se realiza al trasladar una carga eléctrica q' en un campo electrostático de intensidad \mathbf{E} (III.2.1.2°), no depende de la forma de la trayectoria descrita por esa carga al trasladarse, sino únicamente de las posiciones inicial y final de la misma. Dicho de otra forma, las fuerzas electrostáticas, lo mismo que las de gravitación, son fuerzas potenciales (I.3.1.6°). El trabajo δA realizado por la fuerza $\mathbf{F} = q'\mathbf{E}$ que actúa sobre la carga q' , al trasladarla en un segmento $d\mathbf{l}$, constituye

$$\delta A = F \, dl \cos(\widehat{\mathbf{F} \, d\mathbf{l}}) = q' E \cos(\widehat{\mathbf{E} \, d\mathbf{l}}) \, dl,$$

donde $(\widehat{E dl})$ es el ángulo entre las direcciones de los vectores E y dl .

En una traslación finita de la carga q' desde un punto a a un punto b , el trabajo será

$$A = q' \int_a^b E \cos (\widehat{E dl}) dl = q' \int_a^b E dl,$$

donde $E dl$ es el producto escalar de los vectores E y dl .

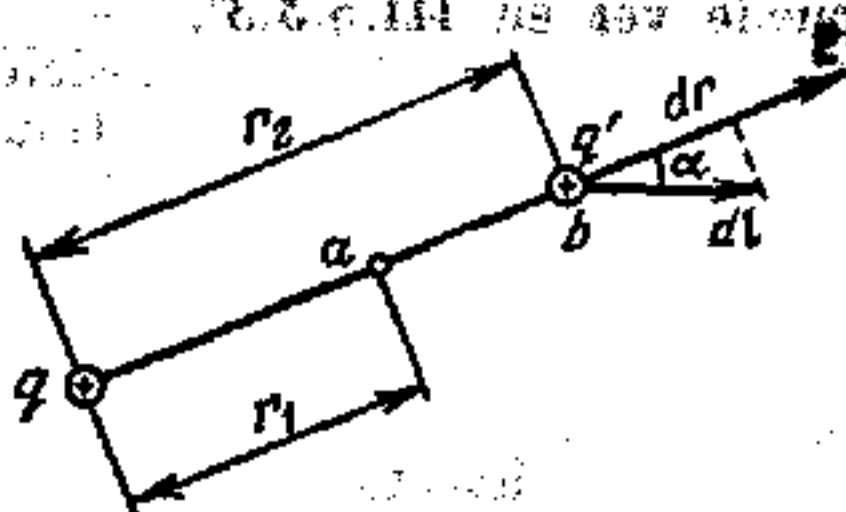


Fig. III.3.1.

2°. Si el campo fue creado por una carga puntual q , entonces

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad dl \cos (\widehat{E dl}) = dr,$$

y el trabajo realizado al trasladar la carga q' desde el punto a al punto b en este campo, será

$$A = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right);$$

siendo r_1 y r_2 las distancias desde la carga q a los puntos a y b (fig. III.3.1).

Si las cargas q y q' tienen el mismo signo, el trabajo A de las fuerzas eléctricas de repulsión es positivo cuando las cargas se alejan una de otra, y negativo, cuando se aproximan entre sí. El trabajo de las fuerzas eléctricas de atracción, si las cargas q y q' tienen signos distintos, es positivo cuando las cargas se acercan la una a la otra, y negativo, cuando se alejan entre sí.

3°. Al trasladarse una carga eléctrica q' en el campo creado por un sistema de cargas puntuales q_1, q_2, \dots, q_n , sobre la

carga q' actúa una fuerza

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n,$$

y el trabajo A de la fuerza resultante es igual a la suma algebraica de los trabajos que realizan las fuerzas componentes

$$A = A_1 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n \frac{q'q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right),$$

donde r_{i1} y r_{i2} son las distancias desde la carga q_i hasta las posiciones inicial y final de la carga q' . Cada uno de los trabajos A_i y el trabajo total A dependen de las posiciones inicial y final de la carga q' y no de la forma de su trayectoria.

4°. Recibe el nombre de *circulación de la intensidad*, siguiendo el contorno cerrado L , la integral curvilínea:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} \cos(\widehat{\mathbf{E} d\mathbf{l}}) = \int_L \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Esta integral equivale numéricamente al trabajo que realizan las fuerzas electrostáticas cuando por un camino cerrado se traslada una carga eléctrica unitaria positiva. Como para un cami-

no cerrado $r_{i1} = r_{i2}$, de acuerdo con el p. 3° tenemos que $\int_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$, es decir, que el trabajo a que nos referimos es nulo.

El campo de fuerzas cuya intensidad \mathbf{E} satisface esta condición se llama *campo de potencial*. El campo electrostático es un campo de potencial.

La forma diferencial de la condición de potencialidad del campo electrostático es una de las ecuaciones de Maxwell para el campo electrostático (III.14.2.1°).

§ III.3.2. Potencial de un campo electrostático

1°. El trabajo δA (III.3.1.1°) es igual a la pérdida dW_p de energía potencial (I.3.3.1°) de la carga q' que se traslada en el campo electrostático,

$$\delta A = -dW_p$$

y

$$A = \int_a^b q' E dl \cos(\widehat{\mathbf{E} d\mathbf{l}}) = -\Delta W_p = W_{1p} - W_{2p},$$

donde W_{1p} y W_{2p} son los valores de la energía potencial de la carga q' en los puntos del campo a y b (fig. III.3.1).

2°. Si una carga puntual q' es trasladada por la acción de las fuerzas electrostáticas en el campo de una carga puntual q , la variación dW_p de su energía potencial para una traslación infinitesimal es

$$dW_p = -\delta A = -\frac{qq' dr}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

Para una traslación finita de la carga q' desde un punto a a un punto b (fig. III.3.1), la variación ΔW_p de la energía potencial de la carga será

$$\Delta W_p = W_{2p} - W_{1p} = \int_{r_1}^{r_2} dW_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\Delta W_p = qq' \left(\frac{1}{\epsilon r_2} - \frac{1}{\epsilon r_1} \right) \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

3°. Si la carga q' se traslada en el campo creado por un sistema de cargas puntuales (q_1, q_2, \dots, q_n), la variación de su energía potencial q' será

$$\Delta W_p = q' \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{i2}} - \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{i1}} \right) \quad (\text{en el SI}),$$

$$\Delta W_p = q' \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{\epsilon r_{i2}} - \frac{q_i}{\epsilon r_{i1}} \right) \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

siendo r_{i1} y r_{i2} las distancias entre las cargas q_i y q' antes y después de trasladarse esta última.

4°. Para hallar el valor absoluto de la energía potencial que tiene una carga eléctrica en un punto dado de un campo electrostático, hay que elegir el punto de referencia de la energía potencial (I.1.3.1°). La integración de la ecuación del p. 2° en el caso general da

$$W_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} + C,$$

en la que C es una constante arbitraria. Si se considera que $W_p = 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, entonces $C = 0$, y la energía potencial

de la carga q' que se encuentra en el campo de la carga q a la distancia r de ella, constituirá

$$W_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \quad (\text{en el SI}),$$

$$W_p = \frac{qq'}{\epsilon r} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Cuando las cargas q y q' tienen el mismo signo, la energía potencial de su interacción (repulsión) es positiva y crece (decrece) al aproximarse (alejarse) entre sí las cargas. En caso de atracción mutua de las cargas de signos distintos, $W_p < 0$ y aumenta hasta cero cuando una de las cargas se aleja hasta el infinito. En la fig. III.3.2 se muestra la variación de la energía potencial de dos cargas puntuales en función de la distancia entre ellas.

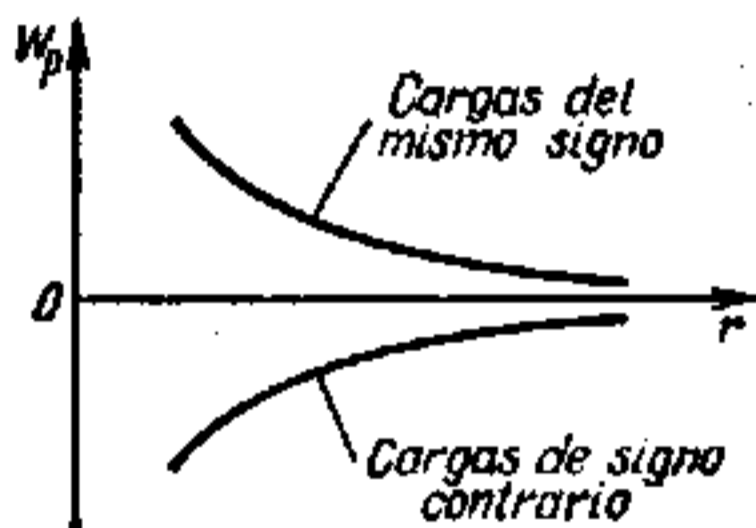


Fig. III.3.2.

5°. La energía potencial W_p de una carga q' que se encuentra en el campo de un sistema de cargas puntuales q_1, q_2, \dots, q_n , es igual a la suma de sus energías potenciales W_{ip} en los campos que crean cada una de las cargas por separado:

$$W_p = \sum_{i=1}^n W_{ip} = q' \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i} \quad (\text{en el SI}),$$

donde r_i es la distancia entre las cargas q_i y q .

6°. Se denomina *potencial de un campo electrostático* la característica energética de este campo, que representa la relación entre la energía potencial W_p de la carga q' y la magnitud de dicha carga:

$$\varphi = \frac{W_p}{q'} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i} \quad (\text{en el SI}).$$

Esta relación no depende de la magnitud de la carga q' y es numéricamente igual a la energía potencial de la carga de

ensayo unitaria (III.2.1.2°) situada en el punto considerado del campo.

Ejemplos:

1) Potencial del campo electrostático creado por una carga puntual q en un dieléctrico isótropo homogéneo,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

2) Potencial del campo creado por un conductor cargado (III.3.4.4°) en un dieléctrico isótropo homogéneo,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \oint_S \frac{\sigma dS}{r} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon} \int_S \frac{\sigma dS}{r} \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

donde σ es la densidad superficial de las cargas en el conductor (III.2.2.3°).

3) Potencial de una esfera conductora aislada, de radio R y carga q ,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon R} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

7°. El trabajo A que realizan las fuerzas eléctricas al trasladar una carga q' desde un punto a a un punto b de un campo electrostático, constituye

$$A = W_{1p} - W_{2p} = q' (\varphi_1 - \varphi_2) = q' \Delta\varphi,$$

donde W_{1p} y W_{2p} son las energías potenciales de la carga q' ; φ_1 y φ_2 , los potenciales del campo en los puntos a y b respectivamente; y $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ es la *diferencia de potencial*. Si el punto b se halla en el infinito, $W_{2p} = 0$ y $\varphi_2 = 0$. Entonces el trabajo A_∞ de traslación de la carga q' desde el punto a al infinito será

$$A_\infty = W_{1p} = q' \varphi_1.$$

En virtud del carácter arbitrario del punto a , el subíndice 1 se puede suprimir y

$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q'}$$

El potencial en un punto dado del campo electrostático es numéricamente igual al trabajo que efectúan las fuerzas electrostáticas al trasladar una carga unitaria positiva desde ese punto del campo hacia el infinito. Este trabajo también es igual numéricamente al que realizan las fuerzas externas (contra las fuerzas del campo electrostático), trasladando una carga unitaria positiva desde el infinito a un punto dado del campo.

8°. Al estudiar los campos electrostáticos, en todos los problemas importa conocer la diferencia de potencial entre puntos determinados del campo y no los valores absolutos de los potenciales de estos puntos. Por esto la elección del punto de potencial nulo viene determinada únicamente por la conveniencia de facilitar la resolución de un problema dado. Con frecuencia resulta conveniente considerar nulo el potencial de la Tierra.

§ III.3.3. Relación entre el potencial y la intensidad de un campo electrostático

1°. El trabajo elemental δA realizado en una traslación infinitesimal de una carga q' en un campo electrostático, basándose en las fórmulas de (III.3.2.1°) y (III.3.2.6°), constituye

$$\delta A = q' E \cos(\widehat{\mathbf{E} \, d\mathbf{l}}) \, dl = -dW = -q' \, d\varphi,$$

o bien

$$E \cos(\widehat{\mathbf{E} \, d\mathbf{l}}) \, dl = -d\varphi; \quad E \, dl = -d\varphi.$$

Pero $dl \cos(\widehat{\mathbf{E} \, d\mathbf{l}}) = dl_0$, donde dl_0 es el elemento de longitud de la línea de fuerza (III.1.1.4°) (fig. III.3.3), por lo que $E = -\frac{d\varphi}{dl_0}$. La derivada $\frac{d\varphi}{dl_0}$ representa la rapidez con que varía el potencial a lo largo de la línea de fuerza, numéricamente igual a la variación del potencial correspondiente a la unidad de longitud de esta línea de fuerza.

2°. La proyección E_l del vector E sobre la dirección de la traslación dl es $E_l = E \cos(\widehat{Edl})$. Por esto

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

Es evidente que $E_l \leq E$ y $\left| \frac{d\varphi}{dl} \right| \leq \left| \frac{d\varphi}{dl_0} \right|$. Por lo que E_l y $\frac{d\varphi}{dl}$ alcanzan los valores máximos si dl está dirigida tangencialmente hacia la línea de fuerza.

En las proximidades de un punto dado en el campo electrostático, el potencial varía más rápidamente en dirección de la línea de fuerza. El vector E está dirigido hacia la disminución más rápida del potencial.

3°. Una forma más general de la relación entre la intensidad y el potencial de un campo electrostático es

$$E = -\text{grad } \varphi,$$

en la que $\text{grad } \varphi$ es el vector *gradiente de potencial* dirigido hacia

la parte en que el potencial aumenta más de prisa e igual numéricamente a la rapidez de su variación por unidad de longitud en esta dirección. Si el potencial φ se considera como función de las tres coordenadas cartesianas del punto dado, entonces

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k},$$

donde \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son vectores unitarios dirigidos según los ejes OX , OY y OZ . Entre las proyecciones del vector intensidad del campo electrostático sobre los ejes de coordenadas, y el potencial del campo existen las relaciones siguientes:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

4°. Si la carga eléctrica se traslada en dirección dl perpendicular a la línea de fuerza, es decir, perpendicular al vector E , entonces $E_l = 0$ y $\frac{d\varphi}{dl} = 0$ (p. 1°), o sea, $\varphi = \text{const}$. En

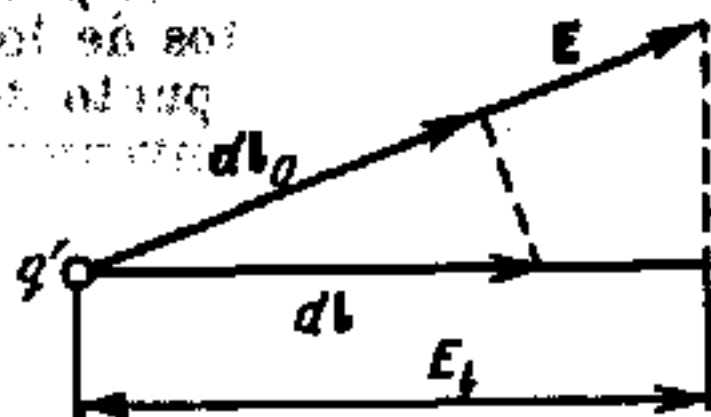


Fig. III.3.3.

todos los puntos de una curva ortogonal a las líneas de fuerza, el potencial es el mismo.

El lugar geométrico de los puntos de igual potencial se llama *superficie equipotencial*. De lo antedicho se deduce que las superficies equipotenciales deben ser en todas partes ortogonales a las líneas de fuerza.

El trabajo realizado al trasladar una carga eléctrica por una misma superficie equipotencial es nulo.

En torno a cualquier sistema de cargas eléctricas se puede trazar un conjunto infinito de superficies equipotenciales. Por lo general, éstas se construyen de tal modo que las diferencias de potencial entre dos superficies equipotenciales cualesquiera sean iguales.

5°. Existen dos procedimientos para representar gráficamente los campos electrostáticos: valiéndose de las líneas de fuerza y por medio de las superficies equipotenciales. Conociendo la disposición de las líneas de fuerza del campo electrostático se pueden construir las superficies equipotenciales y, viceversa, sabiendo cómo están situadas las superficies equipotenciales, en cada punto del campo se puede hallar la magnitud y la dirección de la intensidad de este último, es decir, se pueden construir las líneas de fuerza.

§ III.3.4. Conductores en un campo electrostático

1°. En los conductores metálicos sólidos existen portadores de corriente —electrones de conducción (electrones libres)— que, por la acción de un campo eléctrico externo, pueden trasladarse por el volumen del conductor. Los electrones de conducción surgen cuando la substancia del conductor metálico pasa de un estado menos condensado a otro más condensado —del estado gaseoso al líquido o sólido. En este caso se produce la «socialización» de los electrones de valencia (VI.2.3.9°), los cuales se separan de «sus» átomos y forman un *gas electrónico* peculiar.

2°. La propiedades eléctricas de los conductores en las condiciones de la electrostática vienen determinadas por el comportamiento de los electrones de conducción en el campo electrostático externo. En ausencia del campo electrostático externo los campos eléctricos de los electrones de conducción y de los iones positivos del metal (VII.1.1.3°) («restos atómicos») se compensan mutuamente. Si un conductor metálico se encuentra

en un campo electrostático externo, por la acción de este campo los electrones de conducción se redistribuyen en el conductor de tal modo que, en cualquier punto dentro del conductor, el campo eléctrico de los electrones de conducción y de los iones positivos está compensado por el campo electrostático externo.

En cualquier punto dentro de un conductor que se halle en un campo electrostático, la intensidad del campo eléctrico resultante estable es nula.

3°. En la superficie del conductor, el vector intensidad E debe estar dirigido según la normal a la superficie. En el caso contrario la componente E_τ del vector E haría que las cargas se trasladasen por la superficie del conductor, lo que contradice la distribución estática de dichas cargas. De este resultado deriva una serie de consecuencias:

a) dentro del conductor, en todos los puntos, $E = 0$; en su superficie, en todos los puntos, $E = E_n$ ($E_\tau = 0$), donde E_n es la componente normal del vector intensidad;

b) todo el volumen del conductor que se encuentra en el campo electrostático es equipotencial, ya que en cualquier punto dentro de él

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E \cos(\widehat{E dl}) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi = \text{const};$$

c) la superficie del conductor es equipotencial (III.3.3.4°) puesto que para cualquier línea sobre ella,

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E_\tau = 0 \quad \text{y} \quad \varphi = \text{const};$$

d) en el conductor cargado, las cargas no compensadas se encuentran únicamente en la superficie. Esto se deduce del teorema de Ostrogradski — Gauss (III.2.3.3°), según el cual, la carga total q que hay dentro del conductor en un volumen limitado por una superficie cerrada cualquier S , constituye

$$q = \Phi_e = \oint_S D dS \cos(\widehat{Dn}) = 0,$$

ya que $D = 0$ en todos los puntos de la superficie.

4°. Si el campo electrostático lo crea un conductor cargado, el desplazamiento y la intensidad de este campo cerca de la superficie del conductor se calcula por las fórmulas

$$D_n = \sigma, \quad E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad (\text{en el SI}),$$

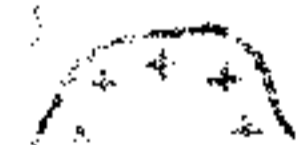
en las que n es la normal externa a la superficie del conductor; σ , la densidad superficial de las cargas en el conductor (III.2.2.3°); ϵ , la permitividad relativa del medio (III.1.2.4°); y ϵ_0 , la constante dieléctrica en el SI (III.1.2.7°).

Capítulo III.4. Capacidad eléctrica

§ III.4.1. Capacidad eléctrica de un conductor aislado

1°. Si en un conductor aislado aumenta la cantidad de electricidad comunicada al mismo, las cargas se distribuyen por la superficie del conductor con distinta densidad superficial. El carácter de distribución de las cargas depende solamente de la forma del conductor y no de la cantidad de electricidad que ya hay en él. Cada nueva porción de cargas se distribuye por la superficie del conductor de una manera semejante a la anterior. De aquí se deduce que en cualquier punto de la superficie del conductor, la densidad superficial σ (III.2.2.3°) aumenta directamente proporcional a la carga q que hay en el conductor: $\sigma = kq$, donde $k = f(x, y, z)$ es función de las coordenadas del punto considerado de la superficie.

El potencial del campo del conductor cargado (III.3.2.6°) constituye

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \oint_S \frac{\sigma dS}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \oint_S \frac{k dS}{r}.$$


Para los puntos de la superficie S del conductor, la integral sólo depende de las dimensiones y la forma de la superficie del conductor, por lo que el potencial φ de dicho conductor es directamente proporcional a su carga q .

2°. La relación entre la carga q de un conductor aislado y su potencial φ se llama *capacidad eléctrica (capacidad)* de ese conductor:

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad \text{ó} \quad C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{1}{\oint_S \frac{k dS}{r}} \quad (\text{en el SI}),$$

La capacidad eléctrica de un conductor aislado es numéricamente igual a la carga eléctrica que hay que comunicarle a éste para que su potencial varíe en la unidad.

La capacidad eléctrica de un conductor aislado depende de su forma y dimensiones. Para los conductores geoméricamente semejantes, las capacidades son proporcionales a sus dimensiones lineales.

La capacidad de un conductor aislado también depende de las propiedades dieléctricas del medio que lo rodea. Para un medio, isótropo homogéneo, la capacidad del conductor es directamente proporcional a la permitividad relativa del medio (III.1.2.4°).

3°. De la fórmula del potencial de una esfera aislada de radio R (III.3.2.6°) se deduce que la *capacidad* de dicha esfera constituye

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R \quad (\text{en el SI}),$$

$$C = \epsilon R \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

§ III.4.2. Capacidad mutua. Condensadores

1°. Si en las proximidades de un conductor A hay otros conductores, su capacidad eléctrica es mayor que la del propio conductor aislado. Esto se explica porque cuando al conductor

A se le comunica una carga q , los conductores que lo rodean se cargan por influencia, con la particularidad de que las cargas más próximas a la carga inductora q serán las de signo contrario (fig. III.4.1). Estas cargas, debilitando el campo creado por la carga q , hacen que disminuya el potencial del conductor y que aumente su capacidad.

2°. En un sistema de dos conductores próximos entre sí,

con cargas q iguales según su valor absoluto, pero de signos opuestos, surge una diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2$ proporcional a q :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{C} q,$$

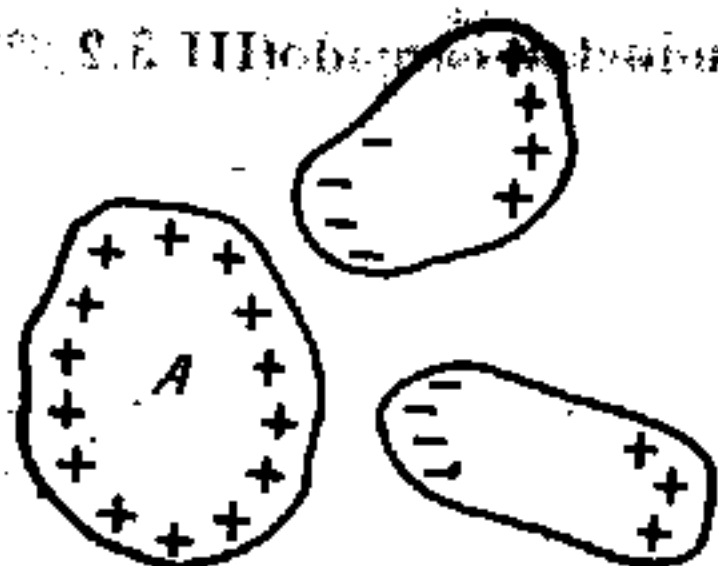


Fig. III.4.1.

en la que C es la *capacidad mutua de los conductores*: $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$.

La capacidad mutua de dos conductores es numéricamente igual a la carga que hay que trasladar de un conductor a otro para que la diferencia de potencial entre ellos varíe en la unidad.

3°. La capacidad mutua C de dos conductores depende de sus formas, dimensiones y disposición mutua. C también depende de las propiedades dieléctricas del medio que rodea los conductores. Si este medio es isótropo y homogéneo, C es directamente proporcional a la permitividad relativa del medio (III.4.2.4°).

Cuando uno de los conductores se aleja hacia el infinito, la diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2$ entre ellos aumenta y su capacidad mutua disminuye y tiende a la capacidad del conductor aislado que queda.

4°. Un sistema de dos conductores con cargas iguales según su valor absoluto, pero de signos opuestos, se llama *condensador* si la forma y la disposición de los conductores asegura la concentración del campo electrostático que crean estos conductores en una región limitada del espacio. Los conductores reciben, en este caso, el nombre de *armaduras del condensador*. La capacidad del condensador es la capacidad mutua de sus armaduras.

5°. La capacidad de un *condensador plano*, formado por dos placas metálicas paralelas, de área S cada una, situadas a la distancia d una de otra, se expresa por la fórmula

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} \quad (\text{en el SI}),$$

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d} \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

donde ϵ es la permitividad relativa del medio que llena el espacio entre las placas. Para un condensador plano de placas múltiples, formado por n placas, en la fórmula de la capacidad, en vez de S figura $S(n - 1)$. Esta fórmula sólo es correcta cuando d es pequeña. En este caso se puede despreciar la alteración de la homogeneidad del campo electrostático en los bordes de las armaduras del condensador.

6°. Un *condensador esférico* consta de dos armaduras metálicas concéntricas A y B de forma esférica, cuyos radios son, respectivamente, r_1 y r_2 (fig. III.4.2). El campo de una esfera cargada superficialmente sólo existe fuera de la misma (III.2.1.2°). Por esto, en la región entre las armaduras, el campo electrostáti-

co es creado únicamente por la carga de la armadura A , y fuera del condensador, los campos de las armaduras A y B , con cargas de signos distintos, se destruyen mutuamente.

La capacidad del condensador esférico se calcula por la fórmula

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{en el SI}),$$

$$C = \frac{\epsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Cuando $r_2 \rightarrow \infty$ y $\frac{1}{r_2} \rightarrow 0$, la armadura interna es una esfera

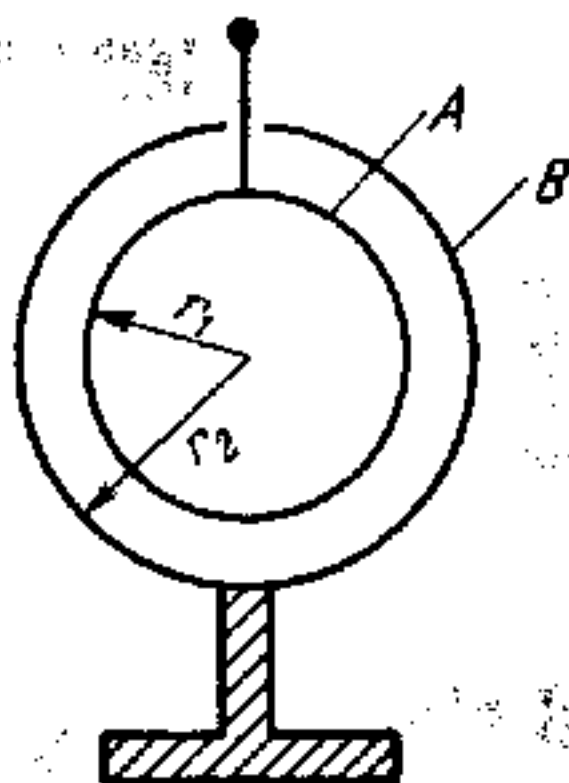


Fig. III.4.2.

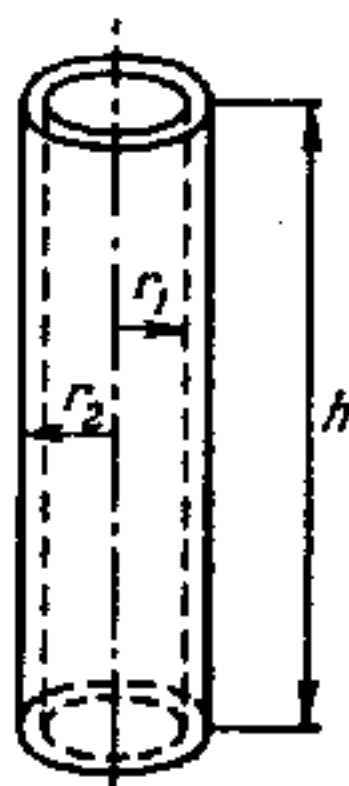


Fig. III.4.3.

aislada, y $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r_1$ (véase III.4.1.3°). Para cualesquiera valores finitos de r_1 y r_2 ,

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 \frac{r_2}{r_2 - r_1} > 4\pi\epsilon_0\epsilon r_1,$$

es decir, la capacidad de un condensador esférico es mayor que la de una esfera aislada.

7°. Un condensador cilíndrico consta de dos cilindros metálicos huecos y coaxiales, de altura h y radios r_1 y r_2 (fig. III.4.3). La fórmula de la capacidad del condensador cilíndrico (y del

cable coaxial) tiene la forma

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{en el SI}),$$

$$C = \frac{\epsilon h}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

8°. Todos los tipos de condensadores se caracterizan por su *tensión disruptiva* (*tensión de perforación*), que es la diferencia de potencial entre las armaduras, con la cual se produce una descarga eléctrica (III.9.5.1°) a través de la capa del dieléctrico del condensador. La magnitud de la tensión disruptiva depende de las propiedades del dieléctrico, de su espesor y de la forma de las armaduras.

9°. Para conseguir grandes capacidades eléctricas se utiliza la *conexión o acoplamiento de los condensadores en paralelo*, debido a lo cual se conectan armaduras con cargas de igual signo. En este caso la capacidad total C es

$$C = \sum_{i=1}^n C_i, \text{ donde } C_i \text{ es la capacidad del } i\text{-ésimo con-}$$

densador.

10°. En la *conexión en serie de condensadores* se unen las armaduras con cargas de distinto signo. De este modo se suman las magnitudes inversas a la capacidad de cada condensador C_i :

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

La capacidad resultante C es siempre menor que la del condensador de menor capacidad eléctrica que figura en la batería. Con la conexión en serie disminuye la posibilidad de que se produzca la perforación de los condensadores (p. 8°), porque en cada condensador sólo existe una parte de la diferencia de potencial total que se comunica a toda la batería.

Capítulo III.5. Dieléctricos en un campo eléctrico

§ III.5.1. Momentos dipolares de las moléculas de un dieléctrico

1°. Las sustancias que no conducen la corriente eléctrica se llaman *dieléctricos*. A temperaturas no demasiado altas y en unas condiciones en que el dieléctrico no esté sometido a la acción de campos eléctricos muy intensos, en estas sustancias, a diferencia de los conductores, no existen portadores de corriente eléctrica libres.

2°. Las moléculas del dieléctrico son eléctricamente neutras y contienen igual número de cargas positivas y negativas. No obstante, estas moléculas tienen propiedades eléctricas. En primera aproximación las moléculas del dieléctrico se pueden considerar como dipolos de momento eléctrico dipolar $p_e = ql$ (III.2.2.3°), en los que q es la magnitud absoluta de las cargas sumariamente positivas (y también sumariamente negativas) situadas, respectivamente, en los centros de gravedad de las mismas, y l , la distancia entre los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas. Como todo dipolo, la molécula de la sustancia crea en el espacio circundante un campo eléctrico (III.2.2.3°).

3°. El dieléctrico se dice que es *neutro (dieléctrico neutro)* si los electrones de los átomos se encuentran en su molécula situados simétricamente respecto de los núcleos (H_2 , O_2 , CCl_4 y otros). En estas moléculas los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas coinciden en ausencia del campo eléctrico externo [$l = 0$ (p. 2°)], y el momento dipolar p_e de la molécula es nulo. Si el dieléctrico neutro se halla en un campo eléctrico externo, se produce la deformación de las envolturas electrónicas (VI.2.3.6°) de los átomos (moléculas), y los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas se desplazan unos respecto a otros ($l \neq 0$). En la molécula (átomo) del dieléctrico surge un *momento eléctrico dipolar inducido*, proporcional a la intensidad E del campo eléctrico:

$$p_e = \varepsilon_0 \alpha E \quad (\text{en el SI}),$$

$$p_e = \alpha E \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

donde α es el *coeficiente de polarizabilidad* (*polarizabilidad*) de la molécula (átomo), y ϵ_0 , la constante dieléctrica en el SI (III.1.2.7°).

La polarizabilidad de una molécula depende solamente de su volumen, y α no depende de la temperatura. El movimiento térmico de las moléculas de los dieléctricos neutros no influye en la aparición de los momentos dipolares inducidos. Las moléculas con estos momentos dipolares son semejantes a los *dipolos cuasielásticos* (*inducidos*).

4°. Se llama *dieléctrico polar* aquél cuyas moléculas (átomos) tienen electrones situados asimétricamente con respecto a sus núcleos⁺ (H_2O , HCl , NH_3 , CH_3Cl y otros). En estas moléculas los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas no coinciden y se encuentran prácticamente a una distancia constante l unos de otros. Las moléculas de los dieléctricos polares se asemejan por sus propiedades eléctricas a los *dipolos permanentes* o *rígidos*, los cuales tienen *momento dipolar constante*: $\mathbf{p}_e = \text{const.}$

5°. Un dipolo permanente, situado en un campo electrostático exterior homogéneo, experimenta la acción de un par de fuerzas (1.4.1.6°) cuyo momento \mathbf{M} es

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_e \mathbf{E}].$$

El momento \mathbf{M} del par está dirigido perpendicularmente al plano que pasa por los vectores \mathbf{p}_e y \mathbf{E} , y desde el extremo, de \mathbf{M} la rotación desde \mathbf{p}_e hacia \mathbf{E} , por el camino más corto, se realiza en sentido contrario al de las agujas del reloj. En la fig. III.5.1 el momento \mathbf{M} está dirigido desde nosotros hacia detrás del dibujo y tiende a hacer girar el dipolo de modo que los vectores \mathbf{p}_e y \mathbf{E} sean paralelos entre sí. En las moléculas reales de los dieléctricos polares, además del giro de los ejes de los dipolos a lo largo del campo, se produce la deformación de las moléculas y en ellas se crea cierto momento dipolar inducido (p. 3°).

6°. Si un dipolo permanente se encuentra en un campo eléctrico heterogéneo en el cual la intensidad \mathbf{E} varía en la longitud del dipolo l , sobre el dipolo, además del momento de rotación \mathbf{M}

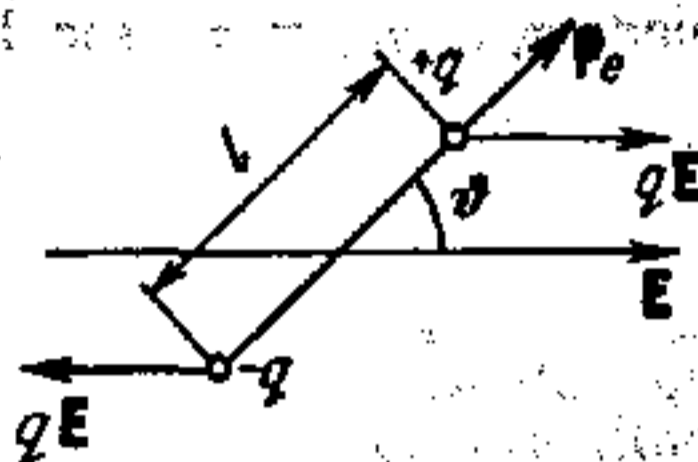


Fig. III.5.1.

(p. 5°), actúa la fuerza

$$F = p_e \frac{\partial E}{\partial l}$$

o, en una forma más general,

$$F = p_{ex} \frac{\partial E}{\partial x} + p_{ey} \frac{\partial E}{\partial y} + p_{ez} \frac{\partial E}{\partial z},$$

donde p_{ex} , p_{ey} y p_{ez} son las proyecciones del vector p_e sobre los ejes del sistema de coordenadas cartesianas. En particular, si el vector E está dirigido según el eje OX y depende únicamente de la coordenada x ($E_x = E(x)$, $E_y = E_z = 0$ y $E = E_x \mathbf{i}$), entonces

$$F = p_{ex} \frac{\partial E}{\partial x} \mathbf{i}.$$

Bajo la acción de la fuerza F el dipolo permanente libre tiende a trasladarse a la región de la máxima intensidad del campo.

7°. Un dipolo permanente que se encuentre en un campo eléctrico externo tendrá la energía potencial

$$W_p = - p_e E = - p_e E \cos \vartheta,$$

en la que p_e es el momento eléctrico del dipolo; E , la intensidad del campo en el lugar en que se halla el dipolo; y $\vartheta = (\widehat{p_e E})$, el ángulo entre el eje del dipolo y la dirección del vector E . El signo menos significa que a la posición estable del dipolo le corresponde el ángulo $\vartheta = 0$ cuando la energía potencial del dipolo tiene su valor mínimo y el vector p_e está dirigido a lo largo del vector E .

§ III.5.2. Polarización de los dieléctricos

1°. Si un dieléctrico polar (III.5.1.4°) no se encuentra en un campo eléctrico externo, como resultado del movimiento térmico caótico de las moléculas, los vectores de sus momentos dipolares serán orientados caóticamente. Por esto, en cualquier volumen físicamente infinitesimal ΔV *), la suma de los momentos dipolares de todas las moléculas es nula.

* En este caso $\Delta V \gg v_0$, siendo v_0 el volumen de una molécula, y el volumen ΔV contiene un número de moléculas bastante grande.

En un dieléctrico neutro que no se encuentre en un campo eléctrico externo no pueden surgir momentos dipolares inducidos en las moléculas (III.5.1.3°).

2°. Al introducir el dieléctrico en un campo eléctrico externo se produce la *polarización del dieléctrico*, que consiste en que en cualquier volumen elemental ΔV surge un momento dipolar total de las moléculas distinto de cero. El dieléctrico que se encuentra en este estado se dice que está *polarizado (dieléctrico polarizado)*. En dependencia de la estructura de las moléculas (átomos) del dieléctrico se distinguen tres tipos de polarización:

a) *la polarización dipolar (por orientación)* en los dieléctricos polares (III.5.1.4°). El campo eléctrico externo tiende a orientar los momentos dipolares de los dipolos permanentes a lo largo de la dirección del campo eléctrico (III.5.1.5°). Esto se ve dificultado por el movimiento térmico caótico de las moléculas, que tiende a «dispersar» arbitrariamente los dipolos. Como resultado de la acción conjunta del campo y del movimiento térmico aparece una orientación predominante de los momentos eléctricos dipolares a lo largo del campo, que crece al aumentar la intensidad de éste y al disminuir la temperatura;

b) *la polarización electrónica (por deformación)* en los dieléctricos neutros (III.5.1.3°). Bajo la acción del campo eléctrico externo, en las moléculas de los dieléctricos de este tipo surgen momentos dipolares inducidos (III.5.1.3°) dirigidos a lo largo del campo. El movimiento térmico de las moléculas no ejerce influencia sobre la polarización electrónica. En los dieléctricos gaseosos y líquidos, prácticamente al mismo tiempo que la polarización dipolar se produce la polarización electrónica;

c) *la polarización iónica* en los dieléctricos sólidos que tienen redes cristalinas iónicas (VIII.1.1.3°). Por ejemplo, NaCl, CaCl y otros. El campo eléctrico externo provoca el desplazamiento de todos los iones positivos en dirección de la intensidad E , y de todos los iones negativos en sentido opuesto.

3°. La medida cuantitativa de la polarización de un dieléctrico es su vector de polarización P_e . Se llama *vector de polarización (polarización)* la razón del momento dipolar eléctrico de un volumen pequeño ΔV del dieléctrico, a la magnitud de este volumen:

$$P_e = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n p_{ei}$$

donde p_{ei} es el momento dipolar eléctrico de la i -ésima molécula; y n , el número total de moléculas que hay en el volumen ΔV .

Este volumen debe ser tan pequeño que, dentro de él, el campo eléctrico pueda considerarse homogéneo (III.2.1.2°). Al mismo tiempo el número n de moléculas que haya en el volumen ΔV debe ser suficientemente grande, para que se puedan utilizar los métodos estadísticos de investigación (II.1.2.2°).

4°. Para un dieléctrico neutro homogéneo (III.5.1.3°) que se encuentre en un campo eléctrico también homogéneo,

$$\mathbf{P}_e = n_0 \mathbf{p}_e,$$

donde n_0 es el número de moléculas en la unidad de volumen, y \mathbf{p}_e , el momento dipolar de una molécula. Aplicando la fórmula para \mathbf{p}_e (III.5.1.3°), obtenemos:

$$\mathbf{P}_e = n_0 \epsilon_0 \alpha \mathbf{E} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{P}_e = n_0 \alpha \mathbf{E} = \kappa \mathbf{E} \quad (\text{en el sistema CGSE})$$

donde $\kappa = n_0 \alpha$ es la *susceptibilidad dieléctrica de la substancia*.

5°. Para un dieléctrico polar homogéneo (III.5.1.4°) que se encuentre en un campo eléctrico también homogéneo, $\mathbf{P}_e = n_0 \langle \mathbf{p}_e \rangle$, donde $\langle \mathbf{p}_e \rangle$ es el valor medio de la componente del momento dipolar permanente de la molécula a lo largo de la intensidad del campo. Si el dieléctrico polar se halla en un campo eléctrico externo débil, la susceptibilidad dieléctrica se calcula por la *fórmula de Debye — Langevin*:

$$\kappa = \frac{n_0 p_e^2}{3\epsilon_0 kT} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\kappa = \frac{n_0 p_e^2}{3kT} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Aquí k es la constante de Boltzmann (II.1.4.5°), y T , la temperatura absoluta. Las demás notaciones véanse en III.5.1.3°.

En la fig. III.5.2 se muestra la dependencia $\kappa = \kappa \left(\frac{1}{T} \right)$ para las moléculas neutras (a) y polares (b). La recta (b) no pasa por el origen de coordenadas debido a que en las moléculas polares se producen generalmente las polarizaciones dipolar y electrónica (p. 1° b) y la susceptibilidad dieléctrica consta de dos partes: $\kappa = \kappa' + \kappa''$, donde κ' y κ'' vienen expresadas por las fórmulas de los pp. 4° y 5°.

6°. Si el dieléctrico se encuentra en un campo eléctrico homogéneo, la neutralidad eléctrica de un volumen suyo cualquiera ΔV que contenga un número de moléculas suficientemente grande, se asegura por la compensación mutua de las cargas de

signos contrarios de los dipolos adyacentes (fig. III.5.3). En las capas delgadas próximas a la superficie S_1 y S_2 del dieléctrico, que limitan su volumen, como resultado de la polarización dieléctrica aparecen *cargas de polarización superficiales*.

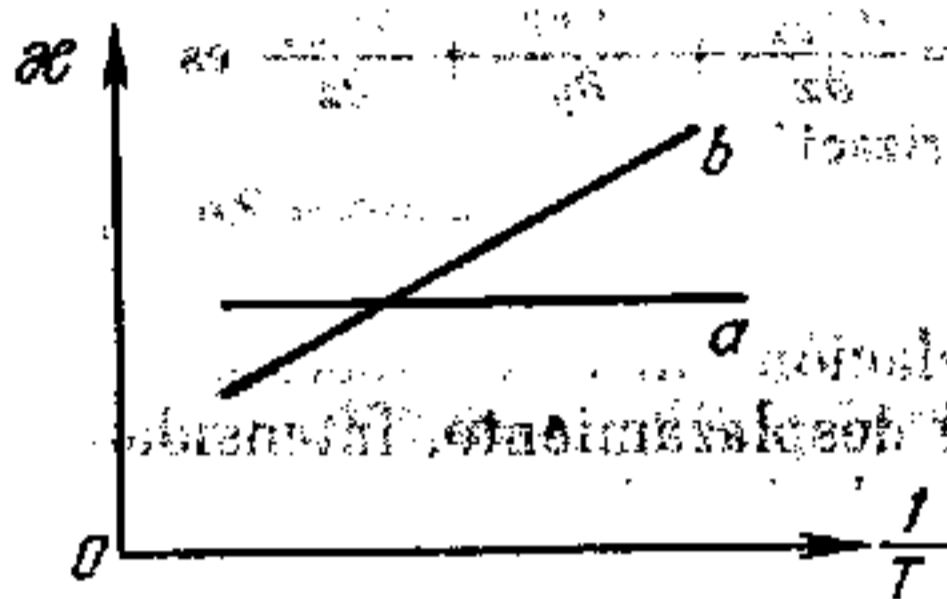


Fig. III.5.2.

Junto a la superficie por la cual entran las líneas de fuerza (III.2.1.4°) del campo externo, aparecen las cargas negativas de los extremos de las moléculas de dipolos, y en la superficie

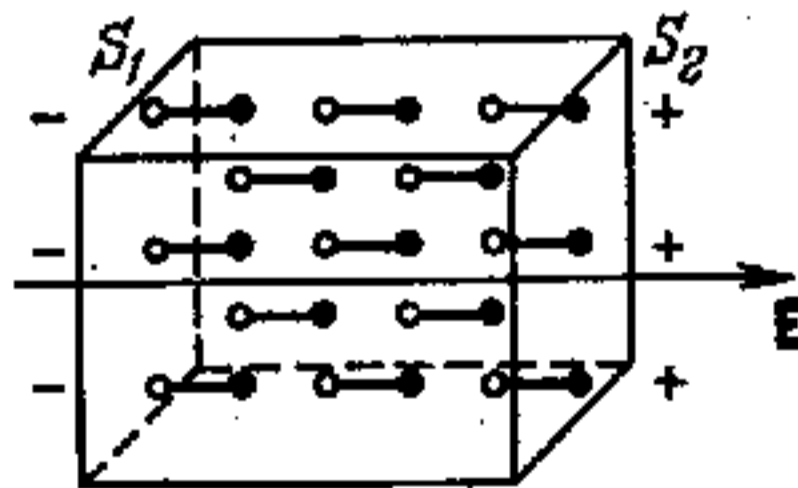


Fig. III.5.3.

opuesta surgen las cargas positivas. La densidad superficial (III.2.2.3°) σ_p de las cargas de polarización se calcula por la fórmula

$$\sigma_p = P_{en},$$

en la que P_{en} es la proyección del vector P_e sobre la normal externa a la superficie del dieléctrico.

En un campo eléctrico heterogéneo, la polarización del dieléctrico tampoco es homogénea y el vector de polarización P_e depende de las coordenadas. Por esto, además de las cargas de polarización superficiales, surgen cargas de polarización

volumétricas, distribuidas con la densidad volumétrica (III.2.2.3°) ρ_p :

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}_e$$

donde $\operatorname{div} \mathbf{P}_e = \frac{\partial P_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial P_{ey}}{\partial y} + \frac{\partial P_{ez}}{\partial z}$ es la divergencia del vector de polarización.

§ III.5.3. Relación entre los vectores de desplazamiento, intensidad y polarización

1°. En las sustancias se distinguen dos tipos de cargas eléctricas: libres y ligadas.

Se llaman *cargas ligadas* las que entran en la composición de los átomos y las moléculas, y también las cargas de los iones en los sólidos cristalinos con red iónica (VII.1.1.3°). Las cargas no ligadas con las partículas de la sustancia, antes mencionadas reciben el nombre de *cargas libres*. Son cargas libres: a) las cargas de los portadores de corriente en los medios conductores (los electrones de conducción de los metales y semiconductores (III.3.4.1°), los huecos de los semiconductores (VII.2.10.3°), los iones de los electrolitos y los gases, etc.); b) las cargas excedentes comunicadas al cuerpo por diversos procedimientos que alteran su neutralidad eléctrica. Por ejemplo, las cargas aportadas desde fuera sobre la superficie de un dieléctrico.

2°. En un dieléctrico, en un caso general, el campo eléctrico es creado tanto por las cargas libres como por las ligadas. El vector intensidad \mathbf{E} caracteriza el campo resultante en el dieléctrico, creado por ambos tipos de cargas, y depende de las propiedades eléctricas de éste, es decir, de su permitividad relativa ϵ (III.1.2.4°). Pero la fuente primaria del campo eléctrico en el dieléctrico son las cargas libres. El hecho es que el campo de cargas ligadas surge en el dieléctrico como resultado de la polarización de este último, que se encuentra en el campo eléctrico externo creado por el sistema de cargas eléctricas libres.

3°. Los conocimientos expuestos en los pp. 1° y 2° requieren precisar el teorema de Ostrogradski — Gauss (III.2.3.3°). La

suma algebraica de las cargas $\sum_{i=1}^n q_i$, que figura en el segundo

miembro del teorema, debe entenderse como la suma algebraica de las cargas eléctricas libres abarcadas por la superficie cerrada S , es decir,

$\sum_{i=1}^k q_i = q_{\text{libres}}$, de manera que el teorema tiene la forma

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S D_n \, dS = q_{\text{libres}} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S D_n \, dS = 4\pi q_{\text{libres}} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

En esta forma el teorema de Ostrogradski — Gauss es correcto para el campo eléctrico tanto en un medio homogéneo e isótropo como en un medio heterogéneo y anisótropo (compárese con III.2.3.3°).

4°. Para un campo eléctrico en el vacío,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

El flujo del vector intensidad \mathbf{E} a través de una superficie cerrada arbitraria S en el vacío es

$$\oint_S \epsilon_0 E_n \, dS = q_{\text{libres}} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_S E_n \, dS = 4\pi q_{\text{libres}} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Para el campo en una substancia, de acuerdo con el p. 2°, el flujo del vector \mathbf{E} será igual a

$$\oint_S \epsilon_0 E_n \, dS = q_{\text{libres}} + q_{\text{ligadas}} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_S E_n \, dS = 4\pi (q_{\text{libres}} + q_{\text{ligadas}}) \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

La suma de las cargas ligadas q_{ligadas} abarcadas por la superficie cerrada S se calcula por la fórmula

$$q_{\text{ligadas}} = - \oint_S P_{en} dS,$$

donde P_{en} es la proyección del vector de polarización sobre la normal externa a la superficie dS . De este modo,

$$\oint_S (\epsilon_0 E_n + P_{en}) dS = q_{\text{libres}} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_S (E_n + 4\pi P_{en}) dS = 4\pi q_{\text{libres}} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

La comparación con la formulación general del teorema de Ostrogradski — Gauss, dada en el p. 3°, permite establecer la relación entre los vectores D , E y P_e :

$$D_n = \epsilon_0 E_n + P_{en} \quad (\text{en el SI}),$$

$$D_n = E_n + 4\pi P_{en} \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

o, en virtud del carácter arbitrario de la normal externa n ,

$$D = \epsilon_0 E + P_e \quad (\text{en el SI}),$$

$$D = E + 4\pi P_e \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Estas fórmulas son la generalización de las del (III. 2.3.1°). Para un medio homogéneo e isótropo, utilizando los resultados de III.5.2.3°, tenemos:

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \kappa E = \epsilon_0 (1 + \kappa) E \quad (\text{en el SI}),$$

$$D = E + 4\pi \kappa E = (1 + 4\pi \kappa) E \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Por consiguiente,

$$D = \epsilon_0 \epsilon E, \text{ donde } \epsilon = 1 + \kappa \quad (\text{en el SI}),$$

$$D = \epsilon E, \text{ donde } \epsilon = 1 + 4\pi \kappa \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

La magnitud ϵ es la permitividad relativa (compárese con III. 1.2.4°).

Para el vacío, $\epsilon = 1$ y $\kappa = 0$.

El concepto de ϵ introducido en III.1.2.4° sólo tiene sentido para los medios homogéneos isótropos.

§ III.5.4. Ferroeléctricos

1°. Por *eléctricos de Seignette, de Rochelle* o *ferroeléctricos* se entiende el grupo de dieléctricos cristalinos cuyo nombre inicial se debió a la primera sustancia estudiada de este tipo, la sal de Seignette $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$. También puede servir de

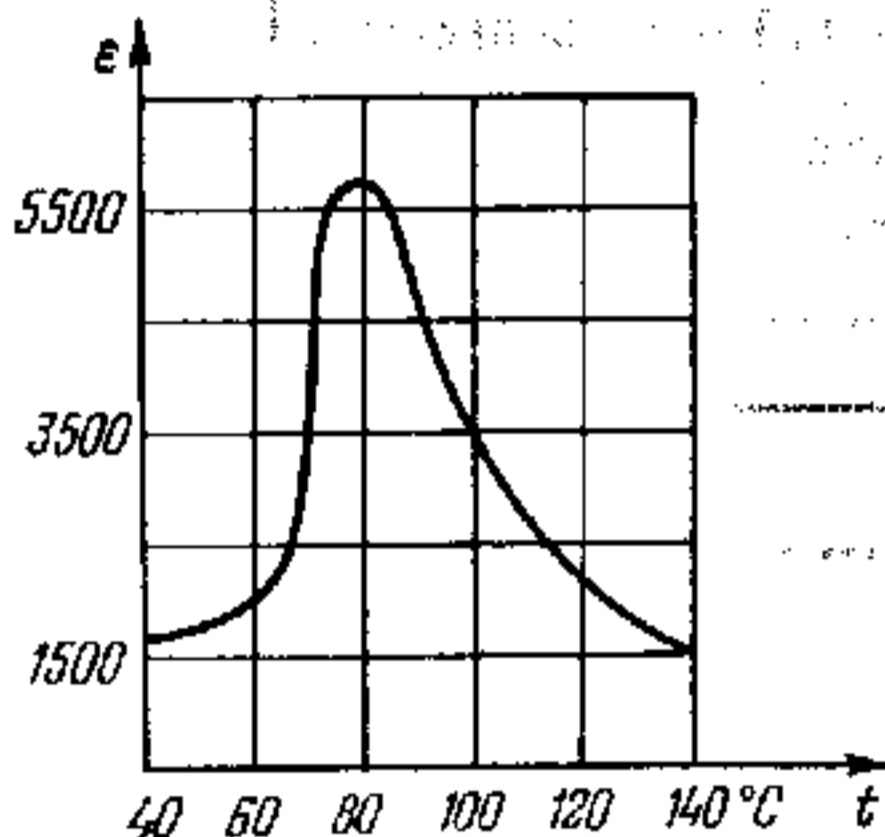


Fig. III.5.4.

ejemplo de ferroeléctrico el titanato de bario BaTiO_3 . Los ferroeléctricos se caracterizan por el hecho de que su permitividad relativa (III.1.2.4°) aumenta bruscamente en un intervalo de temperaturas determinado (fig. III.5.4).

2°. La permitividad relativa ϵ y la susceptibilidad dieléctrica κ (III.5.2.3°) de los ferroeléctricos son funciones de la intensidad E del campo creado en la sustancia (fig. III.5.5). Como consecuencia de esto, en los ferroeléctricos no se observa dependencia lineal entre los vectores P_e y E . La dependencia del desplazamiento eléctrico D respecto de la intensidad del campo tiene carácter complejo, y la relación lineal entre D y E sólo existe cuando los valores de E son muy grandes (fig. III.5.6).

3°. El monocristal del ferroeléctrico está dividido en regiones espontáneamente polarizadas llamadas *dominios* (compárese con III.13.5.4°). La *polarización espontánea* de los dominios es el resultado de la orientación de los momentos dipolares de las moléculas que hay dentro del dominio en una dirección determinada. En ausencia de campo eléctrico externo, los vectores de polarización de diversos dominios están orientados caóticamente

y, para un monocristal grande o un policristal, el promedio de polarización total es nulo. Bajo la acción de un campo eléctrico, en el ferroeléctrico se produce la reorientación de los momentos eléctricos de los dominios, y en el cristal aparece una polarización total distinta de cero.

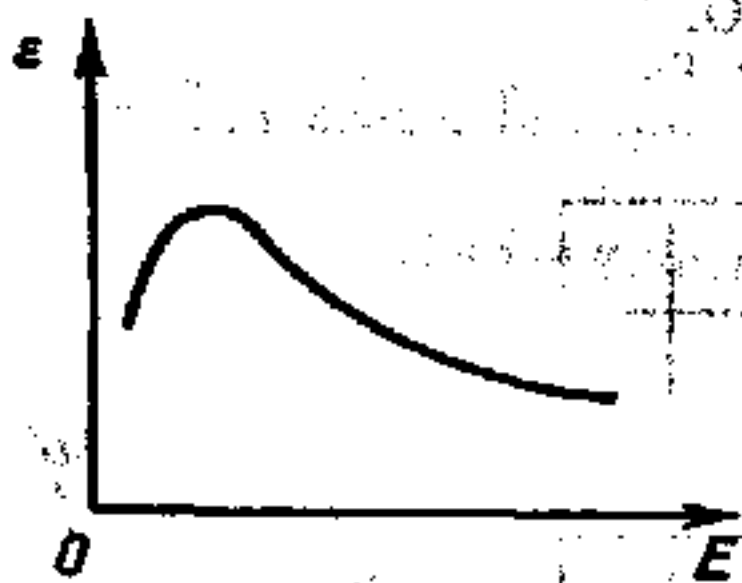


Fig. III.5.5.

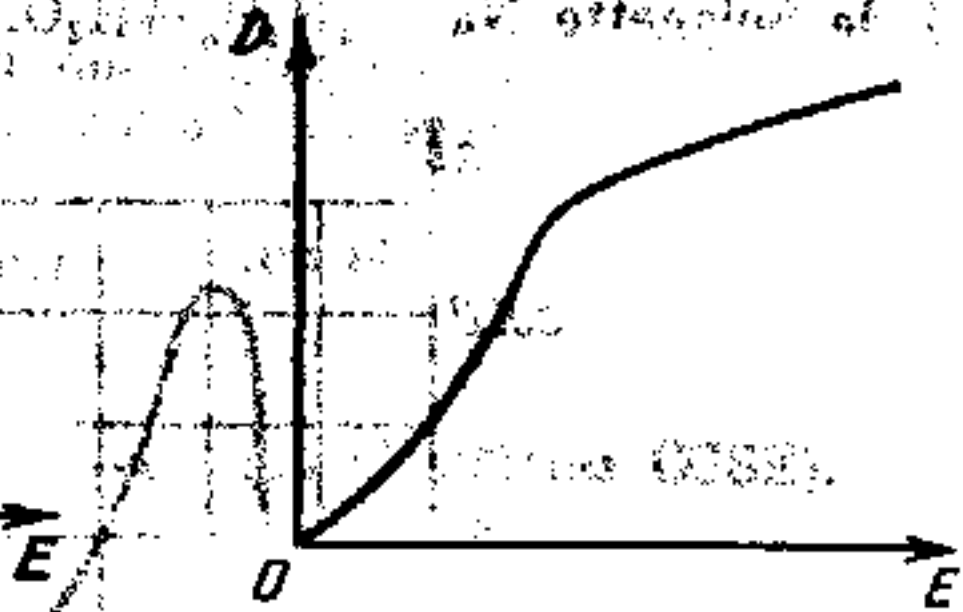


Fig. III.5.6.

4°. La formación de dominios en los ferroeléctricos ocurre en un intervalo de temperaturas determinado: entre los *puntos de Curie* superior e inferior ν_{sup} y ν_{inf} (compárese con III.13.5.3°).

Para la sal de Seignette (p. 1°), $\nu_{\text{sup}} = 298$ y $\nu_{\text{inf}} = 258$ K.

Cuando $T \geq \nu_{\text{sup}}$, las fuerzas de interacción entre los dipolos no pueden resistir el movimiento térmico, la polarización espontánea de los dominios se rompe y el ferroeléctrico se convierte en un dieléctrico polar ordinario. El crecimiento brusco de la capacidad calorífica de la sustancia demuestra que en el punto de Curie se produce una transición de fase de segundo orden (II.5.4.2°).

Por encima del punto de Curie ν_{sup} existe una fase no ordenada y, en ausencia de campo externo, el dieléctrico no está polarizado. Cuando $T < \nu_{\text{sup}}$ existe una fase ordenada cuyo indicio es la polarización espontánea en los dominios *).

*) En este manual no se estudian los fenómenos que ocurren en los ferroeléctricos cuando $T = \nu_{\text{inf}}$ y que conducen a la desintegración de los dominios.

5°. En los ferroeléctricos se produce el fenómeno de *histéresis dieléctrica (retraso)*. En la fig. III.5.7 se ve que con el aumento de la intensidad del campo eléctrico externo, el módulo del vector P_e crece y alcanza la saturación en el punto a . Al disminuir E hasta cero, en el ferroeléctrico se conserva una *polarización remanente* caracterizada por el valor P_{e0} del vector de polarización. Esta polarización sólo desaparece totalmente si el ferroeléctrico se somete a la acción de un campo eléctrico de sentido contrario, cuya intensidad ($-E_R$) se llama *fuerza coercitiva*. La variación periódica de la polarización del ferroeléctrico se debe a la energía eléctrica que se invierte en calentar la substancia. El área del bucle de histéresis es proporcional a la energía eléctrica que se transforma en energía interna de la unidad de volumen del ferroeléctrico por ciclo.

Capítulo III.6. Energía del campo eléctrico

§ III.6.1. Energía de un conductor cargado y del campo eléctrico**)

1°. Para comunicar una carga eléctrica a un conductor hay que realizar trabajo en vencer las fuerzas repulsivas de Coulomb entre las cargas de igual signo. Este trabajo se gasta en aumentar la energía eléctrica del conductor cargado, que es análoga a la energía potencial en una mecánica (I.3.3.1°). El trabajo $\delta A'$ que realizan las fuerzas externas al trasladar la carga dq desde el infinito al conductor aislado constituye

$$\delta A' = \varphi dq = C\varphi d\varphi,$$

donde C y φ son la capacidad eléctrica y el potencial del conductor.

El trabajo realizado al aumentar el potencial del conductor desde 0 hasta φ , es decir, al comunicarle a este último la carga $q = C\varphi$, constituye

$$A' = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}$$

***) En este capítulo se supone en todas partes que las cargas eléctricas se hallan en un medio no ferroeléctrico (III.5.4.1°).

Respectivamente, la *energía de un conductor cargado solitario* será

$$W_e = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}.$$

La *energía de un condensador cargado* constituye

$$W_e = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\Delta\varphi}{2},$$

donde C y q son la capacidad eléctrica y la carga del condensador, y $\Delta\varphi$, la diferencia de potencial entre sus armaduras.

2°. La *energía de cualquier sistema de cargas en reposo* se puede representar de la forma

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{S_{\text{carg}}} \varphi\sigma \, dS + \frac{1}{2} \int_{V_{\text{carg}}} \varphi\rho \, dV,$$

donde σ y ρ son las densidades superficial y volumétrica de las cargas libres (III.5.3.1°); φ , el potencial del campo resultante de todas las cargas libres y ligadas en los puntos de los elementos infinitesimales dS o dV de la superficie o del volumen cargados. La integración se extiende a todas las superficies S_{carg} y volúmenes V_{carg} cargados. La influencia del medio dieléctrico se manifiesta en que, siendo invariable la distribución en el espacio de las cargas libres, el valor de φ en un mismo punto del campo no es igual en dieléctricos distintos. Así, en un dieléctrico isótropo homogéneo que llene todo el campo, φ es ϵ veces menor que en el vacío.

3°. El campo eléctrico posee una energía que está distribuida por todo el volumen del espacio donde existe este campo. Respectivamente, la energía de un conductor cargado o de un condensador, es la energía de sus campos electrostáticos. Por ejemplo, para el campo homogéneo de un condensador plano (III.4.2.5°),

$$W_e = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V \quad (\text{en el SI}),$$

$$W_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} V \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

donde $V = Sd$ es el volumen del campo del condensador. La energía del campo homogéneo está distribuida uniformemente

por su volumen. La densidad volumétrica de esta energía es

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$w_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

4°. La densidad volumétrica de la energía de un campo heterogéneo es

$$w_e = \frac{dW_e}{dV},$$

en la que dW_e es la energía del volumen infinitesimal dV del campo (véase el p. 5°). Para un campo electrostático en un medio isótropo, w_e viene expresada por las fórmulas del p. 3°. Si el medio es eléctricamente anisótropo, entonces

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{en el SI}),$$

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

5°. La energía dW_e del volumen infinitesimal dV del campo electrostático en un medio isótropo dentro de cuyos límites $w_e = \text{idem}$, constituye

$$dW_e = w_e dV = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV \quad (\text{en el SI}),$$

$$dW_e = w_e dV = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dV \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Y la energía W_e de todo el campo electrostático,

$$W_e = \int_{V_{\text{campo}}} \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV \quad (\text{en el SI}),$$

$$W_e = \int_{V_{\text{campo}}} \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dV \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

donde la integral se extiende a todo el volumen del campo V_{campo} .

6°. La energía del campo electrostático de un cuerpo cargado arbitrario es igual a la energía de dicho cuerpo (p. 1°):

$$\int_{V_{\text{campo}}} w_e dV = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Respectivamente, la energía de un sistema arbitrario de cargas (p. 2°) coincide con la energía del campo electrostático de este sistema:

$$\int_{V_{\text{campo}}} w_e dV = \frac{1}{2} \int_{S_{\text{carg}}} \varphi \sigma dS + \frac{1}{2} \int_{V_{\text{carg}}} \varphi \rho dV.$$

7°. Ejemplo. Energía del campo electrostático de una esfera conductora de radio R , cargada uniformemente y rodeada por un dieléctrico isótropo homogéneo de permitividad relativa ϵ .

La capacidad eléctrica de una esfera conductora (III.4.1.3°) es igual (en el SI) a $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$, y la energía de una esfera en la que existe la carga q (en el SI) constituye

$$W_e = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

El campo está localizado en el espacio fuera de la esfera ($r \geq R$). La intensidad del campo y la densidad volumétrica de su energía (en el SI) constituyen

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad \text{y} \quad w_e = \frac{\epsilon\epsilon_0 R^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon\epsilon_0 r^4}$$

siendo r la distancia al centro de la esfera. La densidad volumétrica de la energía del campo es igual dentro de los límites de una capa esférica delgada limitada por las esferas concéntricas de radios r y $r + dr$. El volumen de esta capa $dV = 4\pi r^2 dr$. La energía de todo el campo de la esfera cargada (en el SI) es

$$\int_{V_{\text{campo}}} w_e dV = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^3} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

8°. El proceso de polarización de un dieléctrico introducido en un campo eléctrico externo va acompañado del trabajo de deformación de las capas electrónicas de los átomos y moléculas y de la rotación de los ejes de las moléculas polares en direc-

ción del campo. Por esto, el dieléctrico polarizado posee una reserva de energía cuya densidad volumétrica para un dieléctrico isótropo es

$$w_{e(\text{diel})} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{P}_e = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1)}{2} E^2 \quad (\text{en el SI}),$$

$$w_{e(\text{diel})} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{P}_e = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} E^2 \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

La densidad volumétrica de la energía del campo con la misma intensidad E en el vacío será

$$w_{e(\text{vac})} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$w_{e(\text{vac})} = \frac{E^2}{8\pi} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

La densidad volumétrica de la energía del campo en el dieléctrico es igual a la suma de $w_{e(\text{vac})}$ y $w_{e(\text{diel})}$:

$$w_e = w_{e(\text{vac})} + w_{e(\text{diel})} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$w_e = w_{e(\text{vac})} + w_{e(\text{diel})} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

9°. Para un campo eléctrico alternativo no potencial, el concepto de potencial φ y las expresiones para la energía basadas en él, que se dan en los pp. 1° y 2°, carecen de sentido. No obstante, todo campo eléctrico, de un modo semejante al campo electrostático potencial, posee energía, la cual puede calcularse siempre por la fórmula universal

$$W_e = \int_{V_{\text{campo}}} w_e dV,$$

en la que

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{E} \quad (\text{en el SI}) \text{ y}$$

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{D} \mathbf{E} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

§ III.6.2. Ley de conservación de la energía para un campo eléctrico en un medio no ferroeléctrico

1°. La energía W_e del campo eléctrico creado por un sistema cualquiera de cuerpos cargados (conductores y dieléctricos) varía si los cuerpos del sistema se trasladan o si cambian sus cargas. En este caso realizan trabajo las fuerzas externas aplicadas a los cuerpos del sistema y las fuentes de energía eléctrica (baterías de acumuladores, generadores de corriente, etc.) conectadas a los conductores del sistema.

La ley de conservación de la energía para una variación pequeña del estado del sistema, a condición de que la temperatura de éste y la densidad del medio permanezcan constantes, tiene la forma *)

$$\delta A' + \delta A_{f.e.e} = dW_e + dW_c + \delta Q_{J-L}.$$

Aquí $\delta A'$ es el trabajo de las fuerzas externas; $\delta A_{f.e.e}$, el trabajo de las fuentes de energía eléctrica; dW_e , la variación de la energía del campo eléctrico del sistema; dW_c , la variación de la energía cinética del sistema; y δQ_{J-L} , el calor de Joule-Lenz (III.8.2.6°) debido al paso de las corrientes eléctricas por los conductores del sistema al variar o al redistribuirse sus cargas.

2°. Si la traslación de los cuerpos del sistema se efectúa cuasiestáticamente, es decir, muy despacio, en primer lugar se puede despreciar la variación de la energía cinética de los cuerpos del sistema ($dW_c = 0$), y en segundo lugar podemos considerar que el trabajo de las fuerzas externas $\delta A'$ es numéricamente igual y de signo contrario al trabajo δA que realizan en este proceso las fuerzas que actúan sobre los cuerpos del sistema en el campo eléctrico, llamadas fuerzas *ponderomotrices*. En estos casos la ley de conservación de la energía tiene la forma siguiente:

$$\delta A_{f.e.e} = dW + \delta A + \delta Q_{J-L}.$$

El trabajo de las fuentes de energía eléctrica durante un intervalo infinitesimal de tiempo dt de variación del estado del

*) Cuando son constantes la temperatura y la densidad del medio que no posee propiedades ferroeléctricas (III.5.3.1°), la permitividad relativa de éste no varía.

sistema constituye

$$\delta A_{f.e.e} = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i dq_i = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_i I_i dt,$$

donde k es el número total de fuentes de energía eléctrica que hay en el sistema que se considera; \mathcal{E}_i , la fem de la i -ésima fuente (III.8.2.2°); dq_i , la carga que pasa por esta fuente durante el tiempo dt ; y $I_i = dq_i/dt$, la intensidad de la corriente en la fuente. El trabajo $\mathcal{E}_i I_i dt$ es positivo si la corriente I_i circula dentro de la fuente del cátodo al ánodo (III.8.2.4°).

3°. La expresión de la ley de conservación de la energía para la variación cuasiestática del estado de un sistema (p. 2°) en el que la carga de cada conductor no varía ni se redistribuye, de modo que $\delta A_{f.e.e} = 0$ y $\delta Q_{J-L} = 0$, tiene la forma

$$dW_e + \delta A = 0.$$

Por consiguiente, en el proceso considerado, el trabajo de las fuerzas ponderomotrices es igual a la disminución de la energía del campo eléctrico del sistema. Esta relación puede utilizarse para hallar las fuerzas ponderomotrices basándose en el cálculo de la variación de la energía del sistema. Es el caso en que el cálculo directo de las fuerzas ponderomotrices tropieza con bastantes dificultades debidas a la aparición, en el campo eléctrico, de cargas de polarización (III.5.2.6°), y también a las deformaciones mecánicas de los cuerpos del sistema.

4°. Ejemplo. Cálculo de las fuerzas que actúan sobre las placas de un condensador plano cargado (la distancia entre las placas $x \ll \sqrt{S}$, siendo S el área de la lámina).

El condensador está cargado y desconectado de la fuente de tensión de manera que la carga del condensador $q = \sigma S = \text{const}$; δ es la densidad superficial de la carga. Si la distancia entre las placas aumenta en dx , la fuerza ponderomotriz F , aplicada a la placa que se desplaza, realiza el trabajo $\delta A = -F dx$. La variación de la energía del campo electrostático en el condensador, $dW_e = w_e S dx$; donde w_e es la densidad volumétrica de la energía del campo en la capa de espesor dx adyacente a la lámina. De este modo, de la ley de conservación de la energía (p. 3°) se deduce que la fuerza ponderomotriz

$$F = w_e S.$$

Son posibles dos casos:

a) el condensador tiene dieléctrico gaseoso o líquido entre las armaduras;

b) el condensador está completado por una placa de dieléctrico sólido.

En el primer caso todo el espacio entre las placas del condensador, independientemente de la magnitud de la distancia entre ellas, está lleno de un mismo dieléctrico cuya permitividad relativa es ϵ . Por lo tanto,

$$w_e = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon \epsilon_0} \quad \text{y} \quad F = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon \epsilon_0} = \frac{F_{vac}}{\epsilon} \quad (\text{en el SI}),$$

$$w_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} \quad \text{y} \quad F = \frac{2\pi\sigma^2 S}{\epsilon} = \frac{F_{vac}}{\epsilon} \quad (\text{en el sistema CGSE}),$$

donde F_{vac} es la fuerza que actúa sobre la placa del mismo condensador en ausencia del dieléctrico, es decir, en el vacío.

En el segundo caso, en la capa de espesor dx que se forma como resultado de separar la placa del condensador hay un aire cuya permitividad relativa es igual a 1. Por esto, la densidad volumétrica de la energía del campo electrostático en esta capa será

$$w_e = \frac{\epsilon_0 (E^{vac})^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (\text{en el SI}),$$

$$w_e = \frac{(E^{vac})^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2 \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Respectivamente, la fuerza F que actúa sobre la placa resulta ser la misma que en ausencia del dieléctrico sólido:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} = F_{vac} \quad (\text{en el SI}),$$

$$F = 2\pi\sigma^2 S = F_{vac} \quad (\text{en el sistema CGSE}).$$

Capítulo III.7. Corriente eléctrica continua

§ III.7.1. Concepto de corriente eléctrica

1°. Se llama *electrodinámica* la parte fundamental de la teoría de la electricidad que estudia los fenómenos y los procesos relacionados con el movimiento de las cargas eléctricas o de los cuerpos macroscópicos cargados. El concepto más importante de la electrodinámica es el de corriente eléctrica.

2°. Se da el nombre de *corriente eléctrica* a todo movimiento ordenado de las cargas eléctricas. La corriente eléctrica que surge en los medios conductores como resultado del movimiento ordenado de las cargas libres bajo la acción de un campo eléctrico creado de estos medios, se denomina *corriente de conducción*. Son ejemplos de corrientes de conducción la corriente en los metales y semiconductores debida al movimiento ordenado de los electrones «libres», y la corriente en los electrolitos, que consiste en el desplazamiento ordenado de los iones de signo contrario.

Corriente de convección es el movimiento ordenado de cuerpos macroscópicos cargados en el espacio. Un ejemplo de tal tipo de corriente es la que surge a causa del movimiento de la Tierra (que tiene exceso de carga negativa) por su órbita. Un caso especial de corriente es la de desplazamiento (III.14.3.2°) a la cual no es aplicable la definición de corriente eléctrica, dada anteriormente.

3°. Durante el movimiento ordenado de las cargas eléctricas en un conductor, la distribución en equilibrio de las cargas se infringe y la superficie del conductor deja de ser superficie equipotencial (III.3.4.3°). En la superficie del conductor existe una componente tangencial de intensidad del campo eléctrico ($E_{\tau} \neq 0$), y dentro del conductor debe existir un campo eléctrico (compárese con III.3.4.3°). La corriente eléctrica persiste hasta que todos los puntos del conductor se hacen equipotenciales.

4°. Las condiciones necesarias para que surja y exista corriente eléctrica en un medio conductor son:

a) que en ese medio haya *portadores de carga* libres, es decir, partículas cargadas que puedan desplazarse por él ordenadamente. Estas partículas, en los metales y semiconductores, son los electrones de conducción (II.3.4.1°); en los conductores líquidos (electrolitos), los iones positivos y negativos, y en los gases, los iones y electrones con cargas de signos contrarios.

b) que en ese medio exista un campo eléctrico externo cuya energía se invierta en trasladar ordenadamente las cargas eléctricas. Para mantener la corriente eléctrica, la energía del campo eléctrico debe reponerse continuamente, o sea, es necesaria una *fuerza de energía eléctrica* — un dispositivo en el cual se transforme una variedad cualquiera de energía en energía del campo eléctrico.

5°. Se considera que el sentido de la corriente eléctrica es el del movimiento ordenado de las cargas eléctricas positivas.

Pero en realidad, en los conductores metálicos, la corriente es engendrada por el movimiento ordenado de los electrones que se desplazan en sentido contrario al de la corriente.

§ III.7.2. Intensidad y densidad de la corriente

1°. Se llama *intensidad de la corriente* *) la magnitud física escalar igual a la razón de la carga dq transportada a través de la superficie que se considere **) durante un pequeño intervalo de tiempo, a la magnitud dt de este intervalo:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

La corriente eléctrica se dice que es *continua* (*corriente eléctrica continua*) si su intensidad y sentido no varían con el tiempo. Para la corriente continua,

$$I = \frac{q}{t},$$

siendo q la carga eléctrica transportada a través de la superficie que se considere **) durante el período de tiempo finito comprendido entre 0 y t .

2°. Si la corriente eléctrica es continua, en ningún punto del conductor deberán acumularse ni disminuir las cargas. El circuito de corriente continua debe ser cerrado y ha de cumplirse la condición $Q_{S_1} = Q_{S_2}$, en la que Q_{S_1} es la carga eléctrica total que, en la unidad de tiempo, entra a través de la superficie S_1 en el volumen del conductor comprendido entre las secciones transversales S_1 y S_2 ; y Q_{S_2} es la carga eléctrica total que, en la unidad de tiempo, sale de este volumen a través de la superficie S_2 .

3°. El sentido de la corriente eléctrica en distintos puntos de la superficie que se considere, y la distribución de la intensidad en esta misma superficie se determina por la densidad de la corriente. El *vector densidad de la corriente* \mathbf{j} está dirigido en sentido contrario al movimiento de los electrones— portadores de

*) En electrotecnia la magnitud I suele llamarse *corriente*.

**) En el caso de corriente de conducción, a través de la sección transversal del conductor,

la corriente en los metales*)— y es numéricamente igual a la relación entre la intensidad de la corriente dI a través de un elemento infinitesimal de la superficie normal a la dirección del movimiento de las partículas cargadas, y la magnitud dS' del área de dicho elemento:

$$j = \frac{dI}{dS'}$$

Una relación más general entre la densidad de la corriente j y el elemento de intensidad dI es

$$dI = j dS,$$

donde $dS = ndS$ es el vector del área elemental; y n , el vector unidad de la normal al área dS , que forma con el vector j el ángulo α .

4°. La intensidad de la corriente a través de una superficie arbitraria S constituye

$$I = \int_S j dS = \int_S j_n dS,$$

donde $j_n = j \cos \alpha$ es la proyección del vector j sobre la dirección de la normal n (p. 3°), y la integración se extiende a toda el área de la superficie S . Si para hallar la intensidad de la corriente de conducción se consideran las secciones transversales del conduc-

tor en las que $j_n = j$, entonces $I = \int_S j dS$.

5°. La densidad de la corriente continua es igual en toda la sección transversal S del conductor homogéneo. Para esta corriente,

$$I = jS.$$

En un circuito de corriente continua, las densidades de la corriente en dos secciones transversales S_1 y S_2 son inversamente proporcionales a las áreas de estas secciones:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

*) En otros medios conductores el vector j coincide en dirección con el movimiento de los portadores de corriente cargados positivamente.

§ III.7.3. Fundamentos de la teoría electrónica clásica de la conductibilidad de los metales

1°. La alta conductibilidad de los metales se debe a que en ellos hay una enorme cantidad de portadores de corriente: *electrones de conducción* procedentes de los electrones de valencia de los átomos del metal (VI.2.3.9°) y que no pertenecen a un átomo determinado, sino que son *electrones comunes* (*socializados*). En la teoría electrónica clásica de Drude—Lorentz, estos electrones se consideran como un gas electrónico (III.3.4.1°) que tiene propiedades de gas perfecto monoatómico (II.1.4.1°).

El número de electrones de conducción que hay en la unidad de volumen de un metal monovalente constituye

$$n_0 = \frac{N_A}{A} \rho,$$

donde N_A es el número de Avogadro (IX); A , la masa atómica del metal; y ρ , su densidad. Por su orden de magnitud $n_0 \sim (10^{28} - 10^{29}) \text{ m}^{-3}$.

En ausencia de campo eléctrico, dentro del metal los electrones de conducción se mueven caóticamente y chocan con los iones de la red cristalina del metal (VI.1.1.3°). Se considera que el recorrido libre medio del electrón (λ) (II.3.5.1°) debe equivaler, según el orden de su magnitud, al período de la red cristalina del metal, es decir, $\langle \lambda \rangle \approx 10^{-10} \text{ m}$.

La energía cinética media del movimiento térmico de los electrones (II.3.2.4°) constituye

$$\frac{m v_c^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

donde m es la masa, y v_c , la velocidad media cuadrática de los electrones (II.3.2.2°). A temperatura $T = 273 \text{ K}$ la velocidad $v_c \approx 10^3 \text{ m/s}$.

La velocidad media aritmética (u) del movimiento térmico de los electrones (II.3.3.6°) tiene este mismo orden de magnitud.

2°. La corriente eléctrica surge en el metal bajo la acción del campo eléctrico externo (III.7.1.4°) que provoca el movimiento ordenado de los electrones. La densidad de la corriente j es igual a la carga de todos los electrones que pasan en la unidad de tiempo a través de la unidad de área de la sección transversal

del conductor,

$$\mathbf{j} = n_0 e \langle \mathbf{v} \rangle,$$

donde n_0 es el número de electrones de conducción que hay en la unidad de volumen; e , la magnitud absoluta de la carga del electrón; y $\langle \mathbf{v} \rangle$, la velocidad media del movimiento ordenado de los electrones bajo la acción del campo eléctrico externo. Para las mayores densidades de corriente, $\langle \mathbf{v} \rangle$ es aproximadamente igual a 10^{-4} m/s, es decir, es insignificante en comparación con las velocidades térmicas de los electrones (p. 1°).

3°. La corriente eléctrica en el circuito se establece en un tiempo $t = \frac{L}{c}$, donde L es la longitud del circuito, y c , la velocidad de la luz en el vacío. El tiempo t coincide con el tiempo que tarda en establecerse, a lo largo del circuito, el campo eléctrico estacionario y el movimiento ordenado de los electrones simultáneamente en todo el circuito. Por esto, la corriente eléctrica surge prácticamente al mismo tiempo que se cierra el circuito.

4°. La ley de Ohm para la densidad de corriente (ley de Ohm en forma diferencial) es

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

La densidad de corriente en un conductor es igual al producto de la conductividad eléctrica γ por la intensidad del campo eléctrico \mathbf{E} . La magnitud $\rho = \frac{1}{\gamma}$ se llama resistividad o resistencia específica.

La conductividad eléctrica se calcula (en la teoría electrónica clásica) por la fórmula

$$\gamma = \frac{n_0 e \langle \lambda \rangle}{2m \langle u \rangle}, \quad \rho = \frac{2m \langle u \rangle}{n_0 e \langle \lambda \rangle},$$

en la que n_0 es el número de electrones que hay en la unidad de volumen del metal; $\langle \lambda \rangle$, el recorrido libre medio del electrón (II.3.5.1°); $\langle u \rangle$, la velocidad media aritmética del movimiento térmico de los electrones (II.3.3.6°); e , la magnitud absoluta de la carga del electrón; y m , la masa de éste.

5°. Durante el recorrido libre medio, el electrón adquiere, por la acción del campo, la velocidad del movimiento ordenado, igual (al final del recorrido) a $v_{\text{máx}}$. Cuando el electrón choca con un ion, el mismo pierde dicha velocidad, y la energía del mo-

vimiento ordenado se transforma en energía interna del conductor, el cual se calienta cuando por él pasa corriente eléctrica.

Se da el nombre de *densidad volumétrica de potencia calorífica de la corriente* w , a la magnitud de la energía que se desprende de la unidad de volumen del conductor en la unidad de tiempo. La *ley de Joule—Lenz* para la densidad volumétrica de potencia calorífica de la corriente constituye

$$w = \mathbf{jE} = \gamma E^2 = \frac{1}{\rho} E^2.$$

Ley de Joule—Lenz en forma diferencial: la densidad volumétrica de potencia calorífica de la corriente es igual al producto escalar de los vectores densidad de corriente e intensidad del campo eléctrico.

La densidad volumétrica de potencia calorífica de la corriente no depende del carácter de las colisiones de los electrones con los nudos de la red cristalina (choque elástico o inelástico (I.3.5.3°)). De las leyes de conservación de la energía y el impulso se deduce que la energía ΔW transmitida al ion en la colisión de un electrón con un ion, constituye solamente una pequeña parte de la energía W_{el} del electrón. En el choque inelástico $\frac{\Delta W}{W_{el}} = \frac{m}{m+M}$, y en el elástico $\frac{\Delta W}{W_{el}} = \frac{4mM}{(m+M)^2}$, donde m es la masa del electrón, y M , la masa del ion. En ambos casos, prácticamente $\frac{\Delta W}{W_{el}} \approx \frac{m}{M} \approx 10^{-4}$.

6°. *Ley de Wiedemann—Franz:* Para todos los metales, la relación entre el coeficiente de conductibilidad térmica K (II.3.8.5°) y la conductividad eléctrica γ es directamente proporcional a la temperatura absoluta T :

$$\frac{K}{\gamma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T,$$

donde k es la constante de Boltzmann (II.1.4.5°), y e , la carga del electrón.

7°. *Defectos de la teoría electrónica clásica de la conductibilidad de los metales:*

a) imposibilidad de explicar la dependencia lineal que se observa experimentalmente en un amplio intervalo de temperaturas entre la resistividad ρ y la temperatura absoluta: $\rho \sim T$;

b) valor erróneo del calor molar de los metales. Este valor, según dicha teoría, debe ser igual a $9 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$ y se compone de la

capacidad calorífica iónica de la red cristalina $\left(6 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}\right)$ y de la

capacidad calorífica del gas electrónico monoatómico $\left(3 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}\right)$.

Pero por la ley empírica de Dulong y Petit (VII.2.7.2°) sabemos que el calor molar de los metales difiere poco del de otros sólidos y es igual aproximadamente a $6 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$. La ausencia de la

componente electrónica de la capacidad calorífica de los metales es imposible de explicar clásicamente;

c) los valores experimentales de la resistividad ρ y los valores teóricos de la velocidad media aritmética de los electrones $\langle u \rangle$ conducen, por las fórmulas del p. 4°, a la magnitud del recorrido libre medio de los electrones (λ) , cuyo orden es dos veces superior al período de la red cristalina del metal. Esto contradice las suposiciones de la teoría electrónica clásica de la conductibilidad eléctrica de los metales.

Capítulo III.8. Leyes de la corriente continua

§ III.8.1. Fuerzas exteriores

1°. En un conductor metálico existe un campo electrostático engendrado por los electrones y los iones positivos de la red cristalina, o un campo de fuerzas coulombianas (III.1.2.2°). La interacción coulombiana entre las cargas en el metal conduce a una distribución de equilibrio de estas cargas con la cual el campo eléctrico dentro del conductor es nulo y todo el conductor es equipotencial (III.3.4.3°). El campo electrostático coulombiano no puede ser la causa del proceso estacionario del movimiento ordenado de los electrones, es decir, no puede generar una corriente eléctrica continua.

2°. Las fuerzas externas son fuerzas no electrostáticas cuya acción sobre los electrones de conducción permanecientes en el conductor provoca su movimiento ordenado, manteniendo una corriente eléctrica continua en el circuito. Las fuerzas externas, a diferencia de las coulombianas, no unen las cargas de signos

contrarios, sino que las obligan a separarse manteniendo invariable la diferencia de potencial en los extremos del conductor.

Las fuerzas exteriores generan un campo eléctrico no electrostático en el conductor, el cual asegura el movimiento ordenado de las cargas desde los puntos de potencial más alto hacia los puntos de potencial más bajo. El campo eléctrico estacionario de las fuerzas exteriores es generado por las *fuentes de energía eléctrica* (pilas, generadores eléctricos, etc.).

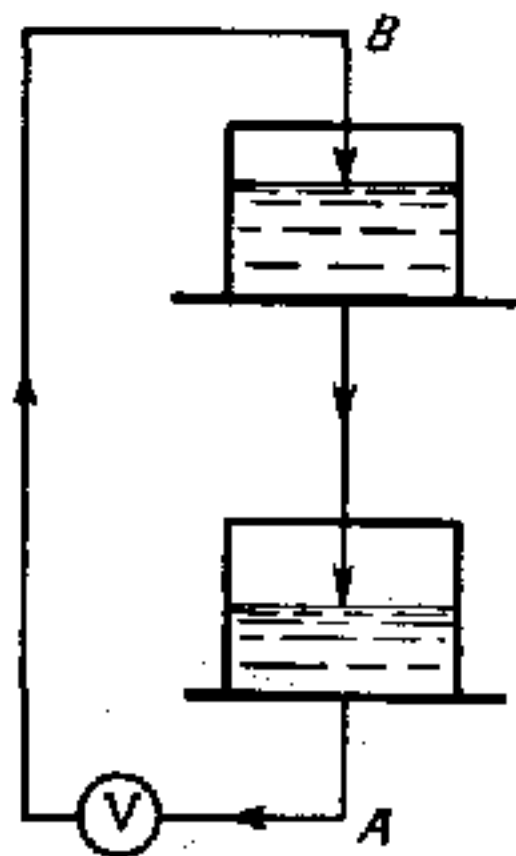


Fig. III.8.1.

3°. En un sistema hidráulico cerrado que asegure la circulación constante del líquido (fig. III.8.1) del punto *A* al punto *B* (ese líquido se moverá en dirección contraria a la acción de las fuerzas de gravedad), impulsado por ciertas «fuerzas exteriores» que crea la bomba *H*. Esta bomba hace que entre los puntos *B* y *A* haya una diferencia constante de presión hidrostática, y entre los puntos *B* y *A* el líquido se mueve por gravedad. En un circuito de corriente continua, la fuente de energía eléctrica desempeña un papel análogo al de la bomba en el sistema hidráulico. A expensas del campo eléctrico que crean las fuerzas exteriores y que existe dentro de la fuente, las cargas eléctricas se mueven

dentro de ésta en sentido contrario al de las fuerzas del campo electrostático, y en los extremos del circuito externo se mantiene la diferencia de potencial necesaria para el paso de la corriente eléctrica continua. A expensas de la energía que se invierte en la fuente, se realiza el trabajo necesario para el movimiento ordenado de las cargas eléctricas. Por ejemplo, en una dinamo, el trabajo de las fuerzas exteriores (p. 2°) se efectúa a expensas de la energía mecánica que se gasta en hacer girar el rotor del generador.

§ III.8.2. Leyes de Ohm y de Joule—Lenz

1°. En cualquier punto dentro de un trozo de conductor que contenga una fuente de energía eléctrica, existe un campo electrostático de fuerzas coulombianas de intensidad E_{coul} y un campo eléctrico de fuerzas exteriores de intensidad E_{ext} .

De acuerdo con el principio de superposición de los campos (III.2.2.4°), la intensidad del campo resultante será

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{coul}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}.$$

La ley de Ohm para la densidad de corriente (III.7.3.4°),

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{E}_{\text{coul}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}),$$

permite obtener, para el trozo 1—2 del conductor homogéneo de sección S , la relación

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{coul}} dl + \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ext}} dl,$$

en la que I es la intensidad de la corriente en el conductor; dl , un vector de módulo dl , igual al elemento de longitud del conductor, dirigido según la tangente al conductor y hacia el lado del vector densidad de corriente; y S es la sección del conductor.

2°. La integral $\int_1^2 \mathbf{E}_{\text{coul}} dl$ es numéricamente igual al tra-

bajo que realizan las fuerzas de Coulomb cuando se traslada una carga unidad positiva del punto 1 al punto 2. De acuerdo con (III.3.3.1°),

$$\int_1^2 \mathbf{E}_{\text{coul}} dl = \varphi_1 - \varphi_2,$$

donde φ_1 y φ_2 son los potenciales de los puntos 1 y 2 del conductor.

Recibe el nombre de *fuerza electromotriz* (fem) \mathcal{E}_{12} que actúa en el tramo 1—2 del circuito, la integral lineal

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ext}} dl.$$

La fuerza electromotriz \mathcal{E}_{12} equivale numéricamente al trabajo que realizan las fuerzas exteriores al trasladar por el conductor una carga unidad positiva desde el punto 1 hasta el

punto 2. Este trabajo se efectúa a expensas de la energía que se gasta en la fuente. Por esto \mathcal{E}_{12} se llama fuerza electromotriz de la fuente de energía eléctrica intercalada en el tramo 1—2 del circuito.

Se llama *tensión* U_{12} del tramo 1—2, la magnitud física numéricamente igual al trabajo que realiza el campo resultante de las fuerzas coulombianas exteriores, al trasladar a lo largo del circuito, desde el punto 1 hasta el punto 2, una carga unidad positiva:

$$U_{12} = \int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{coul}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}) d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

o bien

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}.$$

La tensión en los extremos del tramo del circuito sólo coincide con la diferencia de potencial cuando en dicho tramo no se ha aplicado fem.

Se denomina *resistencia* R_{12} del tramo del circuito entre dos secciones 1 y 2, la integral

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{d\mathbf{l}}{S}.$$

Para un conductor lineal homogéneo $\rho = \text{const}$, $S = \text{const}$ y

$$R_{12} = \rho \frac{l_{12}}{S},$$

donde l_{12} es la longitud del conductor entre las secciones 1 y 2.

3°. Ley de Ohm generalizada para cualquier parte de un circuito:

$$IR_{12} = U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}.$$

El producto de la intensidad de la corriente por la resistencia de la parte del circuito es igual a la suma de la diferencia de potencial en esta parte y la fem de todas las fuentes de energía eléctrica intercaladas en ella. En esta forma la ley de Ohm es aplicable tanto a los *tramos pasivos del circuito*, carentes de fuentes de energía eléctrica, como a los *tramos activos* que las contienen.

4°. *Regla de los signos* para la fem de las fuentes de energía eléctrica incluidas en el tramo 1—2: si dentro de la fuente la corriente circula del cátodo al ánodo, es decir, si la intensidad del campo de las fuerzas exteriores en la fuente coincide en di-

rección con la corriente en el tramo del circuito, al realizar los cálculos, la fem \mathcal{E}_{12} de esta fuente se considera positiva. Si la corriente dentro de la fuente se dirige del ánodo al cátodo, la fem \mathcal{E}_{12} de esa fuente se considera negativa (fig. III.8.2).

5°. En un circuito eléctrico cerrado, sin ramificaciones, la intensidad de la corriente en todas las secciones es la misma y

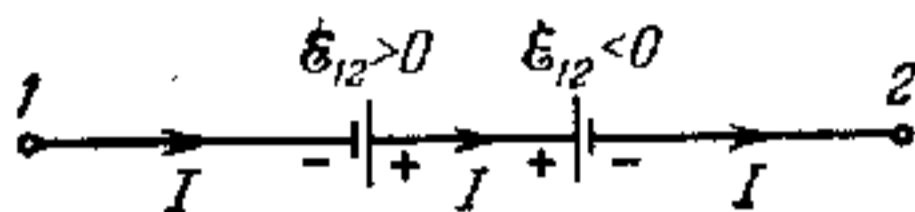


Fig. III.8.2.

este circuito se puede considerar como un tramo cuyos extremos (puntos 1 y 2) coinciden. En tal circuito $\varphi_1 = \varphi_2$ y $R_{12} = R$ es la resistencia total del mismo.

La ley de Ohm para un circuito eléctrico cerrado se escribe del siguiente modo:

$$IR = \mathcal{E},$$

donde \mathcal{E} es la suma algebraica de todas las fem aplicadas al circuito.

Si el circuito cerrado consta de una fuente de energía eléctrica, con fem \mathcal{E} y resistencia interna r , y la resistencia de la parte externa del circuito es igual a R , la ley de Ohm tiene la forma siguiente:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

La diferencia de potencial en los bornes de la fuente es igual a la tensión en la parte externa del circuito:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = RI = \mathcal{E} - Ir.$$

Si el circuito está abierto y no hay corriente en él ($I = 0$) la diferencia de potencial en los bornes de la fuente es igual a su fem:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}.$$

Un voltímetro conectado en paralelo al tramo 1—2 de un circuito eléctrico de corriente continua, mide la diferencia de potencial en los extremos de dicho tramo, y no la tensión,

$$R_V I_V = \varphi_1 - \varphi_2,$$

donde R_V e I_V son, respectivamente, la resistencia del voltímetro y la intensidad de la corriente en él (fig. III.8.3). Esto se deduce de la ley de Ohm generalizada (p. 3°) y escrita para el tramo 1—2 del circuito del voltímetro, en el que no hay fem (véase también III.8.3.5°).

6°. En los conductores en reposo de un circuito de corriente eléctrica continua, el trabajo de las fuerzas exteriores se invier-

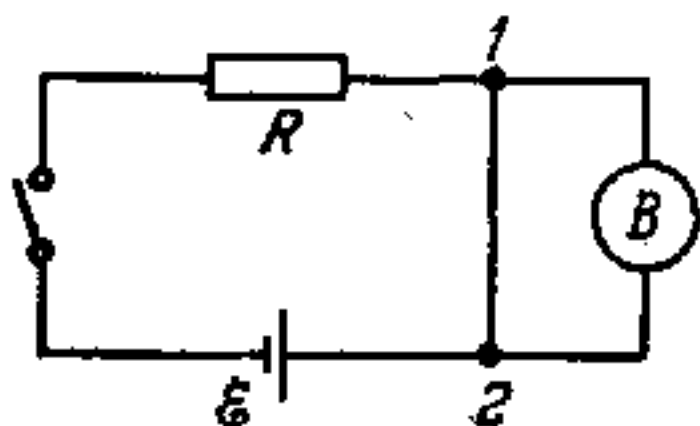


Fig. III.8.3.

te en calentar dichos conductores (III.7.3.5°). La energía W que se desprende del circuito durante el tiempo t en todo el volumen del conductor constituye

$$W = IUt,$$

siendo I la intensidad de la corriente, y U la tensión. La cantidad de calor Q (II.2.2.1°), en calorías, correspondiente a esta energía

y que se desprende en el conductor constituye

$$Q = 0,24 IUt.$$

Todas las demás magnitudes van expresadas en el SI (IX).

Ley de Joule—Lenz: La cantidad de calor desprendido por la corriente en un conductor es proporcional a la intensidad de dicha corriente, a la tensión y al tiempo de circulación de la misma.

Otras expresiones de la ley de Joule—Lenz:

$$Q = 0,24 I^2 R t = 0,24 \frac{U^2}{R} t.$$

§ III.8.3. Leyes de Kirchhoff

1°. El cálculo de los *circuitos complejos (bifurcados)* consiste en hallar las intensidades de las corrientes en diversas partes de ellos, conociendo las resistencias de estas partes y las fem aplicadas a ellas.

2°. Se llama *nudo* de un circuito bifurcado el punto donde hay más de dos direcciones posibles de la corriente. En un nudo concurren más de dos conductores (fig. III.8.4).

Primera ley de Kirchhoff (regla de los nudos): la suma algebraica de las corrientes convergentes en un nudo es igual

a cero:

$$\sum_{i=1}^{i=n} I_i = 0,$$

donde n es el número de conductores que convergen en ese nudo, e I_i , la intensidad de la corriente en el mismo. Se consideran positivas las corrientes que afluyen al nudo, y negativas, las que salen de él.

Segunda ley de Kirchhoff (regla de los contornos): en cualquier contorno cerrado, elegido arbitrariamente en un circuito

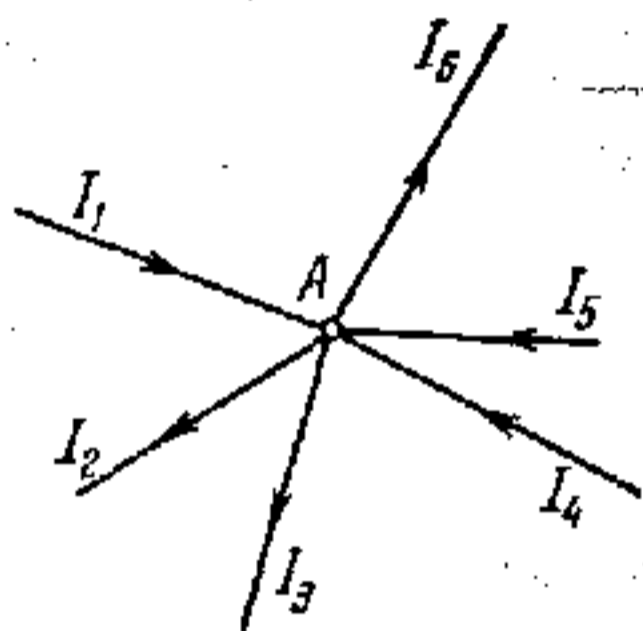


Fig. III.8.4.

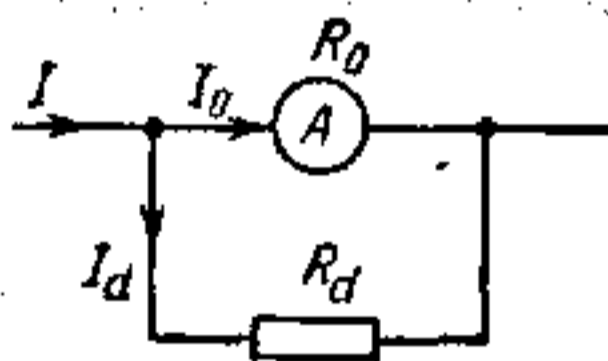


Fig. III.8.5.

eléctrico bifurcado, la suma algebraica de los productos de las intensidades de las corrientes I_i por las resistencias R_i de las partes correspondientes de este contorno, es igual a la suma algebraica de las fem aplicadas al mismo:

$$\sum_{i=1}^{i=n_1} I_i R_i = \sum_{i=1}^{i=n_1} \mathcal{E}_i,$$

donde n_1 es el número de partes en que el contorno es dividido por los nudos. Para aplicar la segunda ley de Kirchhoff se elige un sentido determinado de recorrido del contorno (en el sentido de las agujas del reloj o al contrario). Las corrientes que coincidan con este sentido de recorrido se consideran positivas. Las fem de las fuentes de energía eléctrica se consideran positivas si generan corrientes dirigidas en el mismo sentido que el de recorrido del contorno.

3°. *Orden de cálculo de un circuito bifurcado de corriente continua:*

a) se eligen arbitrariamente los sentidos de las corrientes en todas las partes del circuito;

b) para los m nudos del circuito se escriben $(m - 1)$ ecuaciones independientes según la primera ley de Kirchhoff;

c) se escogen los contornos cerrados arbitrarios y después de elegir los sentidos de los recorridos se escribe el sistema de ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff. En un circuito bifurcado que conste de p partes (ramas) entre nudos vecinos y de m nudos, el número de ecuaciones independientes de la segunda ley de Kirchhoff será $(p - m + 1)$. Al escribirlas, los contornos se

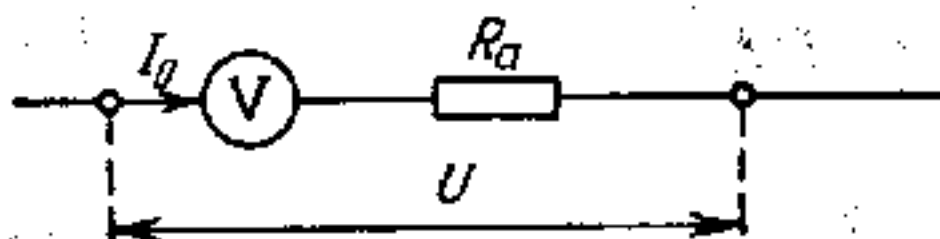


Fig. III.8.6.

eligen de tal manera que cada contorno nuevo tenga por lo menos una parte del circuito que no permanezca dentro de los contornos ya considerados.

4°. Se llama *derivación* o *shuntado de un amperímetro*, la conexión paralela al amperímetro de resistencia adicional R_d mediante la cual el amperímetro de resistencia R_0 , calculado para una intensidad de corriente máxima I_0 , puede medir corrientes I mayores que I_0 (fig. III.8.5). La resistencia en derivación se halla por las leyes de Kirchhoff: $I = I_0 + I_d$, $I_0 R_0 = I_d R_d$, de donde se elimina I_d :

$$R_d = \frac{I_0 R_0}{I - I_0}$$

5°. Si la diferencia de potencial $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ en una parte del circuito, que hay que medir con un *voltímetro* calculado para U_0 voltios (III.8.2.5°) con una corriente máxima en el aparato de I_0 ($U_0 = I_0 R_0$), es mayor que U_0 ($U > U_0$), en serie con el voltímetro se conecta una *resistencia adicional* R_a (fig. III.8.6) que se determina por la ecuación $U = (R_0 + R_a) I_0$, de donde

$$R_a = \frac{U}{I_0} - R_0$$

Capítulo III.9. Corriente eléctrica en los líquidos y en los gases

§ III.9.1. Leyes de la electrólisis de Faraday. Disociación electrolítica

1°. Los líquidos son conductores de la corriente eléctrica (*electrólitos, conductores de segunda clase*) si bajo la acción de un campo eléctrico externo puede efectuarse en ellos el movimiento ordenado de los iones.

El movimiento ordenado de los iones en los líquidos conductores se produce en el campo eléctrico engendrado por los *electrodos*, o sea, por los conductores unidos a los polos de una fuente de energía eléctrica. El electrodo positivo se denomina *ánodo, cátodo*, y el negativo. Los iones positivos —*cationes*— (iones de los metales y del hidrógeno) se mueven hacia el cátodo, y los iones negativos —*aniones*— (iones de los radicales ácidos y del hidroxilo) se mueven hacia el ánodo. La corriente eléctrica en los electrólitos va acompañada del fenómeno de *electrólisis*, es decir, del desprendimiento (en los electrodos) de las partes componentes de las sustancias disueltas o de otras, que resultan de las reacciones secundarias en esos electrodos.

2°. *Primera ley de Faraday (primera ley de la electrólisis)*: la masa M de sustancia que se desprende en el electrodo es directamente proporcional a la carga eléctrica Q que pasa por el electrólito:

$$M = kQ = kIt,$$

si a través de éste se hace pasar, durante el tiempo t , corriente continua de intensidad I .

El coeficiente de proporcionalidad k se denomina *equivalente electroquímico* de la sustancia. Este coeficiente es numéricamente igual a la masa de la sustancia desprendida cuando por el electrólito pasa la unidad de carga eléctrica, y depende de la naturaleza química de dicha sustancia.

3°. *Segunda ley de Faraday (segunda ley de la electrólisis)*: los equivalentes electroquímicos de los elementos son directamente proporcionales a sus equivalentes químicos:

$$k = Ck_x,$$

donde C es cierta constante universal para todos los elementos, y k_x es el equivalente químico,

$$k_x = 10^3 \frac{A}{z}$$

Aquí A es la masa atómica del elemento (en kg/mol), y z , su valencia.

Así pues, $k = \frac{1}{F} \frac{A}{z}$, siendo $F = 10^{-3}/C$ la constante de Faraday (número de Faraday) (IX).

4°. La ley unificada de la electrólisis (ley unificada de Faraday):

$$M = \frac{1}{F} \frac{A}{z} Q,$$

permite esclarecer el sentido físico de F , porque precisamente cuando $M = \frac{A}{z}$, el número de Faraday $F = Q$. La cantidad de substancia igual a $1/z$ moles recibe el nombre de *equivalente-gramo*. Cuando $z = 1$, el equivalente-gramo de la substancia es igual a un mol. La constante de Faraday es numéricamente igual a la carga eléctrica que debe pasar por el electrólito para que en el electrodo se desprenda un equivalente-gramo de substancia.

5°. La descomposición de las moléculas neutras en iones con cargas de signos opuestos, como resultado de la interacción de la substancia disuelta con el disolvente, se llama *dicociación electrolítica*. Las causas de la disociación electrolítica son el movimiento térmico de las moléculas polares (III.5.1.4°) de la substancia disuelta, constituidas por iones con cargas opuestas y enlazados entre sí (VI.2.4.3°), y la interacción de estas moléculas con las moléculas polares del disolvente. Estas dos causas hacen que se debilite el enlace heteropolar en las moléculas iónicas (VI.2.4.3°) y que éstas se transformen en dos iones con cargas opuestas.

Se llama *coeficiente (grado) de disociación* α la relación entre el número de moléculas n' disociadas en iones en un volumen determinado, y el número total n_0 de moléculas de la substancia disuelta en el mismo volumen: $\alpha = \frac{n'}{n_0}$.

6°. El proceso inverso a la disociación electrolítica (p. 5°) se denomina *recombinación*, o sea, reagrupación de los iones de signos opuestos, en moléculas neutras. Si entre los procesos de disociación y de recombinación existe un equilibrio dinámico,

α se halla por la ecuación

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2} = \text{const } n_0,$$

cuando $n_0 \rightarrow 0$, tenemos que $\alpha \rightarrow 1$ es decir, en las disoluciones débiles todas las moléculas están disociadas. A medida que aumenta la concentración de la disolución, α disminuye. En las soluciones muy concentradas

$$\alpha \approx \frac{\text{const}}{\sqrt{n_0}}.$$

§ III.9.2. Atomicidad de las cargas eléctricas

1°. De las leyes de la electrólisis de Faraday se deduce que todas las cargas eléctricas están constituidas por un número entero de cargas elementales indivisibles.

2°. La magnitud Q de la carga de cualquier ion:

$$Q = \pm \frac{zF}{N_A},$$

donde z es la valencia del ion; F , el número de Faraday (III.9.1.4°); y N_A , el número de Avogadro (IX). La carga de ion monovalente es igual a la carga e del electrón o del protón:

$$Q_1 = e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C} = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{CGS Eq}$$

Toda carga eléctrica está constituida por un número entero de cargas elementales e (III.1.1.2°).

§ III.9.3. Conducción electrolítica de los líquidos

1°. La densidad de la corriente \mathbf{j} (III.7.2.3°) en una sección arbitraria SS perpendicular a la dirección del movimiento de los iones (fig. III.9.1), es igual a la suma de las densidades de las corrientes de iones positivos y negativos:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_-,$$

siendo $\mathbf{j}_+ = q_+ n_{0+} \langle \mathbf{v}_+ \rangle$ y $\mathbf{j}_- = q_- n_{0-} \langle \mathbf{v}_- \rangle$, donde q_+ y q_- , n_{0+} y n_{0-} , $\langle \mathbf{v}_+ \rangle$ y $\langle \mathbf{v}_- \rangle$ son, respectivamente, las cargas, las

concentraciones y las velocidades medias del movimiento ordenado (es decir, de la *deriva* bajo la acción del campo magnético) de los iones positivos y negativos.

2°. Las velocidades medias de deriva de los iones son proporcionales a la intensidad E del campo eléctrico:

$$\langle v_+ \rangle = u_+ E, \quad \langle v_- \rangle = -u_- E,$$

donde las magnitudes positivas u_+ y u_- se llaman *movilidades de los iones*. La movilidad iónica es igual a la relación entre los módulos de los vectores velocidad media de deriva e intensidad del campo, y no depende de la intensidad E del campo eléctrico. Como en los electrólitos no hay cargas espaciales, $q_+ n_{0+} + q_- n_{0-} = 0$.

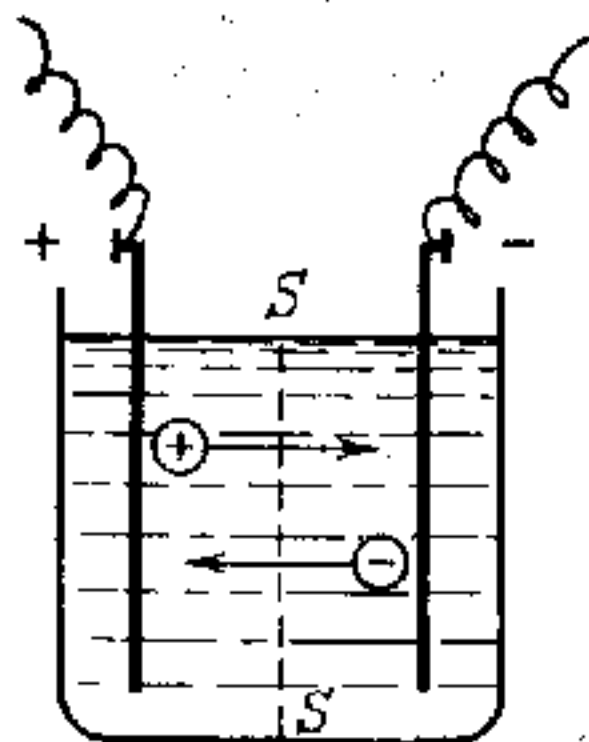


Fig. III.9.1.

Además, $q_+ = ez_+ = \frac{F}{N_A} z_+$
(III.9.2.2°).

3°. *Ley de Ohm para la densidad de la corriente en los electrólitos* (compárese con III. 7.3.4°):

$$\mathbf{j} = \frac{F}{N_A} z_+ n_{0+} (u_+ + u_-) \mathbf{E}.$$

La resistividad ρ del electrólito (III.7.3.4°) constituye

$$\rho = \frac{N_A}{F z_+ n_{0+} (u_+ + u_-)}.$$

Si al disociarse las moléculas del soluto, se forman k_+ iones positivos y k_- iones negativos, entonces

$$k_+ z_+ = k_- z_-; \quad n_{0+} = k_+ \alpha n_0 \quad \text{y} \quad n_{0-} = k_- \alpha n_0,$$

donde α es el grado de disociación, n_0 , la concentración de sustancia disuelta (III.9.1.5°), y

$$\rho = \frac{N_A}{F z_+ k_+ \alpha n_0 (u_+ + u_-)}.$$

La relación N_A/z_+ es el número de iones positivos que hay en un equivalente-gramo (III.9.1.4°). Si se introduce la magnitud

$$C = \frac{k_+ n_0 z_+}{N_A} = \frac{k_- n_0 z_-}{N_A},$$

llamada *concentración equivalente de la solución*, que representa el número de equivalentes-gramo de iones de un signo, contenidos en la unidad de volumen del electrólito (en estado libre y ligados en las moléculas), tenemos que

$$\rho = \frac{1}{FC\alpha(u_+ + u_-)}$$

§ III.9.4. Conducción de la electricidad por los gases

1°. Los gases constituidos por átomos y moléculas neutras son aisladores y no conducen la corriente eléctrica. La conducción de electricidad se produce en los gases ionizados.

Se llama *ionización de una molécula (átomo)* la separación de uno o de varios electrones de ella y su transformación en un ion positivo. Si la molécula (átomo) de un gas captura electrones, surgen iones negativos.

El proceso inverso a la ionización, en el cual los electrones al unirse a un ion positivo forman una molécula (átomo) neutra, recibe el nombre de *recombinación*.

2°. Para ionizar las moléculas (átomos) hay que realizar un *trabajo de ionización* A_i contra las fuerzas de atracción entre el electrón que se arranca y el residuo atómico, es decir, contra las demás partículas de la molécula (átomo). La magnitud A_i depende del estado energético del electrón que se arranca (IV.2.1.9°) en el átomo o en la molécula de un gas dado. La energía de ionización aumenta a medida que crece la multiplicidad de la ionización, o sea, el número de electrones arrancados del átomo.

3°. Se denomina *potencial de ionización* φ_i la diferencia de potencial del campo eléctrico acelerador que debe recorrer la partícula cargada para acumular una energía igual a la de ionización: $\varphi_i = A_i/e$, donde e es la magnitud absoluta de la carga de la partícula.

4°. La ionización de un gas se debe a las acciones externas: suficiente elevación de la temperatura, influencia de diversas radiaciones, rayos cósmicos y bombardeo de las moléculas (átomos) del gas con electrones o iones rápidos. La *intensidad de la ionización* se mide por el número de pares de partículas cargadas, con signos contrarios y que se forman por unidad de tiempo en la unidad de volumen del gas.

5°. Se da el nombre de *ionización por choque* de un gas, a la ionización debida a la acción de los electrones o iones móviles.

La energía cinética mínima (I.3.2.1°) que debe tener la partícula ionizante se calcula partiendo de las leyes de conservación del impulso y la energía y es igual a

$$\frac{mv^2}{2} = A_i \left(1 + \frac{m}{M} \right),$$

donde A_i es el trabajo de ionización; m , la masa del electrón; y M , la masa del átomo.

Esta energía se aproxima tanto más a A_i cuanto menor es la relación $\frac{m}{M}$. Un electrón y un ion de carga única, al pasar por una misma diferencia de potencial $\Delta\varphi$, acumulan la misma energía $W = e \cdot \Delta\varphi$.

De la fórmula anterior se deduce que para la ionización por choque con electrones o iones, cuya masa supera en 10^4 veces la masa del electrón, los iones deben recorrer en el campo acelerador una diferencia de potencial mayor que los electrones.

§ III.9.5. Nociones sobre los distintos tipos de descarga a través de un gas

1°. Se llama *descarga en un gas* el proceso de paso de la corriente eléctrica a través de dicho gas.

Si la descarga en el gas se debe a agentes ionizadores (III.9.4.4°) externos y cesa cuando éstos dejan de actuar, tendremos una *descarga en gas no automantenida*. En la fig. III., 9.2 se representa la curva de dependencia de la intensidad de la corriente I respecto de la tensión U entre los electrodos para una descarga no automantenida. En la primera parte de la curva, donde las tensiones no son grandes, se cumple una ley de Ohm semejante a la ley para los electrólitos (III.9.3.2°). Si en el gas surgen electrones o iones de carga única,

$$\mathbf{j} = en_0 (u_+ + u_-) \mathbf{E},$$

donde n_0 es el número de pares de partículas cargadas (de signos contrarios) que hay en la unidad de volumen, u_+ , y u_- son las movilidades de los iones positivos y negativos; y e , el valor absoluto de la carga del electrón. En un amplio intervalo de presiones, comprendido entre 10 y 10^7 Pa, la movilidad iónica del gas es inversamente proporcional a la presión.

2°. En la segunda parte de la curva de la fig. III.9.2, la dependencia lineal entre la intensidad de la corriente I y la ten-

sión U se infringe a causa de que la concentración de iones en el gas disminuye. En esta región, al aumentar U , la intensidad de la corriente crece cada vez más lentamente.

En la tercera parte de la curva de la fig. III.9.2, a partir de cierta tensión U_s , la intensidad de la corriente permanece constante cuando aumenta la tensión. Esto se debe a que siendo invariable la intensidad de ionización (III.9.4.1°), en los campos eléctricos fuertes todos los iones que se forman en el gas en la

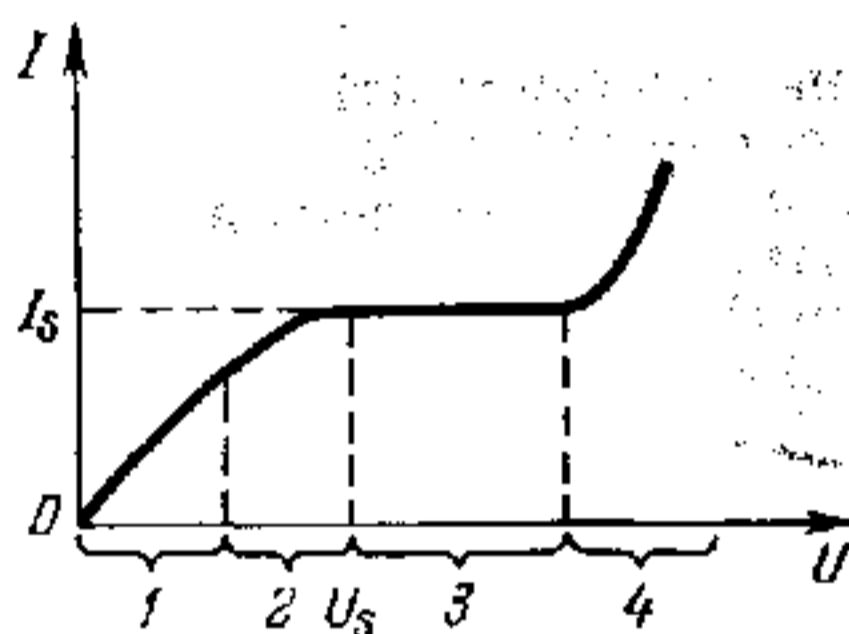


Fig. III.9.2.

unidad de tiempo, llegan a los electrodos. La intensidad de la corriente no aumenta más mientras permanezca invariable la intensidad de la ionización. La saturación comienza a consecuencia de que todas las partículas cargadas que se forman, moviéndose en el campo eléctrico intenso, alcanzan los electrodos antes de que una parte apreciable de ellos tenga tiempo para recombinarse con las partículas de signo contrario.

Se llama *corriente de saturación* la máxima intensidad de corriente I_s posible para una intensidad de ionización dada:

$$I_s = eN_0,$$

donde N_0 es el número máximo de pares de iones monovalentes que se forman en el volumen del gas en la unidad de tiempo, con una intensidad de ionización dada. La dependencia lineal entre I_s y N_0 confirma la naturaleza iónica de la conductibilidad de los gases.

3°. Se da el nombre de *descarga en gas automantenida* a la descarga eléctrica que continúa en el gas después de cesar la acción del agente ionizador externo. Para que exista esta descarga es necesario que en el gas tenga lugar la formación continua de nuevos pares de partículas cargadas, de signos contrarios. La

principal fuente de estas partículas es la ionización por choque del gas (III.9.4.5°). Con una tensión suficiente entre los electrodos, los electrones en el volumen del gas son tan fuertemente acelerados por el campo eléctrico, que su energía resulta ser suficiente para ionizar las moléculas del gas (III.9.4.5°) (*ionización volumétrica*). Los electrones secundarios, acelerándose en el campo eléctrico, también ionizan las moléculas del gas. Como resultado, aumenta mucho el número de portadores de corriente

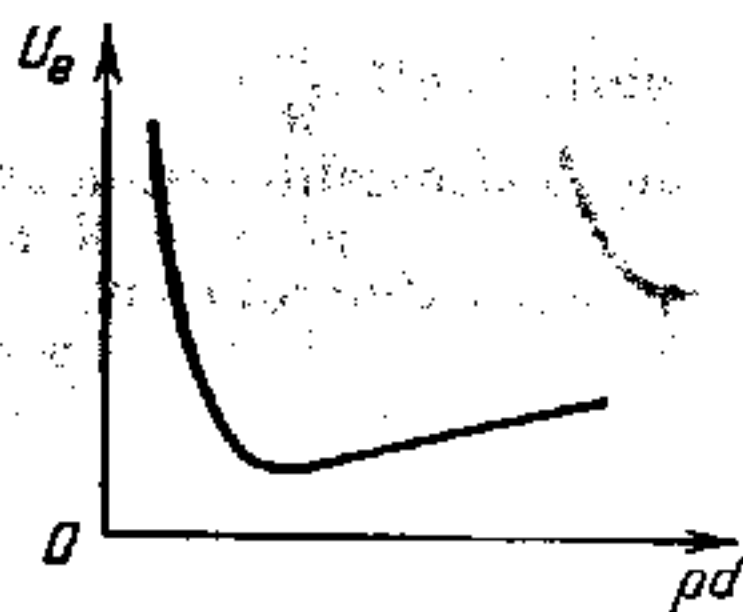


Fig. III.9.3.

en el gas y su conductibilidad (4ª parte de la curva de la fig. III.9.2). Pero la ionización por la acción de los electrones es insuficiente para que se efectúe la descarga automantenida. Los electrones que se mueven en sentido del cátodo al ánodo ionizan las moléculas del gas que están más cerca del ánodo que el punto en que surgen los electrones. Si la energía de los iones positivos no basta para la ionización por choque de las moléculas del gas o para arrancar electrones del cátodo metálico (*ionización su-*

perficial), los electrones sólo pueden surgir cerca del cátodo del tubo de descarga por la acción de agentes ionizadores externos. Cuando dicha acción cesa, disminuye la región en que se produce la ionización por choque, la cual se va apretando hacia el ánodo a medida que los electrones se mueven hacia él. El cese de la ionización por choque en estas condiciones hace que se interrumpa la descarga en el gas.

4°. La ionización superficial (p. 3°) que se produce cuando la tensión U es grande, genera electrones secundarios y engendra un alud bilateral de electrones e iones positivos. En este caso la acción del agente ionizador externo no tiene importancia para la continuación de la descarga en el gas. Aumentando la tensión U entre los electrodos del tubo de descarga se puede efectuar la *descarga eléctrica disruptiva* en el gas, es decir, el paso de la descarga no automantenida a la automantenida. Se llama *tensión de encendido* (*tensión disruptiva*) la tensión $U = U_e$ correspondiente a la ruptura eléctrica. Para la descarga en un tubo con electrodos planos, paralelos entre sí, situados a la distancia d uno de otro, la tensión disruptiva depende del producto pd , en el que p es la presión del gas (fig. III.9.3). Además, U_e de-

pende de la naturaleza química del gas y del material del cátodo.

Las descargas en un gas *luminiscente*, por efecto de corona, por chispas y en arco, son variedades de descargas automantenidas en gases, la cuales se omiten en este manual.

§ III.9.6. Algunos conocimientos sobre el plasma

1°. Se denomina *plasma* el estado especial de la substancia cuya propiedad más importante es que sus partículas están ionizadas en su mayoría y pueden llegar a estarlo en su totalidad. El *grado de ionización* α es la relación entre el número de partículas ionizadas y su cantidad inicial. Por su grado de ionización, el plasma se clasifica en: *débilmente ionizado* (α constituye una fracción de %), *moderadamente ionizado* (α es igual a varios %), y *totalmente ionizado* (α se aproxima al 100%).

El plasma débilmente ionizado existe en la *ionosfera*, capa conductora de la atmósfera que se extiende a alturas desde 60 hasta $2 \cdot 10^4$ km sobre la superficie de la Tierra.

El plasma totalmente ionizado, que se forma a temperaturas ultra altas (*plasma de alta temperatura*), existe en el Sol y en las estrellas calientes.

En condiciones de laboratorio el plasma es generado en las descargas en gas (III.9.5.1°) de las fuentes de luz por descarga en gas. El plasma acelerado se utiliza como agente activo (II.4.1.1°) en los motores de reacción. El plasma se puede emplear también para transformar directamente la energía interna en eléctrica (generadores magnetohidrodinámicos y fuentes de energía eléctrica a base del plasma).

La gran cantidad de partículas cargadas que hay en el plasma condiciona su gran conductibilidad y, en este sentido, hace que se aproxime a las propiedades de los conductores de corriente eléctrica.

2°. Condición necesaria para que pueda existir el plasma en cierta densidad mínima ρ_{\min} de partículas cargadas, a partir de la cual puede hablarse ya de plasma y no de una simple aglomeración de partículas cargas aisladas. La densidad ρ_{\min} se determina por la desigualdad $L \gg D$, en la que L es la dimensión lineal del sistema de partículas, y D , un parámetro — distancia del «plasma», llamado *distancia* o *radio de apantallamiento de*

Debye: $D = \left(\sum_i \frac{4\pi e_i^2 n_i}{kT_i} \right)^{1/2}$ (en el sistema CGSE), donde e_i es

la carga; n_i , la concentración; T_i , la temperatura del i -ésimo tipo de partículas; y k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°). La suma se extiende a todos los tipos de partículas. D es la distancia a la cual se produce el apantallamiento del campo coulombiano de una carga cualquiera del plasma. La causa del apantallamiento es que toda carga está rodeada principalmente por partículas con cargas de signo contrario al suyo.

Una definición más exacta del plasma es: el conjunto cuasi-neutro de un gran número de partículas cargadas que ocupan una región del espacio de dimensiones lineales $L \gg D$. Cuando $L \gg D$, en cuanto se producen alteraciones de la neutralidad del plasma, ésta se restablece a expensas de los intensos campos eléctricos recuperadores que surgen en el plasma. El radio de apantallamiento de Debye caracteriza la interacción de las par-

tículas en el plasma. Resulta que $\frac{W_p}{W_c} \sim N^{2/3}$, donde $N = \frac{4}{3}\pi n D^3$. Aquí W_p es la energía potencial de la interacción de

dos partículas que se hallan entre sí a la distancia media, igual a $n^{-1/3}$ (n es la concentración de partículas), y W_c , la energía cinética de estas partículas. La magnitud N es el número total de partículas que hay en una esfera de radio D y se llama *número de Debye*. Si N es grande, el plasma se llama *gaseoso* y termodinámicamente se considera como un gas perfecto con ecuación de estado $p = nkT$ (II.1.4.5°).

3°. La interacción coulombiana de largo alcance de las partículas cargadas en el plasma acarrea una peculiaridad cualitativa de éste, que permite considerarlo como *cuarto estado de agregación de la substancia*.

Propiedades principales del plasma:

a) una fuerte interacción con los campos magnéticos y eléctricos externos, debida a su gran conductibilidad eléctrica;

b) una interacción colectiva específica de sus partículas, que se efectúa por medio de un campo especial cuya naturaleza no puede estudiarse dentro de los límites de este manual;

c) en virtud de las interacciones remotas, el plasma es un medio elástico peculiar en el cual se excitan y propagan fácilmente oscilaciones y ondas de distinto tipo.

4°. El movimiento del plasma en el campo magnético se utiliza en el método de transformación directa de la energía interna del gas ionizado en electricidad. Este método se ha realizado en los *generadores magnetohidrodinámicos* (*generadores MHD*). El principio en que se basa el funcionamiento del gene-

rador MHD consiste en lo siguiente: el gas que se produce al quemarse el combustible, que es un plasma, se mueve en un fuerte campo magnético transversal. En el plasma electroconductor, lo mismo que en cualquier conductor que se moviera en dicho campo, se produce el fenómeno de inducción electromagnética (III.12.1.1°). La fem de inducción se recoge por medio de electrodos y pasa al circuito exterior. La fig. III.9.4 ilustra el esquema de un generador MHD. El gas ionizado que se produce al quemarse el combustible, pasa por una tobera y su energía interna se

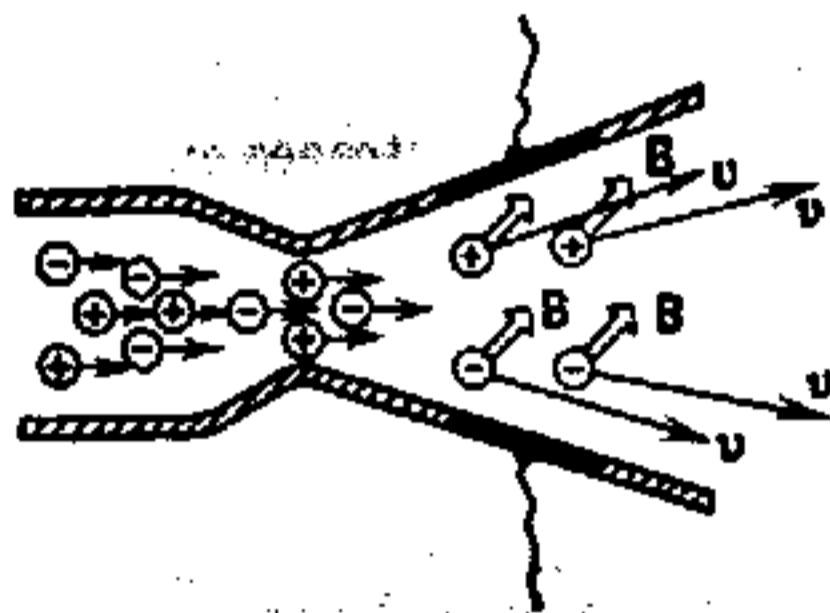


Fig. III.9.4.

convierte en cinética. Al moverse este gas en el campo magnético transversal B , bajo la acción del campo eléctrico inducido (III.12.1.1°) los iones positivos se desplazan hacia el electrodo superior, y los electrones libres, hacia el inferior. Cuando los electrodos se cierran sobre una carga externa formando un circuito, se genera corriente eléctrica.

5°. En el plasma es posible el estado de equilibrio termodinámico a una temperatura determinada, cuando la disminución del número de partículas cargadas, a causa de la recombinación (III.9.4.1°), es compensada por nuevos actos de ionización. En este plasma existe igualdad entre las energías cinéticas de las distintas partículas que lo componen. Los procesos de intercambio de energía entre sus partículas, así como el intercambio de energía entre él y la radiación negra (V. 5.1.8°), son procesos en equilibrio (II.1.3.7°). El plasma que tiene tales propiedades se denomina *plasma isotérmico*. Esta clase de plasma existe en la atmósfera de las estrellas de elevada temperatura.

Para conseguir un alto grado de ionización del plasma que permanece en equilibrio termodinámico, con cargas iguales según su magnitud, pero de signos contrarios, es necesario reducir

al máximo la recombinación de las partículas (III.9.4.1°). La ionización total del plasma se puede obtener cuando $kT \gg \gg e\varphi_i$, donde φ_i es el potencial de ionización de los átomos del gas (III.9.4.3°), y kT , la energía media del movimiento térmico de las partículas del plasma. Para el hidrógeno y el deuterio esto corresponde a $T \approx 160\,000$ K. En tales condiciones desempeña un papel importante la radiación del plasma y es difícil aislar éste de las paredes (p. 7°).

6°. En el plasma de descarga en un gas (III.9.5.1°) (*plasma de descarga gaseosa*) no existe equilibrio termodinámico (p. 5°). Las partículas cargadas se hallan en este plasma en un campo eléctrico acelerador.

La energía media de los electrones en el plasma de descarga gaseosa se caracteriza por cierta *temperatura electrónica* T_e , que corresponde a la distribución de Maxwell de los electrones según sus energías (II.3.3.7°). En virtud de la ausencia de equilibrio termodinámico en este plasma, T_e tiene carácter convencional. La energía cinética media de las partículas neutras es mucho menor que la energía cinética media de los electrones. Además de la temperatura electrónica T_e , también son parámetros del plasma de descarga gaseosa: la concentración de electrones n_e , el número de ionizaciones correspondiente a un electrón por segundo, la densidad de la corriente iónica o electrónica, y la intensidad longitudinal E_z del campo eléctrico establecido a lo largo del eje de simetría del plasma.

7°. La posible existencia del plasma de descarga gaseosa termodinámicamente inestable se establece a costa de la energía de la corriente de descarga que lo atraviesa. En ausencia de campo eléctrico externo, el plasma de descarga gaseosa desaparece.

Se denomina *destonización del gas* la desaparición del plasma de descarga gaseosa no mantenido, es decir, «abandonado a su propia suerte».

Además de los procesos de ionización y recombinación (III.9.4.1°), en el balance de energía del plasma existente en un volumen limitado, desempeña un gran papel su interacción con las paredes que limitan su volumen, la radiación del mismo y el desplazamiento de la radiación en él. La difusión de las partículas cargadas hacia las paredes y su recombinación en éstas, así como la transmisión de energía a dichas paredes por conductibilidad térmica del plasma (II.3.8.2°), contaminan este último con impurezas y hacen que disminuya su energía. Para proteger el plasma contra tales fenómenos se tiende a evitar su contacto con las paredes confinándolo en un campo magnético.

La radiación del plasma en la banda óptica y en la ultravioleta lejana está constituida por la radiación de frenado de los electrones, debida al frenado de éstos en los iones, por la radiación ordinaria de las partículas excitadas y por la radiación de recombinación que surge en el proceso de recombinación (III.9.4.1°). En el campo magnético el plasma tiene además una radiación especial, de betatrón (sincrotrón), cuyo estudio rebasa el marco de este manual.

Capítulo III.10. Campo magnético de la corriente continua

§ III.10.1. Campo magnético. Ley de Ampère

1°. *El campo magnético es una de las formas de campo electromagnético (III.2.1.2°). El mismo es generado por partículas y cuerpos portadores de cargas eléctricas que se mueven. Este campo actúa solamente sobre las cargas eléctricas y los cuerpos portadores de ellas que se hallan en movimiento.*

También son fuentes de campo magnético los campos eléctricos alternativos (corriente de desplazamiento) (III.14.3.2°).

2°. La característica de fuerza fundamental del campo magnético es el *vector inducción magnética \mathbf{B}* (*vector de inducción del campo magnético*). El vector \mathbf{B} se introduce por uno de los tres procedimientos:

- a) partiendo de la ley de Ampère (p. 4°),
- b) por la acción del campo magnético sobre un cuadro con corriente (III.10.4.2°),
- c) partiendo de la expresión de la fuerza de Lorentz (III.11.1.3°).

3°. Para la representación gráfica de los campos magnéticos se emplea el concepto de líneas de inducción magnética. Se llaman *líneas de inducción magnética (líneas de fuerza del campo magnético)* las trazadas en el campo magnético de tal forma que el vector \mathbf{B} , en cada línea de fuerza, esté dirigido según la tangente a ella. El sentido del vector \mathbf{B} y de las líneas de inducción del campo magnético se determina por la *regla de Maxwell (regla del sacacorchos)*: si el sacacorchos (de rosca a derechas) se atorilla siguiendo el sentido del vector densidad de la corriente en

el conductor (III.7.2.3°), el sentido en que se mueve la manilla indica el de las líneas de inducción magnética y del vector inducción.

Las líneas de inducción del campo magnético no se interrumpen en ningún punto, es decir, ni empiezan ni terminan. Estas líneas son cerradas, o van del infinito al infinito, o se arrollan infinitamente sobre una superficie, llenándola por todas partes, pero sin retornar nunca a un punto cualquiera de la misma. Este último caso se observa, por ejemplo, en el campo que genera un sistema constituido por una corriente circular y otra directa infinita que pasa por el centro de la primera y es perpendicular al plano de aquélla.

Un campo magnético se dice que es *uniforme* u *homogéneo* (*campo magnético uniforme*) si el vector \mathbf{B} es constante en todos sus puntos. En caso contrario el campo es *no uniforme* o *no homogéneo* (*campo magnético no uniforme*).

4°. La fuerza con que el campo magnético actúa sobre los conductores con corriente que se encuentran en él, se conoce con el nombre de *fuerza de Ampère*.

Ley de Ampère: la fuerza elemental dF que actúa sobre el elemento de longitud dl de un conductor con corriente situado en un campo magnético, es directamente proporcional a la intensidad de la corriente que pasa por el conductor y al producto vectorial del elemento de longitud dl por la inducción magnética \mathbf{B} :

$$dF = I [dlB] \quad (\text{en el SI}),$$

$$dF = \frac{I}{c} [dlB] \quad (\text{en el sistema de Gauss, IX}).$$

Aquí dl es un vector de módulo dl cuyo sentido coincide con el del vector densidad de la corriente \mathbf{j} en el conductor (III.7.2.3°).

La fuerza de Ampère F que actúa en el campo magnético sobre un conductor con corriente y de longitud finita constituye

$$F = \int I [dlB],$$

donde la integración se extiende a toda la longitud del conductor. En el caso de un campo magnético uniforme (p. 3°),

$$F = IBl \sin \alpha \quad (\text{en el SI}),$$

$$F = \frac{I}{c} Bl \sin \alpha \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

siendo α el ángulo entre el vector densidad de la corriente en el conductor y el vector B . En la fig. III.10.1 se muestra la disposición mutua de los vectores dF , B y dl . Si $dl \perp B$, el sentido de la fuerza dF se halla por la *regla de la mano izquierda*: si se dispone la mano izquierda abierta, con el pulgar separado y los cuatro dedos juntos, de modo que el vector inducción magnética entre por la palma normalmente y los cuatro dedos señalen el sentido de la corriente eléctrica, el pulgar indicará el sentido de la fuerza que actúa sobre el conductor con corriente que se encuentra en el campo magnético. En la fig. III.10.1 se puede ver que el vector dF está dirigido perpendicularmente al plano que pasa por los vectores dl y B , de manera que, desde el extremo de dF , el giro más corto desde el vector dl hasta el vector B se verá que se realiza en sentido contrario al de las agujas del reloj. En otras palabras, el sentido del vector dF coincide con el del producto vectorial $[dlB]$.

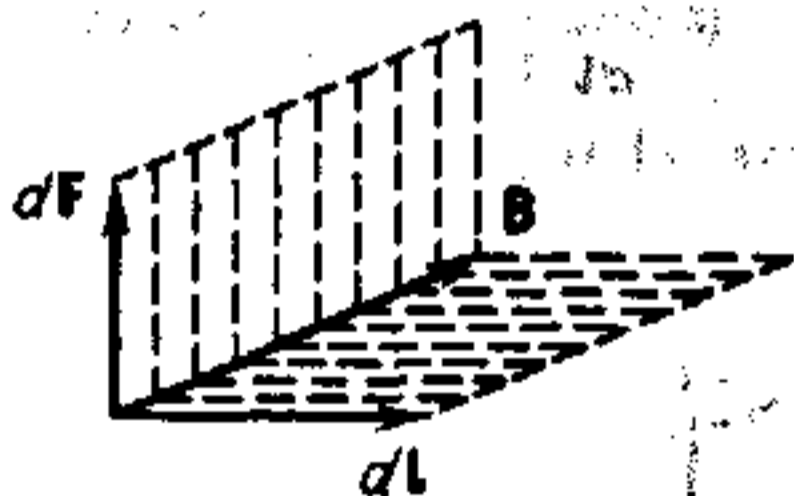


Fig. III.10.1.

5°. De la ley de Ampère se deduce que el vector de inducción magnética en el SI es numéricamente igual al límite de la relación entre la fuerza que ejerce el campo magnético sobre un elemento del conductor con corriente eléctrica, y el producto de la intensidad de la corriente por dicho elemento, cuando la longitud de éste tiende a cero y el elemento está situado en el campo de tal modo que el límite antedicho adquiere el valor máximo:

$$B = \frac{1}{I} \left(\frac{dF}{dl} \right)_{\text{máx}}$$

En el sistema de unidades de Gauss (IX), $B = \frac{c}{I} \left(\frac{dF}{dl} \right)_{\text{máx}}$ donde c es la constante electrodinámica (IX).

6°. La fuerza de Ampère no es central (I.3.3.4°), a diferencia de las fuerzas electrostáticas (III.1.2.2°). Esta fuerza es perpendicular a las líneas de inducción magnética y a los conductores con corriente.

§ III.10.2. Ley de Biot—Savart—Laplace

1°. La ley de Biot — Savart — Laplace define la inducción magnética en un punto cualquiera del campo magnético generado por la corriente eléctrica continua que pasa por un conductor cuya forma puede ser la que se quiera. El vector $d\mathbf{B}$ de la inducción magnética en un punto cualquiera C del campo magnético generado por un elemento del conductor de longitud $d\mathbf{l}$ y con corriente I , se calcula por la fórmula

$$d\mathbf{B} = k\mu \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l}\mathbf{r}],$$

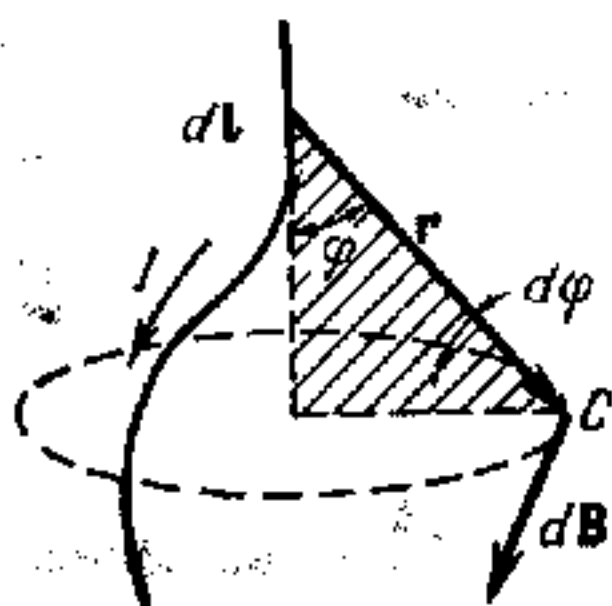


Fig. III.10.2.

en la que $d\mathbf{l}$ es el vector de la longitud elemental del conductor (III.10.1.4°); \mathbf{r} , el radio vector trazado desde el elemento del conductor $d\mathbf{l}$ hasta el punto C (fig. III.10.2); r , el módulo del radio vector \mathbf{r} ; k , un coeficiente que sólo depende del sistema de unidades de medida que se elija; y μ , una magnitud adimensional que caracteriza las propiedades magnéticas del medio, denominada *permeabilidad magnética relativa del medio*. La permeabilidad

μ no depende de las unidades de medida que se elijan, y para el vacío es igual a la unidad. Para todas las sustancias, excepto las ferromagnéticas, μ difiere poco de la unidad (III.13.5.1°). La definición general de μ puede verse en el III.13.4.5°.

2°. En el sistema internacional de unidades SI, $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$, donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m es la *constante magnética* (IX). En el sistema de unidades de Gauss, $k = \frac{1}{c}$, siendo $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s la constante electrodinámica (IX).

La ley de Biot — Savart — Laplace en el SI tiene la forma

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l}\mathbf{r}].$$

Esta forma de escribir la ley de Biot — Savart — Laplace y todas las ecuaciones del campo electromagnético, se llama *racionalizada*.

Al producto $\mu_0\mu$ se le da a veces el nombre de *permeabilidad magnética absoluta del medio*.

En el sistema gaussiano de unidades, $d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{I}{r^2} [d\mathbf{l}r]$. El módulo dB del vector $d\mathbf{B}$ es

$$dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{I dl \sin(\widehat{dlr})}{r^2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$dB = \frac{\mu}{c} \frac{I dl \sin(\widehat{dlr})}{r^2} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

3°. Se denomina *intensidad del campo magnético H* la característica vectorial del campo magnético que, para un medio homogéneo isótropo, se relaciona con \mathbf{B} del modo siguiente:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

La relación universal entre los vectores \mathbf{B} y \mathbf{H} para el campo magnético en un medio arbitrario, así como una definición más general del vector intensidad \mathbf{H} , se dan en III.13.4.4°.

La intensidad del campo magnético de una corriente eléctrica en un medio homogéneo isótropo no depende de las propiedades magnéticas de éste:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^2} [d\mathbf{l}r], \quad dH = \frac{I dl \sin(\widehat{dlr})}{4\pi r^2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{cr^2} [d\mathbf{l}r], \quad dH = \frac{I dl \sin(\widehat{dlr})}{cr^2} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

4°. De la comparación de las características vectoriales de los campos eléctrico (\mathbf{E} y \mathbf{D}) y magnético (\mathbf{B} y \mathbf{H}) se deduce que el vector intensidad del campo eléctrico \mathbf{E} es análogo al vector inducción \mathbf{B} del campo magnético. Tanto el uno como el otro determinan la acción de la fuerza de los campos y dependen de las propiedades del medio en el cual se generan esos campos.

El vector \mathbf{H} de intensidad del campo magnético es análogo al vector \mathbf{D} de desplazamiento eléctrico (III.2.3.1°).

5°. Una carga eléctrica q , moviéndose en un medio homogéneo e isótropo ilimitado con velocidad v , engendra un campo magnético cuya inducción B_q se calcula por la fórmula

$$B_q = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{q}{r^3} [vr], \quad B_q = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{qv \operatorname{sen}(\widehat{vr})}{r^2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B_q = \frac{\mu}{c} \frac{q}{r^3} [vr], \quad B_q = \frac{\mu}{c} \frac{qv \operatorname{sen}(\widehat{vr})}{r^2} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

en la que r es el radio vector trazado desde la carga en movimiento hasta el punto considerado A del campo. Los vectores B_q y H_q están dirigidos perpendicularmente al plano que pasa por los vectores v y r .

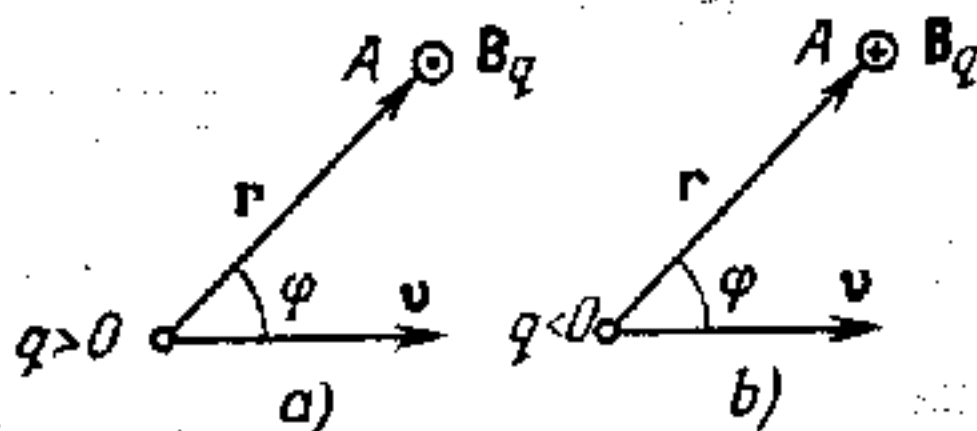


Fig. III.10.3.

Si $q > 0$, desde el extremo del vector B_q (y H_q), el giro más corto desde v hasta r se verá que se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. III.10.3, a). Si $q < 0$, B_q (y H_q) estará dirigido en sentido contrario (fig. III.10.3, b). El campo magnético de una carga en movimiento es variable, ya que al moverse la carga q , incluso en el caso en que $v = \text{const}$, el radio vector r cambia de módulo y de dirección. El campo mag-

nético de una carga móvil dependiente del ángulo \widehat{vr} no tiene simetría esférica, como en el caso del campo electrostático de una carga puntual (III.1.2.3°). Este campo magnético posee simetría especular respecto de la dirección de v : es máximo en los puntos del plano que pasa por la carga, y es perpendicular al vector v (a condición de que $v \ll c$). En todos los puntos del campo, situados en la recta que coincide con el vector v , no existe campo magnético.

§ III.10.3. Algunos casos simples de campo magnético generado por corrientes continuas

1°. Valiéndose de la ley de Biot — Savart — Laplace se pueden hallar las características del campo magnético (**B** y **H**) de la corriente eléctrica que pasa por un conductor de dimensiones finitas y forma arbitraria. Por el principio de superposición de los campos (III.2.2.2°), la inducción magnética **B** en un punto cualquiera del campo magnético de un conductor con corriente *I* constituye

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B},$$

donde *dB* es la inducción magnética del campo engendrado por un elemento del conductor de longitud *dl*. La integral se extiende a toda la longitud del conductor *L*.

2°. Un conductor rectilíneo *NM* con corriente *I* genera en un punto cualquiera *A* un campo magnético de inducción **B** e intensidad **H***):

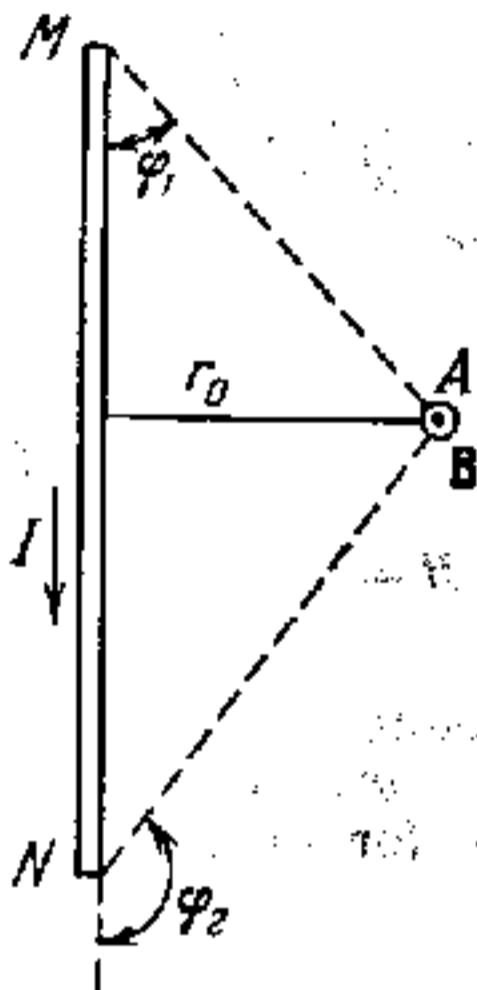


Fig. III.10.4.

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \quad H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{1}{c} \mu \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \quad H = \frac{B}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde *r*₀ es la distancia desde el punto *A* hasta el conductor; φ_1 y φ_2 son los ángulos que forman los radios vectores trazados desde los extremos inicial y final del conductor hasta el punto *A* (fig. III.10.4); μ , la permeabilidad magnética relativa del medio; y μ_0 , la constante magnética en el SI (III.10.2.2°).

*) En todos los ejemplos del párrafo III.10.3 se supone que el medio es homogéneo e isótropo y ocupa todo el espacio donde se encuentra el campo magnético.

Para un conductor rectilíneo infinitamente largo, ($\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \pi$)

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{r_0}, \quad H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{1}{c} \mu \frac{2I}{r_0}, \quad H = \frac{B}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

3°. Campo magnético en el centro de un *conductor rectangular con corriente I*:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{8I \sqrt{a^2 + b^2}}{ab}, \quad H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{1}{c} \mu \frac{8I \sqrt{a^2 + b^2}}{ab}, \quad H = \frac{B}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde a y b son los lados del rectángulo.

4°. El momento magnético p_m de un contorno con corriente I , de forma arbitraria, constituye

$$p_m = I \int_S \mathbf{n} dS \quad (\text{en el SI}),$$

$$p_m = \frac{1}{c} I \int_S \mathbf{n} dS \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

siendo \mathbf{n} el vector unidad de la normal externa al elemento dS de la superficie S limitada por el contorno con corriente. En el caso de un contorno plano, la superficie S será plana y todas las normales tendrán el mismo sentido, por lo que

$$p_m = IS\mathbf{n}, \quad p_m = IS \quad (\text{en el SI}),$$

$$p_m = \frac{1}{c} IS\mathbf{n}, \quad p_m = \frac{1}{c} IS \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

El vector p_m está dirigido de tal modo que desde su extremo se ve la corriente pasar por el contorno en sentido contrario al de las agujas del reloj (fig. III.10.5).

5°. El campo magnético generado por una espira circular con corriente, en un punto cualquiera A del eje de esa espira

(fig. III.10.6) tendrá

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}}, \quad H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \mu \frac{2p_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}}, \quad H = \frac{B}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Aquí p_m es el momento magnético de la espira circular con corriente (p. 4°).

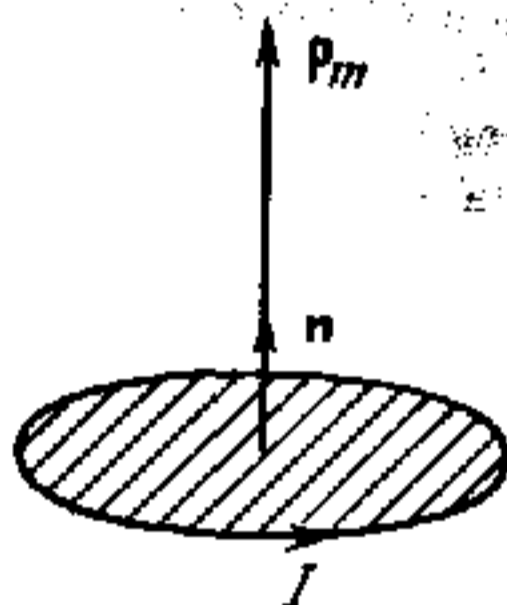


Fig. III.10.5.

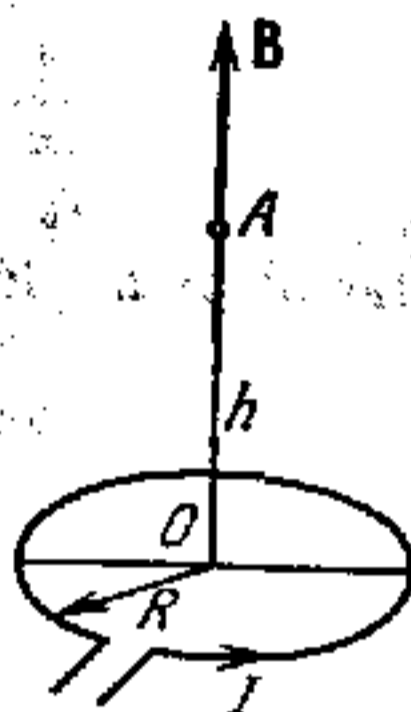


Fig. III.10.6.

Los módulos de los vectores B y H son

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \mu IS}{2\pi (R^2 + h^2)^{3/2}},$$

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{1}{c} \mu \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{1}{c} \mu \frac{2IS}{(R^2 + h^2)^{3/2}},$$

$$H = \frac{B}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss})$$

en los que h es la distancia desde el punto A hasta el centro de la espira; R , el radio de esta última; y S , su superficie.

6°. El campo magnético en el centro de la espira circular (p. 5°) tendrá

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3}, \quad H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \mu \frac{2p_m}{R^3}, \quad H = \frac{B}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Los módulos de B y H son

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}, \quad H = \frac{I}{2R} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{2\pi}{c} \mu \frac{I}{R}, \quad H = \frac{1}{c} \frac{2\pi I}{R} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

El campo magnético está dirigido según el eje de la espira y es perpendicular al plano de la misma (fig. III.10.6).

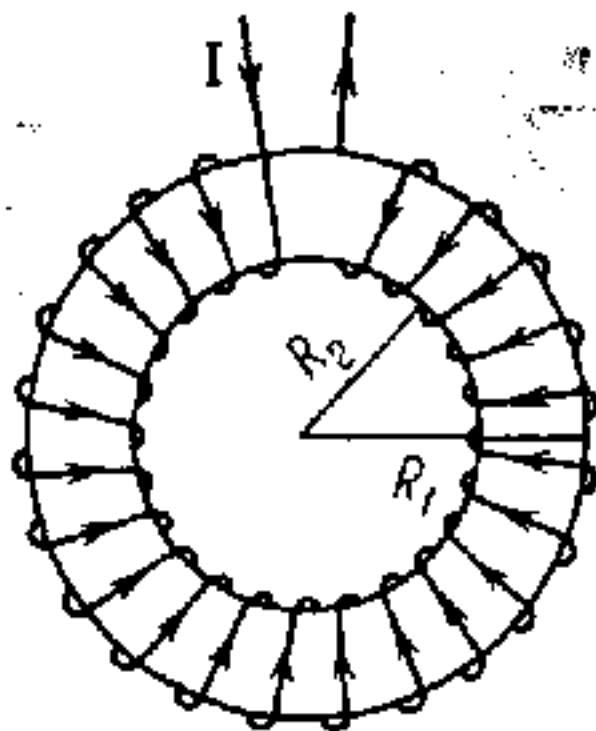


Fig. III.10.7.

7°. El toroide es una bobina anular cuyas espiras van enrolladas sobre un núcleo en forma de toro (fig. III.10.7). El campo magnético de un toroide está íntegramente localizado dentro de su volumen.

Las características del campo magnético del toroide se calculan por las fórmulas siguientes:

$$B = \mu_0 \mu \frac{NI}{2\pi r}, \quad H = \frac{NI}{2\pi r} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{1}{c} \mu \frac{2NI}{r}, \quad H = \frac{1}{c} \frac{2NI}{r} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

La inducción magnética B y la intensidad H del campo magnético en la línea axial del toroide constituyen

$$B_{\text{axial}} = \mu_0 \mu \frac{NI}{2\pi R_{\text{med}}} = \mu_0 \mu n I, \quad H = n I \quad (\text{en el SI}).$$

Aquí N es el número de espiras del toroide con corriente I ; r , el radio de cierta circunferencia trazada dentro del toro; $R_{\text{med}} = 1/2 (R_1 + R_2)$, siendo R_1 y R_2 , respectivamente, los radios externo e interno del toro; y n , el número de espiras por unidad de longitud de la línea axial del toroide.

8°. *Solenoides* es una bobina cilíndrica de gran número de espiras de conductor que forman una línea helicoidal. Si las espiras se tocan o están muy cerca unas de otras, el solenoide se considera como un sistema de corrientes circulares del mismo radio (unidas en serie), cuyo eje es común.

El momento magnético de un solenoide (p. 4°) es igual a la suma vectorial de los momentos magnéticos de sus N espiras:

$$\mathbf{p}_m = N I S \mathbf{n},$$

donde I es la intensidad de la corriente en las espiras del solenoide e ; S , el área de su sección transversal; y \mathbf{n} , el vector unidad de la normal a la superficie S . El vector \mathbf{p}_m está dirigido según el eje del solenoide, y su sentido coincide con el del campo magnético definido por la regla del sacacorchos (III.10.1.3°).

La inducción magnética B y la intensidad H del campo del solenoide en un punto arbitrario A que se encuentre en su eje, serán

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \quad H = \frac{B}{\mu_0 \mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{1}{c} 2\pi \mu n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \quad H = \frac{B}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde $n = \frac{N}{L}$ es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide; α_2 y α_1 , los ángulos bajo los cuales se ven desde el punto A los extremos del solenoide ($\alpha_2 < \alpha_1$),

$$\cos \alpha_1 = \frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{L - l_1}{\sqrt{R^2 + (L - l_1)^2}},$$

L es la longitud del solenoide (fig. III.10.8); y R , el radio de la bobina cilíndrica.

9°. Si $L \gg R$, en el campo magnético dentro del solenoide, en los puntos de su eje bastante alejados de los extremos, tendremos

$$B = \mu_0 \mu n I, \quad H = n I \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{1}{c} 4\pi \mu n I, \quad H = \frac{1}{c} 4\pi n I \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

La inducción magnética B y la intensidad H del campo magnético de un solenoide suficientemente largo, en los puntos de

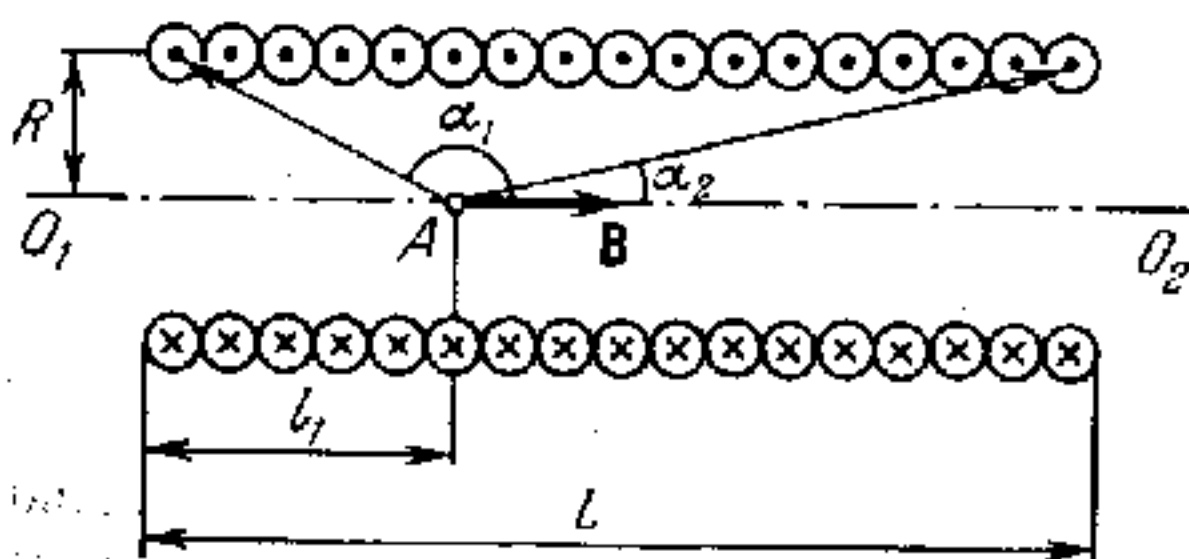


Fig. III.10.8.

su eje que coinciden con los extremos, son numéricamente iguales a

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} n I, \quad H = \frac{1}{2} n I \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{1}{c} 2\pi \mu n I, \quad H = \frac{1}{2} 2\pi n I \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

§ III.10.4. Interacción de conductores. Acción del campo magnético sobre los conductores con corriente

1°. La fuerza de Ampère (III.10.1.4°) que actúa sobre el trozo elemental de longitud dl de un conductor rectilíneo con corriente I_1 por parte de otro conductor rectilíneo largo con corriente I_2 , situado paralelamente al primero y a la distancia a

de él, es numéricamente igual a

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} dl \quad (\text{en el SI}),$$

$$dF = \frac{1}{c^2} \mu \frac{2I_1 I_2}{a} dl \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

donde μ_0 es la constante magnética en el SI (III.10.2.2°), y c , la constante electrodinámica (III.10.2.2°). La fuerza dF es la fuerza de la interacción magnética (III.11.1.4°).

Se supone que la longitud de los conductores es muchas veces mayor que la distancia a entre ellos, y que el elemento dl se halla lejos de los extremos del primer conductor. Se considera además que los conductores se encuentran en un medio homogéneo isótropo cuya permeabilidad magnética relativa es μ .

La fuerza F que actúa sobre un conductor con corriente, de longitud finita l , constituye

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} l \quad (\text{en el SI}),$$

$$F = \frac{1}{c^2} \mu \frac{2I_1 I_2}{a} l \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Los conductores cuyas corrientes I_1 e I_2 tienen el mismo sentido, se atraen, y los conductores cuyas corrientes tienen sentidos opuestos, se repelen entre sí (véase también III.11.1.4°).

2°. Un contorno conductor plano, cerrado, de forma geométrica arbitraria, con corriente, situado en un campo magnético homogéneo (III.10.1.2°), experimenta la acción del momento de rotación de las fuerzas \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}],$$

donde \mathbf{p}_m es el vector momento magnético del contorno con corriente (III.10.3.4°), y \mathbf{B} , el vector inducción magnética del campo (III.10.1.2°). El momento de rotación es perpendicular al plano formado por los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} , y su sentido es tal que desde el extremo \mathbf{M} se ve que el giro del vector \mathbf{p}_m hacia el vector \mathbf{B} según el ángulo menor, se realiza en sentido contrario al de las agujas del reloj. El momento de rotación tiende a poner el contorno en posición de equilibrio estable, en la cual los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{B} están orientados paralelamente entre sí.

Partiendo de la fórmula anterior se puede dar la definición de la inducción magnética B (III.10.1.2°): el módulo del vector

inducción magnética en un punto dado de un campo magnético uniforme es igual al valor máximo del momento de fuerzas $M_{\text{máx}}$ que actúa en los alrededores de este punto sobre un contorno plano, cerrado y pequeño, con corriente, que tenga el momento magnético de módulo unidad p_m :

$$B = \frac{M_{\text{máx}}}{p_m} = \frac{M_{\text{máx}}}{IS} \quad (\text{en el SI}),$$

$$B = \frac{M_{\text{máx}}}{p_m} = \frac{M_{\text{máx}}}{\frac{1}{c} IS} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

3°. Si un contorno cerrado (con corriente) se encuentra en un campo magnético no uniforme (III.10.1.3°), en el que la inducción B varía a distancias comparables con las dimensiones lineales del contorno, sobre este último actuará la fuerza F :

$$F = p_{mx} \frac{\partial B}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial B}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial B}{\partial z},$$

donde p_{mx} , p_{my} y p_{mz} son las proyecciones del vector p_m sobre los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas. En particular, si el vector B está dirigido según el eje OX y sólo depende de la coordenada x ($B_x = B(x)$, $B_y = B_z = 0$; $B = B_x i$), entonces

$$F = p_{mx} \frac{dB}{dx} i.$$

Por la acción de la fuerza F , el contorno con corriente, si no está sujeto, es arrastrado hacia la región en que el campo magnético es más intenso.

§ III.10.5. Ley de la corriente total. Circuitos magnéticos

1°. Se llama *circulación del vector B* de inducción magnética a lo largo de un contorno cerrado L , la integral de forma

$$\oint_L B dl = \oint_L B dl \cos(\widehat{B dl}),$$

en la que L es un contorno cerrado de forma arbitraria, y dl , el vector de longitud elemental del contorno tomado en el sentido de su recorrido.

2°. *Ley de la corriente total para un campo magnético en el vacío*: la circulación del vector inducción del campo magnético a lo largo de un contorno cerrado en el vacío es proporcional a la suma algebraica de las corrientes abarcadas por este contorno:

$$\oint_L \mathbf{B} \, dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_L \mathbf{B} \, dl = \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^n I_k \quad (\text{en sistema de Gauss}),$$

donde μ_0 es la constante magnética (en el SI) (III.10.2.2°); c , la constante electrodinámica (III.10.2.2°); y n , el número de conductores con corriente, abarcados por el contorno L de forma arbitraria. Esta ley es correcta para conductores con corriente de cualesquiera forma y dimensiones.

Al calcular la suma algebraica de las corrientes, una corriente se considera positiva si desde el extremo del vector densidad de corriente (III.7.2.3°) se ve que el recorrido del contorno L se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj. En caso contrario la corriente se considera negativa.

La generalización de la ley de la corriente total para el campo magnético \mathbf{B} en un medio cualquiera véase en III.13. 4.2°.

3°. A diferencia del campo de potencial electrostático, en el que la circulación de la intensidad \mathbf{E} a lo largo de cualquier contorno cerrado es igual a cero (III.3.1.4°), el campo magnético es *rotacional* (*campo magnético rotacional*). En este campo la circulación del vector \mathbf{B} de inducción del campo magnético a lo largo de un contorno cerrado es distinta de cero. Si el contorno L no abarca corrientes, la circulación del vector \mathbf{B} a lo largo de este contorno será igual a cero. Pero esto no varía el carácter rotacional del campo magnético.

4°. La ley de la corriente total, tanto para el vacío como para un medio arbitrario, se puede escribir en forma de circulación del vector intensidad \mathbf{H} (III.10.2.3°) a lo largo de cual-

quier contorno cerrado L que abarque las corrientes:

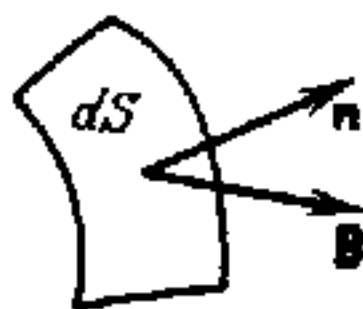
$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^n I_k \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^n I_k \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Si el contorno L no abarca corrientes, la circulación del vector \mathbf{H} a lo largo de él será igual a cero.

5°. Se da el nombre de *flujo del vector \mathbf{B} de inducción magnética (flujo magnético)* a través de una superficie pequeña de área dS , a la magnitud física escalar $d\Phi_m$:

$$d\Phi_m = \mathbf{B} d\mathbf{S} = B_n dS = B dS \cos(\mathbf{Bn}),$$



en la que $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$; \mathbf{n} es el vector unidad de la normal a dS ; y B_n , la proyección del vector B sobre la dirección de la normal (fig. III.10.9). El flujo magnético Φ_m a través de cualquier superficie S constituye

Fig. III.10.9.

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B_n dS.$$

Al calcular esta integral, los vectores \mathbf{n} de las normales a las áreas dS deben dirigirse a un mismo lado respecto de la superficie S . Así, si la superficie S es cerrada, los vectores \mathbf{n} deberán ser todos externos o todos internos.

Si el campo es uniforme y S es una superficie plana situada perpendicularmente al vector \mathbf{B} , entonces $B_n = B = \text{const}$ y $\Phi_m = BS$.

6°. *Teorema de Ostrogradski — Gauss para el campo magnético*: el flujo magnético a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a cero:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_S B_n dS = 0.$$

Este teorema es la expresión matemática de que en la naturaleza no existen cargas magnéticas en las cuales comiencen o terminen las líneas de inducción magnética (III.10.1.3°).

La forma diferencial del teorema de Ostrogradski — Gauss para el campo magnético es una de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético (III.14.4.2°).

7°. Se llama *circuito magnético* el conjunto de cuerpos o zonas del espacio donde ha sido localizado el campo magnético. Por ejemplo, la parte interior de un toroide (III.10.3.6°) y de un solenoide de longitud infinita (II.10.3.7°) son circuitos magnéticos. Para intensificar el campo magnético se utilizan circuitos magnéticos hechos de materiales con gran permeabilidad magnética relativa μ (III.10.2.1°), por ejemplo, de hierro. El cálculo de los circuitos magnéticos que constituyen una parte imprescindible de las máquinas eléctricas y de los dispositivos eléctricos del tipo de transformadores, electroimanes, etc., se basa en las leyes de estos circuitos.

8°. *Ley de Ohm para un circuito magnético cerrado (fórmula de Hopkinson):*

$$\Phi_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m},$$

donde Φ_m es el flujo magnético constante a lo largo de cada zona del circuito; $\mathcal{E}_m = IN$, la *fuerza magnetomotriz* (fmm) (*fuerza magnetizante*) (en el SI); N , el número de espiras de la corriente eléctrica I que magnetiza el circuito; y R_m , la *resistencia magnética o reluctancia total del circuito*. La reluctancia de un circuito magnético de la longitud l_i es

$$R_{mi} = \int_0^{l_i} \frac{dl}{\mu_0 \mu S} \quad (\text{en el SI}),$$

donde μ es la permeabilidad magnética relativa de un circuito dado; μ_0 , la constante magnética (en el SI) (III.10.2.2°); y S , el área de la sección transversal del circuito. Si $S = \text{const}$,

entonces $R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_0 \mu S}$ (en el SI).

9°. La reluctancia total R_m de los sectores del circuito magnético acoplados en serie constituye

$$R_m = \sum_{i=1}^n R_{mi},$$

donde R_{mi} es la reluctancia del i -ésimo sector del circuito magnético, y n , el número de sectores del circuito completo.

Si se acoplan paralelamente n reluctancias, la resistencia magnética total R_m del circuito será

$$R_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{mi}}}$$

10°. Se denomina *nudo* de circuito magnético la región del espacio o los cuerpos donde existen más de dos direcciones de las líneas de inducción magnética (III.10.1.3°).

Primera ley de Kirchhof para los circuitos magnéticos derivados (bifurcados): la suma algebraica de los flujos magnéticos de los sectores del circuito que concurren en un nudo es igual a cero:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{mi} = 0,$$

donde n es el número de sectores que concurren en el nudo (véase III. 8.3.1°).

El flujo magnético se considera positivo si las líneas de inducción confluyen en el nudo. Si estas líneas salen del nudo, el flujo Φ_{mi} se considera negativo.

11°. *Segunda ley de Kirchhof para los circuitos magnéticos*: en cualquier contorno cerrado elegido arbitrariamente en un circuito magnético derivado, la suma algebraica de los productos de los flujos magnéticos por las reluctancias de los correspondientes sectores del circuito (p. 8°), es igual a la suma algebraica de las fuerzas magnetomotrices aplicadas en este contorno (p. 8°):

$$\sum_{i=1}^k \Phi_{mi} R_{mi} = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_{mi},$$

siendo k el número de sectores que componen el circuito cerrado (compárese con III. 8.3.2°). Φ_{mi} y \mathcal{E}_{mi} se consideran positivos si los sentidos de sus respectivas líneas de inducción (III.10.1.3°) coinciden con el sentido, arbitrariamente elegido, del recorrido del contorno.

§ III.10.6. Trabajo de traslación de un conductor con corriente en un campo magnético

1°. Bajo la acción de la fuerza de Ampère (III.10.1.4°) se efectúa la traslación, en el campo magnético, de un conductor con corriente, no sujeto. El trabajo elemental δA^* realizado por la fuerza de Ampère al trasladar un conductor con corriente I , de longitud elemental dl , constituye

$$\delta A^* = I d\Phi_m^* \quad (\text{en el SI}),$$

$$\delta A^* = \frac{1}{c} I d\Phi_m^* \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde $d\Phi_m$ es el flujo magnético (III.10.5.5°) a través del área dS que barre el elemento del conductor, de longitud dl , durante su pequeña traslación; y c , la constante electrodinámica (III.10.2.2°).

2°. Cuando se desplaza un conductor de longitud finita, con corriente, el trabajo elemental δA de las fuerzas de Ampère es la suma de los trabajos elementales correspondientes a todos los trozos elementales del conductor. Este trabajo es igual a la integral de δA^* calculada con arreglo a la longitud l del conductor:

$$\delta A = \int_l I d\Phi_m^* = I \int_l d\Phi_m^* = I d\Phi_m \quad (\text{en el SI}),$$

$$\delta A = \frac{1}{c} I d\Phi_m \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde $d\Phi_m$ es el flujo magnético a través de la superficie que barre el conductor de longitud l durante su pequeña traslación.

3°. Si un conductor de longitud finita l , con corriente continua I , realiza una traslación finita, el trabajo de las fuerzas de Ampère en esta traslación será

$$A = I\Phi_m,$$

donde Φ_m es el flujo magnético a través de la superficie que barre el conductor al moverse.

4°. El trabajo que realizan las fuerzas de Ampère al trasladar en el campo magnético un contorno plano y cerrado, con corriente continua I , desde la posición inicial I hasta la posición

final 2, constituye

$$A_{12} = I (\Phi_{m2} - \Phi_{m1})$$

donde Φ_{m1} y Φ_{m2} son los flujos magnéticos «embragados al contorno» en las posiciones 1 y 2, es decir, los flujos magnéticos a través de la superficie que se extiende sobre el contorno. Al calcular estos flujos magnéticos, el sentido de la normal \mathbf{n} (III.10.5.8°) se toma de acuerdo con el sentido de la corriente en el contorno según la regla del sacacorchos: desde el extremo del vector de la normal, la corriente en el contorno debe verse pasar en sentido contrario al de las agujas del reloj.

5°. Si en un campo magnético se traslada, bajo la acción de las fuerzas de Ampère, una bobina de N espiras con corriente i , en general, un contorno de forma arbitraria, son correctas las fórmulas dadas anteriormente. Por ejemplo, durante una pequeña traslación de la bobina con corriente I , se efectuará el trabajo

$$\delta A = I \sum_{i=1}^N d\Phi_{mi} = I d \left(\sum_{i=1}^N \Phi_{mi} \right) = I d\Psi,$$

donde $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_{mi}$ es el *flujo magnético total* a través de las N

espiras de la bobina, llamado también *flujo «embragado» del contorno*.

6°. El trabajo de desplazamiento en un campo magnético de un conductor o un contorno cerrado con corriente continua, se realiza a expensas de la energía que se gasta en la fuente de corriente (III.8.1.3°).

Capítulo III.11. Movimiento de las partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético

§ III.11.1. Fuerza de Lorentz

1°. El campo magnético actúa no sólo sobre los conductores con corriente (III.10.1.4°), sino también sobre las partículas aisladas con carga que se mueven en él. La fuerza F_L , que actúa

sobre la carga eléctrica q que se mueve en el campo magnético con velocidad v , se llama *fuerza de Lorentz*:

$$F_L = q [vB] \quad (\text{en el SI}),$$

$$F_L = \frac{q}{c} [vB] \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde q es la magnitud algebraica de la carga en movimiento; B , la inducción magnética del campo en el cual se mueve la carga (III.10.1.2°); y c , la constante electrodinámica (III.10.2.2°).

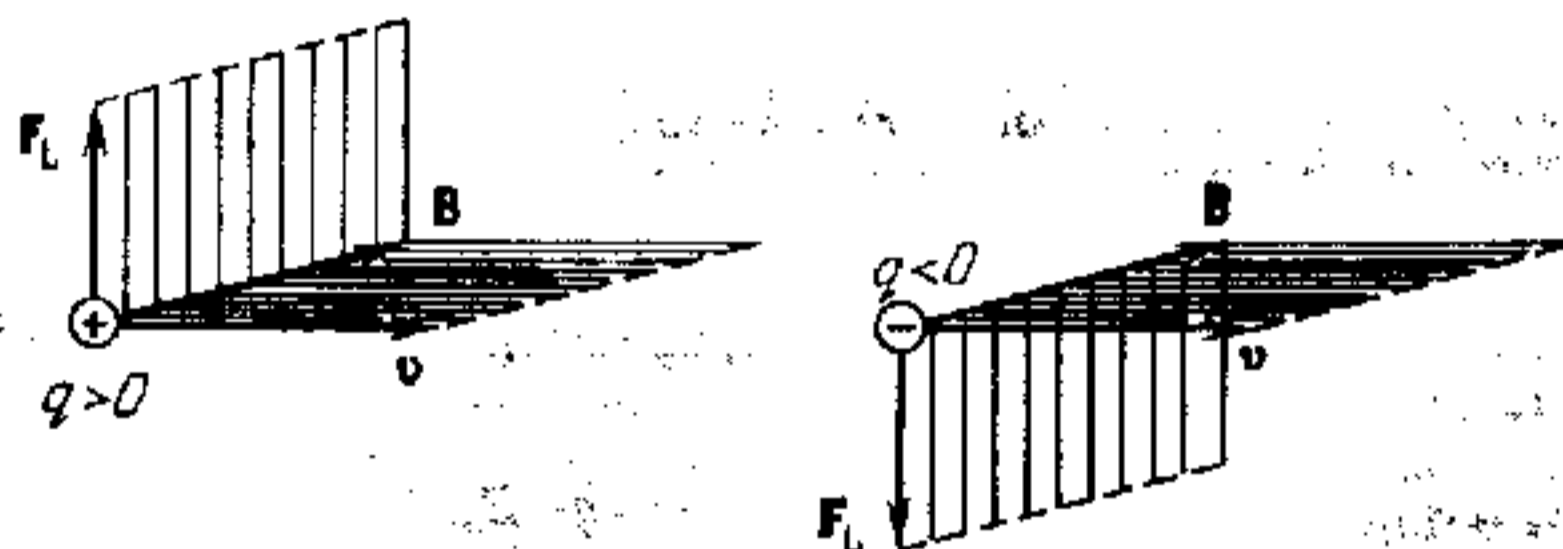


Fig. III.11.1.

La fig. III.11.1 ilustra la disposición mutua de los vectores v , B y F_L para una carga positiva ($q > 0$) y para una carga negativa ($q < 0$). El módulo de la fuerza de Lorentz es

$$F_L = qvB \operatorname{sen} \alpha,$$

donde $\alpha = vB$ es el ángulo entre los vectores v y B .

2°. La fuerza de Lorentz está siempre dirigida perpendicularmente a la velocidad de traslación de la partícula cargada y le comunica a ésta una aceleración normal (I.1.4.6°). Como la misma no provoca la variación del módulo de la velocidad, sino que sólo cambia su dirección, la fuerza de Lorentz no realiza trabajo, y la energía cinética de la partícula cargada no varía al moverse ésta en el campo magnético.

3°. Valiéndose de la fuerza de Lorentz se puede dar la siguiente definición de la inducción magnética B (III.10.1.2°): el módulo del vector inducción magnética en un punto dado de un campo magnético, es igual a la fuerza de Lorentz máxima $F_{L \text{ máx}}$ que actúa sobre una carga unitaria positiva que se mueve con velocidad unitaria en un punto dado:

$$B = \frac{F_{L \text{ máx}}}{qv}.$$

3.ª $F_L = F_{L \text{ máx}}$ a condición de que sea $\alpha = \pi/2$ (p. 2.º). Véase también (III.10.1.2.º) y (III.10.4.2.º).

4.º. La fuerza que ejerce sobre una carga móvil q_2 otra carga móvil q_1 , se llama *fuerza de interacción magnética* entre ellas (*fuerzas magnéticas*). Para el caso particular de dos cargas positivas q_1 y q_2 que se mueven en el vacío con velocidades $v_1 = v_2 = v \ll c$ iguales y dirigidas a lo largo del eje OX , la fuerza F_m de interacción magnética entre ellas es de atracción y numéricamente constituye

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} v^2 \quad (\text{en el SI}),$$

siendo r la distancia entre las cargas, y μ_0 , la constante magnética (III.10.2.2.º).

La fuerza F_m de interacción magnética se puede representar de la forma

$$F_m = q_2 v \frac{\mu_0 q_1 v}{4\pi r^2} = q_2 v B,$$

donde

$$B = \frac{\mu_0 q_1 v}{4\pi r^2}.$$

En esta forma, la fuerza F_m coincide con la de Lorentz cuando $\sin \alpha = 1$ (p. 1.º), si se considera que B es la inducción del campo magnético (III.10.1.2.º) generado por la carga móvil q_1 . Este campo actúa, a su vez, sobre la carga móvil q_2 . La causa de aparición de fuerzas magnéticas y de un campo magnético es el carácter que se deduce de las fórmulas de la teoría especial de la relatividad (I.5.1.1.º), de la transformación de las fuerzas al pasar de un sistema inercial de referencia en reposo a un sistema en movimiento.

Comparando la fuerza F_m con la fuerza de repulsión estática entre dos cargas q_1 y q_2 recíprocamente en reposo, que se hallan en el vacío ($\epsilon = 1$) a la misma distancia r (III.1.2.6.º),

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{en el SI})$$

(ϵ_0 es la constante eléctrica en el SI), es fácil encontrar que

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{v^2}{c^2},$$

donde c es la constante electrodinámica (III.10.2.2°) relacionada con ϵ_0 y μ_0 por la fórmula $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ (IX). Cuando la velocidad de las cargas es pequeña en comparación con la velocidad de la luz en el vacío ($v \ll c$), la interacción magnética entre las cargas en movimiento es mucho menor que su interacción electrostática. Pero en caso de que las cargas se muevan en un conductor eléctricamente neutro, y las fuerzas eléctricas estén compensadas (III.3.4.2°), quedará únicamente la interacción magnética. Esto explica la interacción magnética entre los conductores con corriente (III.10.4.1°). Aunque la fuerza de interacción magnética entre cada par de electrones es pequeña, el número de pares es tan grande, que la fuerza resultante de la interacción magnética de los conductores paralelos con corriente es bastante grande (III.10.4.1°).

5°. Si sobre una carga eléctrica móvil, además del campo magnético de inducción B , actúa un campo eléctrico de intensidad E (III.2.1.2°), la fuerza resultante F aplicada a la carga es igual a la suma vectorial de la fuerza $F_e = qE$ que ejerce sobre la carga el campo eléctrico, y la fuerza de Lorentz (p. 1°), será

$$F = qE + q [vB] \quad (\text{en el SI}),$$

$$F = qE + \frac{q}{c} [vB] \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Esta última expresión también recibe el nombre de fuerza de Lorentz y, a veces, *fuerza de Lorentz generalizada o fórmula de Lorentz*.

6°. En un campo magnético uniforme perpendicular a la velocidad de la partícula cargada, ésta, bajo la acción de la fuerza de Lorentz, se desplaza por una circunferencia de radio constante r . Dicha circunferencia se encuentra en un plano perpendicular al vector B , y la fuerza de Lorentz es centrípeta (I.2.4.3°). El radio de la circunferencia es

$$r = \frac{m}{|q|} \frac{v}{B} \quad (\text{en el SI}),$$

$$r = \frac{cmv}{|q| B} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde $|q|$ es la magnitud absoluta de la carga de la partícula; m , su masa; v , su velocidad; B , la inducción del campo magnético; y c , la constante electrodinámica (III.10.2.2°). Si la partícula se mueve en el plano del dibujo (fig. III.11.2), su desviación

en el campo dirigido perpendicularmente a su velocidad desde detrás de la figura, dependerá del signo de la carga. En esto se basa la determinación del signo de la carga de las partículas que se mueven en un campo magnético.

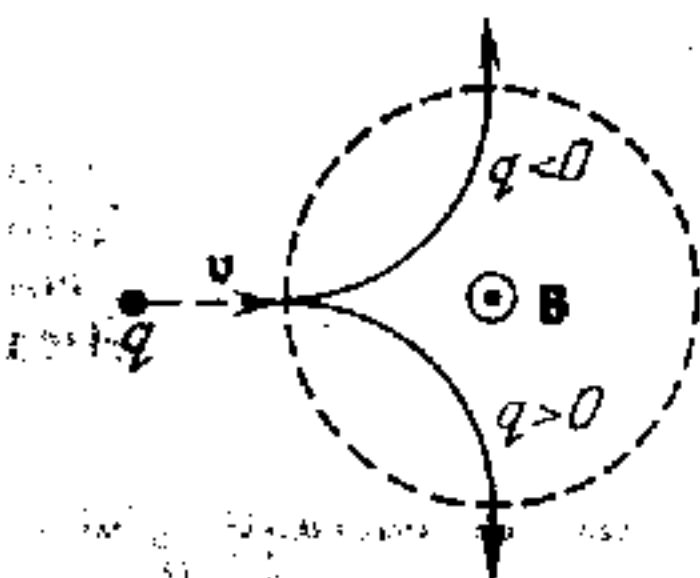


Fig. III.11.2.

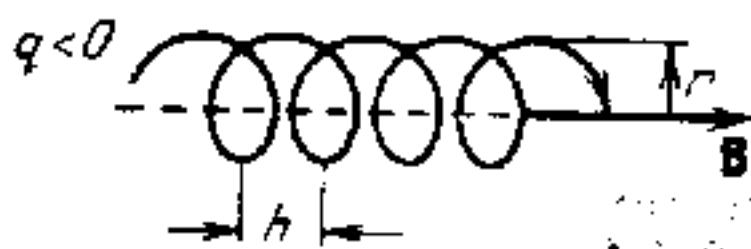


Fig. III.11.3.

El período de revolución T (I.1.5.5°) de una partícula cargada en un campo magnético uniforme (III.10.1.2°) no depende de su velocidad (para $v \gg c$):

$$T = \frac{2\pi}{B} \frac{m}{|q|} \quad (\text{en el SI}),$$

$$T = \frac{2\pi}{B} \frac{mc}{|q|} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Esto sirve de base para crear los aceleradores cíclicos de partículas cargadas (III.11.4.6°).

7°. Si el vector velocidad v de la partícula cargada forma un ángulo α con la dirección del vector B del campo magnético uniforme, la partícula se moverá siguiendo una línea helicoidal (fig. III.11.3). El radio r de la espira y el paso h de la hélice constituirán

$$r = \frac{m}{q} \frac{v \sin \alpha}{B}, \quad h = \frac{2\pi}{B} \frac{m}{|q|} v \cos \alpha \quad (\text{en el SI}),$$

$$r = \frac{mc}{|q|} \frac{v \sin \alpha}{B}, \quad h = \frac{2\pi}{B} \frac{mc}{|q|} v \cos \alpha \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Si el movimiento considerado tiene lugar en un campo no uniforme (III.10.1.2°) cuya inducción aumenta en dirección del movimiento de la partícula, r y h disminuirán al crecer B . En esto se basa el enfoque de las partículas cargadas en el campo magnético.

§ III.11.2. Efecto Hall

1°. El efecto Hall (fenómeno de Hall) consiste en que en un metal o semiconductor con corriente, situado en un campo magnético perpendicular al vector densidad de la corriente (III.7.2.3°), surge un campo eléctrico transversal y una diferencia de potencial. La causa del efecto Hall es la desviación que experimentan los electrones que se mueven en el campo magnético ba-

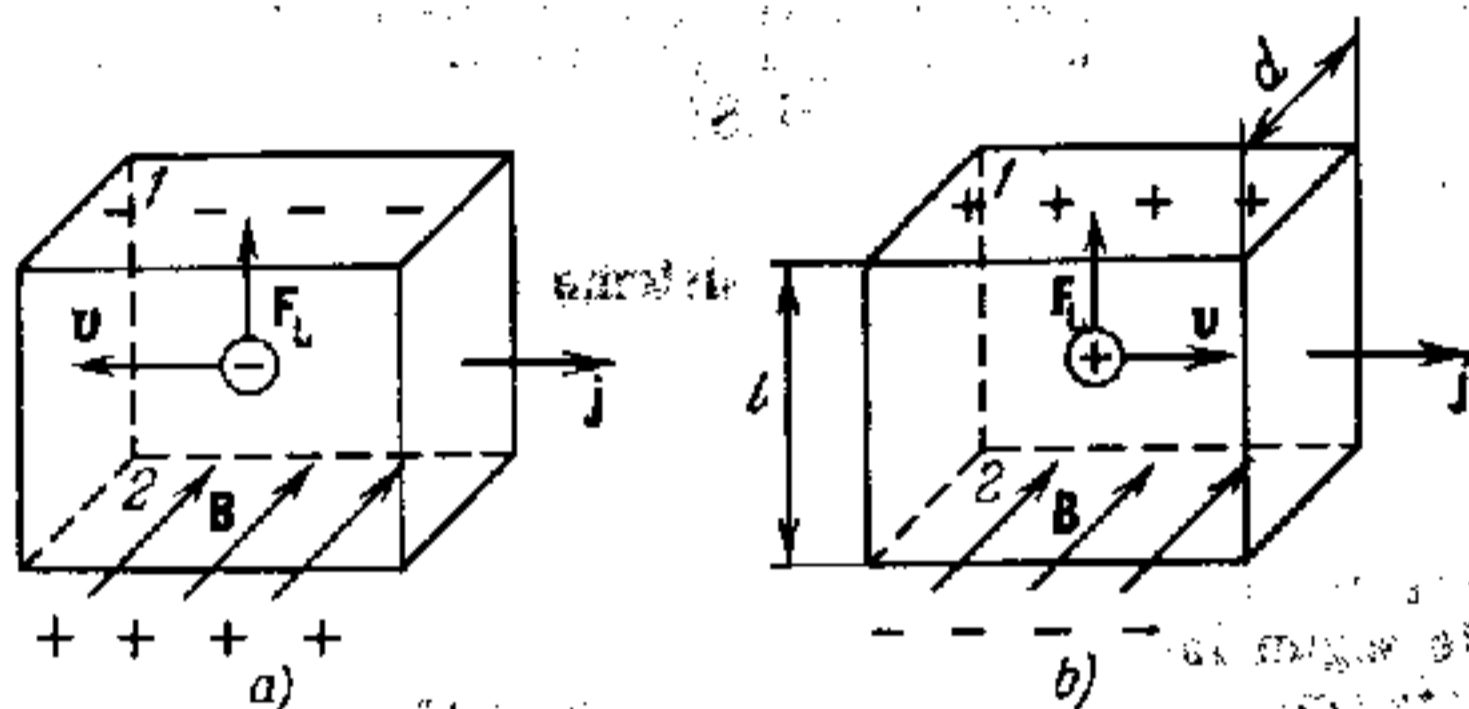


Fig. III.11.4.

jo la acción de la fuerza de Lorentz (III.11.1.1°). En la fig. III.11.4, *a* se indican las direcciones de la inducción magnética B , de la densidad de la corriente j , de la velocidad v de los electrones y de la fuerza de Lorentz F_L , así como los signos de las cargas concentradas en las caras opuestas superior e inferior, en el caso de un metal o de un semiconductor por exceso (VII.2.10.2°). En un semiconductor por defecto (VII.2.10.3°), los signos de las cargas que se concentran en las superficies son opuestos a los del caso anterior (fig. III.11.4, *b*). Las cargas siguen siendo desviadas por el campo magnético hasta que la acción de la fuerza en el campo eléctrico transversal equilibre la fuerza de Lorentz.

2°. La diferencia de potencial de equilibrio en el efecto Hall es

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = R \frac{IB}{d}$$

donde I es la intensidad de la corriente; B , la inducción del campo magnético (III.10.1.2°); d , la dimensión lineal del metal o

semiconductor en el sentido del vector B ; y R , la constante de Hall.

La intensidad E_H del campo eléctrico transversal en el efecto Hall es

$$E_H = R [Bj],$$

donde j es el vector densidad de la corriente.

3°. En el caso de metales y semiconductores extrínsecos (VII.2.10.5°), con un mismo tipo de conducción, la constante de Hall es:

$$R = \frac{A}{n_0 p} \quad (\text{en el SI}),$$

$$R = \frac{A}{cn_0 q} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde c es la constante electrodinámica (III.10.2.2°); q y n_0 , respectivamente, la carga y la concentración de portadores de corriente; y $A \approx 1$, un coeficiente adimensional dependiente del carácter de distribución estadística de los portadores de corriente según las velocidades. El signo de la constante de Hall coincide con el signo de la carga q de los portadores de corriente. La medición de la constante de Hall para un semiconductor permite formarse una idea acerca del carácter de su conducción eléctrica. Cuando el semiconductor es del tipo n (conducción por electrones) (VII.2.10.2°), $q = -e$ y $R < 0$; si el semiconductor es del tipo p (conducción por huecos) (VII.2.10.3°), $q = e$ y $R > 0$.

Si en un semiconductor se observan ambos tipos de conducción eléctrica, por el signo de la constante de Hall se puede determinar el tipo predominante en él. La fórmula para R del p. 3° no sirve en este caso y se aplican otras más complejas.

4°. La medición de la constante de Hall permite hallar la concentración de portadores de corriente n_0 si se conoce el tipo de conducción. Por ejemplo, para los metales monovalentes, la concentración de electrones de conducción es igual a la concentración de átomos. Esto significa que a cada átomo le corresponde un electrón libre en el gas electrónico del metal (III.7.3.1°). Conociendo la concentración de portadores de corriente, se puede también valorar la magnitud $\langle \lambda \rangle$ del recorrido libre medio del electrón en el metal. De la fórmula (III.7.3.4°)

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\gamma 2m \langle u \rangle}{n_0 e^2}$$

se obtiene $\langle \lambda \rangle \approx 10^{-9}$ m, que supera en dos órdenes la distancia entre los nodos del metal (véase también (III.7.3.7°) y (VII.2.5.5°)).

§ III.11.3. Carga específica de las partículas. Espectrometría de masas

1°. La característica de una partícula es su *carga específica*, es decir, la relación q/m entre la carga de la partícula y su masa. La determinación experimental de la carga específica se basa en el estudio de la desviación de las partículas bajo la acción

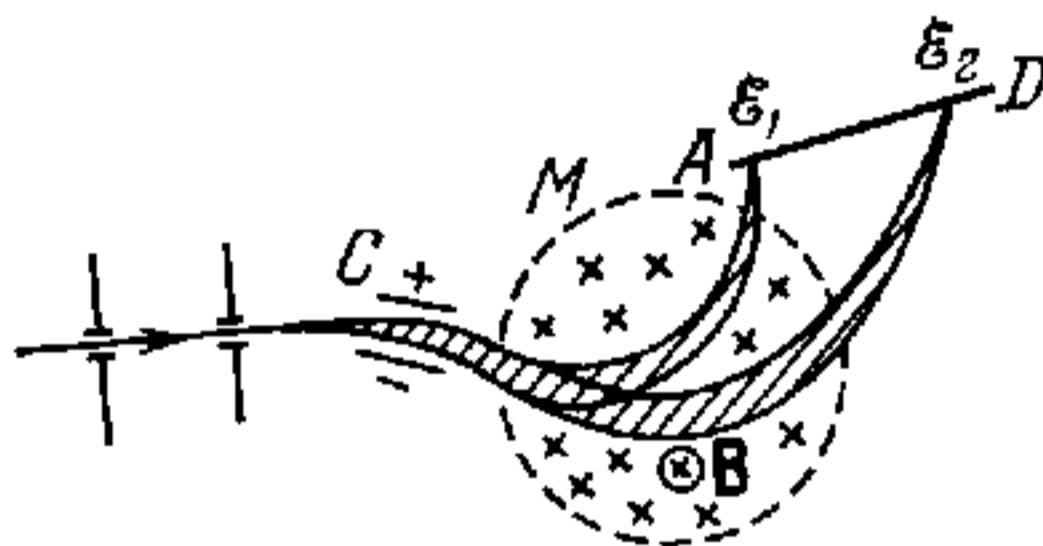


Fig. III.11.5.

conjunta de un campo eléctrico y un campo magnético. Conociendo la carga específica q/m y la carga q , se determina la masa de la partícula.

2°. Se denomina *espectro de masas* de las partículas el conjunto de valores de sus masas. En la *espectrometría de masas*, valiéndose de aparatos especiales (espectrógrafos y espectrómetros de masas), se mide con gran exactitud la concentración relativa de los isótopos de los elementos químicos (VIII.1.1.3°) y sus masas.

3°. En el *espectrógrafo de masas de Aston* (fig. III.11.5), con el cual fue descubierta la existencia de isótopos de diversos elementos químicos, se efectúa la desviación de las partículas cargadas en el campo eléctrico uniforme del condensador C y en el campo magnético de la bobina M , ambos perpendiculares entre sí. En el campo eléctrico, las partículas se desvían hacia las placas del condensador tanto más cuanto menor es su velocidad y mayor es la carga específica. En el campo magnético uniforme B , dirigido hacia detrás de la figura, las partículas se mueven

describiendo arcos de circunferencias (III.11.1.6°) de radio tanto mayor cuanto mayor es la velocidad de las partículas y menor es su carga específica. En el campo magnético, el haz de partículas se desdobra en varios haces, a cada uno de los cuales le corresponde un valor determinado de la carga específica. El campo magnético enfoca las partículas que tienen distintas velocidades, pero la misma magnitud q/m . La inducción B se elige de tal modo que las partículas cargadas se enfoquen sobre la placa fotográfica AD situada perpendicularmente al plano de la figura. La serie de rayas paralelas estrechas que se obtienen en la placa fotográfica corresponden a distintos valores de las cargas específicas de las partículas. En la fig. III.11.5, la raya \mathcal{E}_1 corresponde a las partículas con cargas específicas mayores, y la \mathcal{E}_2 , a las partículas con cargas específicas menores. Conociendo la carga específica de las partículas en la raya \mathcal{E}_1 , la distancia entre \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 y los parámetros de la instalación, se puede hallar la carga específica de las partículas correspondientes a la raya \mathcal{E}_2 .

Sustituyendo los condensadores planos por cilíndricos y utilizando electroimanes especiales, que proporcionan un haz plano paralelo de partículas que irrumpen en el campo magnético, se efectúa el *doble enfoque* de éstas por energías y direcciones. Con esto, si es suficiente la intensidad de las rayas en las placas fotográficas, se consigue una elevada exactitud en la medición de las masas. Por ejemplo, las masas de los iones de los elementos ligeros se miden con una exactitud de hasta el $10^{-4}\%$.

4°. Para determinar la concentración relativa de isótopos de elementos químicos en sus mezclas naturales, se utilizan *espectrómetros de masas*, aparatos que registran eléctricamente las corrientes iónicas. En los espectrómetros de masas se emplean haces de iones con energías cinéticas semejantes según su magnitud, o sea, haces monocromáticos (monoenergéticos) generados por fuentes iónicas de estructura especial. Estos haces, incluso si son muy divergentes y contienen gran cantidad de iones, se enfocan bien en el campo magnético transversal. Con esto se logra elevar la exactitud de medición de las concentraciones de distintos isótopos.

§ III.11.4. Aceleradores de partículas cargadas

1°. Las instalaciones especiales para obtener, en condiciones de laboratorio, haces dirigidos de partículas cargadas (electrones, protones, núcleos atómicos o iones de elementos químicos)

con gran energía cinética, se llaman *aceleradores*. Por la forma de la trayectoria y el mecanismo de aceleración de las partículas, los aceleradores se dividen en *lineales*, *cíclicos* y *de inducción*. En los aceleradores lineales, las trayectorias de las partículas son casi líneas rectas; en los aceleradores cíclicos y de inducción, las trayectorias son circunferencias o espirales que se desenrollan.

2°. El aumento de la energía de las partículas que se aceleran se realiza mediante la acción del campo eléctrico del acelerador. En dependencia del tipo de este último, el campo puede ser electrostático (III.2.1.2°), inducido (III.12.1.2°) o alternativo de alta frecuencia. La estructura de un betatrón, cuya acción se basa en el campo magnético inducido, se expone en III.14.2.3°. En el *acelerador electrostático lineal*, la partícula cargada pasa una sola vez por el campo eléctrico acelerador, de diferencia de potencial $(\varphi_1 - \varphi_2)$. Si q es la carga de la partícula, la energía que ésta adquiere en el acelerador (III.3.2.7°) constituirá

$$W = q (\varphi_1 - \varphi_2).$$

En este caso el campo eléctrico es engendrado, por ejemplo, por un *generador electrostático de Van de Graaf* de alta tensión, en el que se efectúa la reiterada comunicación de cargas a un conductor hueco (III.3.4.3°), debido a lo cual su potencial crece hasta magnitudes limitadas por la fuga de cargas del conductor.

3°. En los *aceleradores de resonancia lineales*, el aumento de la energía de las partículas cargadas se efectúa por la acción de un campo eléctrico alternativo, de frecuencia ultraalta, que varía sincronizadamente con el movimiento de las partículas. Valiéndose de un acelerador de este tipo, los electrones, después de recorrer varios kilómetros de distancia, se pueden acelerar hasta energías del orden de decenas de GeV.

4°. Para acelerar protones, deuterones y otras partículas cargadas, de mayor peso, se utilizan *aceleradores cíclicos de resonancia*, en los cuales la partícula pasa muchas veces por un campo eléctrico sincronizado con su movimiento y cada vez aumenta su energía. El control del movimiento de las partículas y de su retorno periódico al espacio en que actúa el campo eléctrico, se efectúa por medio de un fuerte campo magnético transversal. Las partículas pasan cada vez por puntos determinados del campo eléctrico alternativo, aproximadamente en una misma fase del campo (en «resonancia»).

5°. En el *ciclotrón*, que es el acelerador cíclico de resonancia más simple, entre las dos mitades de una caja cilíndrica MN , llamadas electrodos en D o simplemente «des», se genera un cam-

po eléctrico alternativo acelerador (fig. III.11.6). Las «des» se encuentran en una cámara cerrada, plana, situada entre los polos de un potente electroimán cuyo campo magnético es perpendicular al plano de la figura. El campo eléctrico alternativo es engendrado, en la ranura que queda entre los electrodos en D , por un generador eléctrico cuyos polos están unidos a los electrodos m y n .

6°. La aceleración de la partícula se realiza en el hueco entre las «des» M y N cada vez que ella, bajo la acción del campo magnético y describiendo en tiempos iguales (III.11.1.6°). semicircunferencias de radio cada vez mayor, vuelve a pasar por dicho

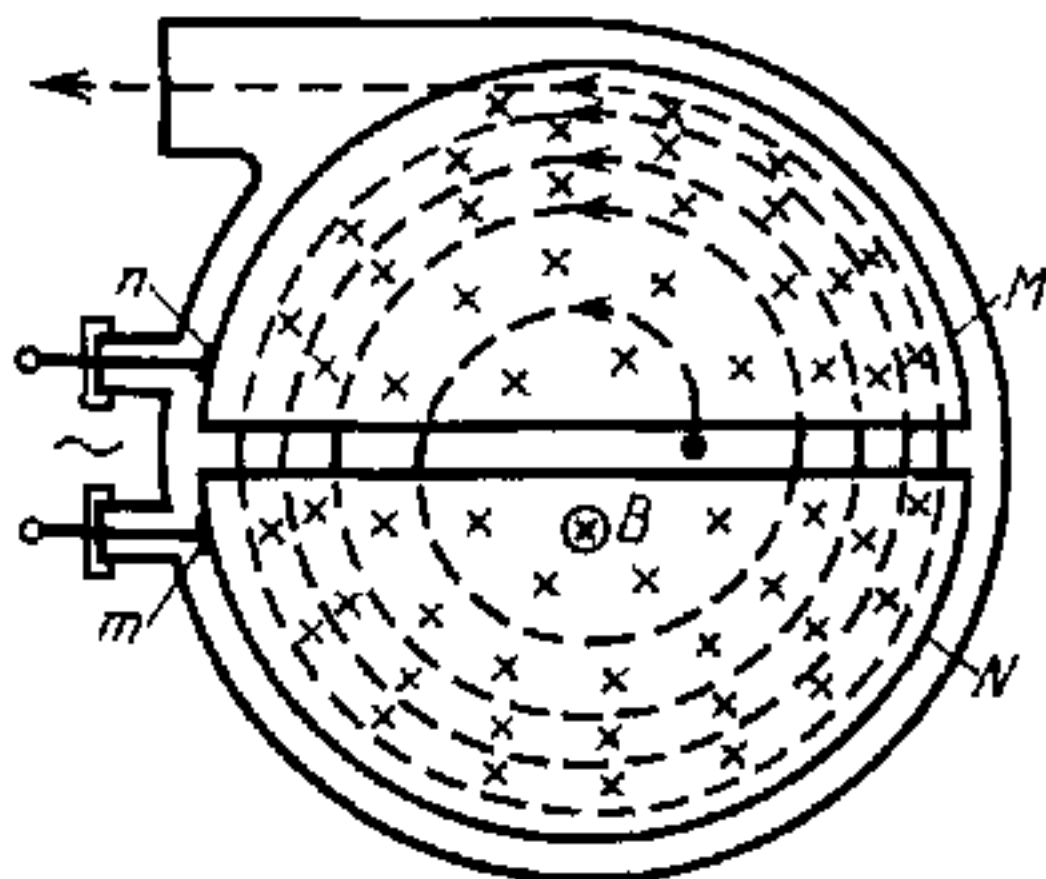


Fig. III.11.6.

hueco. Para que la partícula se acelere continuamente en el ciclotrón, es necesario que se cumpla la condición de sincronismo (condición de «resonancia») $T = T_0$, en la que T es el período de revolución de la partícula en el campo magnético (III.11.1.6°), y T_0 , el período de oscilación del campo eléctrico (IV.1.1.2°). Esta condición se infringe cuando la partícula se mueve con velocidades v relativistas, conmensurables con la velocidad c de la luz en el vacío. Con estas velocidades, la masa m de la partícula crece al aumentar la velocidad (I.5.6.1°), y lo mismo ocurre con el período T (III.11.1.6°).

7°. La posibilidad de acelerar las partículas cargadas que se mueven con velocidades relativistas en los aceleradores cíclicos, se deducen del principio de autoestabilización en fase: toda desviación del período T respecto al valor de resonancia

T_0 (p. 6°) acarrea una variación tal de la energía W de la partícula en cada aceleración, que T oscila alrededor del valor T_0 , permaneciendo, por término medio, igual a él:

$$T_0 \simeq T = \frac{2\pi}{B} \frac{m}{|q|} = \frac{2\pi}{B} \frac{W}{|q|c^2},$$

donde $W = mc^2$ (I.5.7.2°); $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (I.5.6.1°); m_0 es la masa en reposo de la partícula (I.5.6.1°); y c , la velocidad de la luz en el vacío. Las demás notaciones se indicaron en III.11.1.6°.

Por ejemplo, si como resultado del crecimiento de la masa m y del período T , la partícula se encontrara en el hueco entre las «des» (fig. III.11.6) bajo la acción de un campo eléctrico no acelerador, sino retardador, la disminución de su velocidad ocasionaría la disminución del período T y volvería a establecerse la igualdad $T = T_0$.

8°. Del principio de autoestabilización en fase (p. 7°) se deduce que si el aumento del período T_0 del campo eléctrico es bastante lento, aumentará respectivamente el período T de revolución de la partícula en el campo magnético del acelerador. Además crecerá la energía media (W) de todas las partículas, ya que, siendo constante la inducción del campo magnético, el aumento de T sólo será posible a expensas del aumento de la masa, que se produce al crecer la velocidad de las partículas.

Tal principio se ha realizado en el acelerador denominado *fasotrón* o *sincrociclotrón*. En éste, el campo magnético es continuo y la frecuencia $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ (IV.1.1.2°) del campo eléctrico

alternativo varía lentamente con el período $\tau \gg T_0$. A medida que crece la velocidad de las partículas, aumenta el radio de sus órbitas en el fasotrón (III.11.1.6°). Esto hace que sea necesario aumentar las dimensiones del fasotrón para poder alcanzar la máxima energía de las partículas cargadas. Así, el fasotrón acelerador de protones hasta energías de 680 MeV (que funciona en la URSS), tiene un electroimán cuya masa constituye $7 \cdot 10^3$ toneladas, y el diámetro de sus polos es de 6 m.

9°. El *sincrotrón* es un acelerador en el cual la frecuencia del campo eléctrico acelerador es constante, y la inducción B del campo magnético varía con el tiempo. El período de revolución de la partícula en el campo magnético del sincrotrón (p. 6°) es

$$T = \frac{2\pi}{|e|c^2} \frac{W}{B},$$

donde e es la carga del electrón, y W , su energía. La condición de sincronismo (p. 6°) en el sincrotrón se cumple cuando $T_0 = \text{const}$ y cuando la inducción del campo magnético crece proporcionalmente a la energía de la partícula:

$$B = \frac{2\pi}{|e|c^2} \frac{W}{T_0},$$

donde T_0 es el período del campo eléctrico acelerador de alta frecuencia.

En el sincrotrón se cumple la condición

$$\frac{m}{B} = \frac{eT_0}{2\pi} = \text{const.}$$

Las partículas se mueven por órbitas aproximadamente circulares (III.11.1.6°), por lo que en el sincrotrón se utilizan electroimanes anulares que generan campos magnéticos en una zona relativamente estrecha, próxima a la órbita circular.

10°. En el *sincrofasotrón*, que es el acelerador de protones más potente, se combinan los principios utilizados en el *fasotrón* (p. 8°) y en el sincrotrón (p. 9°). En este acelerador, simultáneamente y en concordancia, disminuye la frecuencia ν_0 del campo eléctrico acelerador y aumenta la inducción B del campo magnético. Además, los protones que se aceleran se mueven describiendo una órbita circular de radio constante. Por esto el campo magnético es generado por un electroimán anular lo mismo que en el sincrotrón.

11°. La condición para conseguir simultáneamente la estabilidad vertical (axial) y radial de la órbita circular calculada en el sincrotrón y en el *sincrofasotrón*, es que en las proximidades de dicha órbita, la inducción magnética B varíe según la ley

$$B = \frac{\text{const}}{r^n},$$

donde r es la distancia desde el centro de la órbita, y n varía dentro de los límites de $0 < n < 1$ (condición de *enfoque débil* en el acelerador). En los aceleradores con *enfoque débil*, para que aumente la energía máxima $W_{\text{máx}}$ que adquieren las partículas, hay que aumentar la masa del electroimán de un modo proporcional, aproximadamente en $W_{\text{máx}}^3$.

12°. El aumento de la energía máxima $W_{\text{máx}}$ de las partículas aceleradas en los sincrotrones y *sincrofasotrones* también se consigue utilizando aceleradores de *enfoque intenso* (fuerte).

En estos aceleradores, a lo largo de la órbita casi circular que describe la partícula, se sitúan alternativamente secciones magnéticas de dos tipos. En un tipo de secciones el campo magnético varía según la ley del p. 11°, donde n es mucho menor que cero (por ejemplo, $n = -100$), y en el otro tipo, $n \gg 1$. Las secciones del primer tipo aseguran el enfoque radial del haz de partículas aceleradas, y las secciones del segundo tipo, el enfoque vertical de dicho haz. El enfoque intenso permite disminuir considerablemente las dimensiones del acelerador, la masa del electroimán y el precio de toda la instalación.

13°. Para aumentar la porción de energía que emplean las partículas aceleradas en las diversas reacciones nucleares (VIII.1.9.1°), el bombardeo de blancos fijos con partículas de alta energía se sustituye por instalaciones en las cuales se utiliza el *método de choque de haces*. De las leyes de conservación de la energía (I.3.4.3°) y el impulso (I.2.7.1°) se deduce que, cuando se bombardea un blanco fijo, la porción de energía cinética W_c de la partícula incidente, que se aprovecha en la reacción nuclear, disminuye a medida que aumenta W_c . En el método de choque de haces disminuye el impulso total de las partículas después de la colisión y aumenta la fracción útil de energía de la partícula. Por ejemplo, supongamos que en un acelerador, los protones de los haces que chocan tienen una energía de 26 GeV cada uno. El impulso total de dos protones que choquen con velocidades iguales, pero de sentidos opuestos, es nulo. La energía de colisión de estos dos protones alcanza 50 GeV. Para obtener tal energía de choque bombardeando un blanco fijo de hidrógeno con un haz de protones, la energía de estos últimos debería ser del orden de 1400 GeV.

Capítulo III.12. Inducción electromagnética*

§ III.12.1. Ley fundamental de la inducción electromagnética

1°. El fenómeno de inducción electromagnética consiste en que en un contorno conductor que se halle en un campo magnético alternativo, se genera un *campo eléctrico inducido*. De medi-

*) En todas las fórmulas escritas en el sistema de unidades de Gauss, c es la constante electromagnética (III.10.2.2°).

da energética de este campo sirve la *fuerza electromotriz* \mathcal{E}_i de *inducción electromagnética*. Si el contorno es cerrado, por la acción del campo eléctrico inducido se produce en él la ordenación del movimiento de los electrones, es decir, una corriente eléctrica que se llama *corriente de inducción*.

2°. *Ley de la inducción electromagnética (ley de Faraday)*: la fem \mathcal{E}_i de inducción electromagnética de un contorno es proporcional a la velocidad de variación del flujo magnético Φ_m (III.10.5.5°) a través del área de la superficie limitada por este contorno:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Aquí no importa qué es lo que ocasiona la variación del flujo magnético: puede ser la deformación o el desplazamiento del contorno en un campo magnético externo o cualquier otra causa de la variación de ese campo en función del tiempo. Cuando un contorno conductor cerrado se traslada en un campo magnético, las fem \mathcal{E}_i se inducen en todos los sectores que cortan las líneas de inducción magnética del mismo. La suma algebraica de estas fem (p. 3°) es igual a la fem total del contorno. Para trasladar el contorno cerrado en el campo magnético hay que realizar un trabajo equivalente al de la corriente de inducción engendrada en el contorno.

Al calcular Φ_m y \mathcal{E}_i , los sentidos de recorrido del contorno (III.8.3.2°) y de la normal exterior n (III.10.5.5°, 8°) se coordinan de tal modo que desde el extremo del vector n se vea que el recorrido del contorno se efectúa en sentido contrario al de las agujas del reloj. Si el contorno cerrado consta de N espiras en serie (por ejemplo, un solenoide (III.10.3.7°)), en la ley de Faraday el flujo magnético Φ_m se sustituye por el flujo magnético total Ψ (III.10.6.5°):

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathcal{E}_i = - \frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

3°. La fem de inducción electromagnética en un contorno se considera positiva si el vector momento magnético p_m de la

corriente de inducción (III.10.3.4^o) que le corresponde forma un ángulo agudo con las líneas de inducción magnética del campo que induce esta corriente. En el caso contrario \mathcal{E}_i se considera negativa. En la fig. III.12.1, a la fem: $\mathcal{E}_i < 0$, y en el caso representado en la fig. III.12.1, b, $\mathcal{E}_i > 0$.

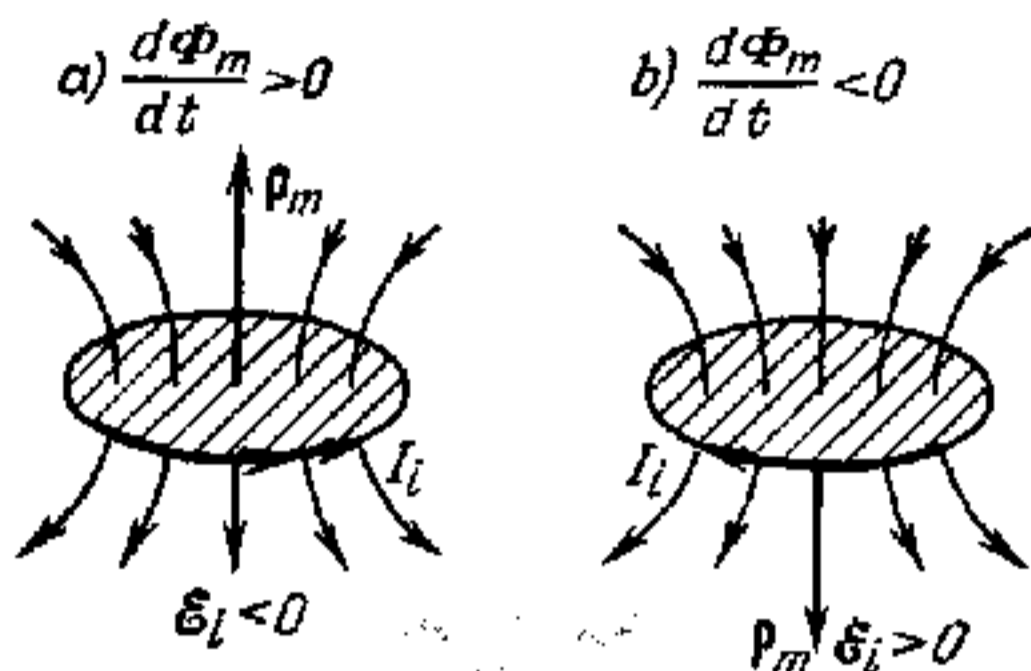


Fig. III.12.1.

4^o. El signo menos de la ley de inducción magnética se halla en correspondencia con la *ley de Lenz*: en toda variación del flujo magnético a través de una superficie limitada por un contorno cerrado, en este último surge una corriente de inducción

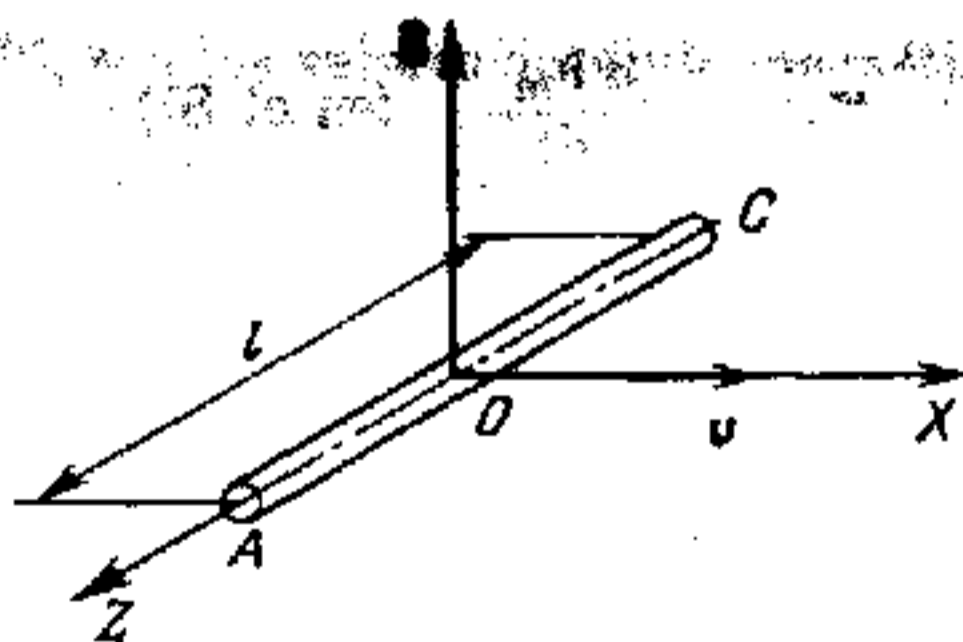


Fig. III.12.2.

cuya dirección es tal, que su propio campo magnético se opone a que varíe el flujo magnético que produce dicha corriente.

5^o. La fem de inducción electromagnética surge en el sector del conductor que al moverse corta las líneas de inducción del campo magnético (III.10.1.3^o). En el caso representado en la fig. III.12.2, sobre los electrones de conducción del metal

(III.7.3.1°) actúa la fuerza de Lorentz (III.11.1.1°): $F_L = -e[(v + v')B]$, en la que v es la velocidad con que se mueve el sector AC del conductor en el campo magnético, cuyo vector inducción B es perpendicular al plano que pasa por el sector del conductor y por su velocidad de traslación. Los electrones se mueven ordenadamente a lo largo del conductor, con velocidad v' , bajo la acción de la componente de la fuerza de Lorentz tangente al conductor y dirigida desde A hacia C . El movimiento de los electrones cesa cuando el campo electrostático que aparece en el conductor y que ejerce sobre los electrones la fuerza eE , compensa la acción de la fuerza de Lorentz.

Según la ley de Ohm para un circuito abierto (cuando $I = 0$) (III.8.2.5°), la diferencia de potencial de equilibrio $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C$ entre los puntos A y C , la cual se establece cuando $v' = 0$, constituye

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C = -\mathcal{E}_i,$$

donde \mathcal{E}_i es la fuerza electromotriz de inducción, puesto que en el sector AC no hay ninguna fuente de energía eléctrica.

La fem de inducción electromagnética en un trozo de conductor de longitud l que se mueva con velocidad v constituirá

$$\mathcal{E}_i = -Bvl,$$

o bien

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{en el SI}),$$

donde $\frac{d\Phi_m}{dt}$ es la relación entre el flujo magnético a través de la superficie que barre el conductor al moverse durante un intervalo infinitesimal de tiempo, y la magnitud dt de este intervalo, en otras palabras, la velocidad con que el conductor corta las líneas de inducción del campo magnético (compárese con (III.12.1.2°)).

6°. El fenómeno de inducción electromagnética en los conductores cerrados en reposo, que se encuentran en un campo magnético alternativo externo, no se puede explicar valiéndose de la fuerza de Lorentz, ya que ésta no actúa sobre las cargas en reposo (III.11.1.1°).

El fenómeno de inducción electromagnética en los conductores en reposo se explica por el hecho de que el campo magnético alternativo contribuye a que aparezca un campo eléctrico rotacional. La circulación de la tensión de este campo a lo largo del

contorno cerrado del conductor L (III.3.1.4°) es la fem de inducción magnética:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde la diferencial parcial $\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$ toma en consideración la variación del flujo magnético de inducción tan sólo en función del tiempo. Acerca de la elección del sentido de la normal \mathbf{n} al calcular el flujo magnético, véase el p. 2°.

7°. La magnitud q de la carga eléctrica que pasa a través de la sección transversal de la espira del conductor en que se induce la corriente constituye

$$q = \frac{\Phi'_m - \Phi''_m}{R} \quad (\text{en el SI}),$$

$$q = \frac{1}{c} \frac{\Phi'_m - \Phi''_m}{R} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde Φ'_m y Φ''_m son los valores del flujo magnético a través del área de la espira en sus posiciones inicial y final, y R , la resistencia eléctrica de dicha espira.

§ III.12.2. Fenómeno de autoinducción

1°. Se da el nombre de *fenómeno de autoinducción* al surgimiento de un campo eléctrico de inducción en un circuito, a consecuencia de la variación en él de la intensidad de la corriente. La característica energética del campo generado es la fem de autoinducción \mathcal{E}_a .

2°. Respectivamente, el campo magnético de la corriente que pasa por el circuito genera un flujo magnético Φ_{ma} a través de la superficie S limitada por el contorno con corriente,

$$\Phi_{ma} = \int_S \mathbf{B}_n \, dS,$$

donde B_n es la proyección del vector inducción B del campo magnético (III.10.1.2°) de la corriente sobre la normal n al elemento de superficie dS . La magnitud Φ_{ma} se llama *flujo magnético de autoinducción del contorno*. Aplicando la ley de Biot — Savart — Laplace (III.10.2.2°) se puede calcular Φ_{ma} para el caso en que el contorno se encuentre en un medio no ferromagnético (III.13.5.2°):

$$\Phi_{ma} = I \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint_L \frac{\mu}{r^3} [dlr]_n \quad (\text{en el SI}),$$

$$\Phi_{ma} = \frac{1}{c} I \int_S dS \oint_L \frac{\mu}{r^3} [dlr]_n \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

o bien

$$\Phi_{ma} = LI \quad (\text{en el SI}),$$

$$\Phi_{ma} = \frac{1}{c} LI \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde L se denomina *inductancia (inductancia estática)* del contorno y se determina por las fórmulas siguientes:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint_L \frac{\mu}{r^3} [dlr]_n \quad (\text{en el SI}),$$

$$L = \int_S dS \oint_L \frac{\mu}{r^3} [dlr]_n \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

En estas fórmulas μ_0 es la constante magnética en el SI (III.10.2.2°); μ , la permeabilidad magnética relativa del medio; r , el radio vector trazado desde el elemento dl del contorno hasta el elemento dS de la superficie S limitada por este contorno; y el subíndice n indica que es la proyección sobre la normal al elemento dS .

3°. La inductancia del contorno L equivale numéricamente al flujo de autoinducción cuando la intensidad de la corriente $I = 1 \text{ A}$ (en el SI); $I = c$ (en el sistema de unidades de Gauss). La inductancia L depende solamente de la forma geométrica y de las dimensiones del contorno, así como de las propiedades magnéticas del medio en que él se encuentre.

La inductancia de un solenoide bastante largo (III.4.3.7°) constituye

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} = \mu_0 \mu n^2 V \quad (\text{en el SI}),$$

$$L = \frac{\mu 4\pi N^2 S}{l} = \mu 4\pi n^2 V \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

4°. De la ley de Faraday (III.12.1.2°) se deduce la expresión de la fem de autoinducción:

$$\mathcal{E}_a = - \frac{d\Phi_{ma}}{dt} = - \frac{d}{dt} (LI) \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathcal{E}_a = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_{ma}}{dt} = - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (LI) \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Para un contorno indeformable que se halla en un medio no ferromagnético (III.13.5.2°), $L = \text{const}$, por lo que

$$\mathcal{E}_a = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathcal{E}_a = -\frac{L}{c} \frac{dI}{dt} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

5°. La fuerza electromotriz de autoinducción es la causa de que en el contorno surja *corriente de autoinducción* que, según la ley de Lenz (III.12.1.4°), se opone a que varíe la intensidad de la corriente principal en el circuito, frenando tanto su disminución como su aumento. La medida de la inercia del contorno respecto de la variación en él de la intensidad de la corriente es la inductancia de ese contorno (p. 3°).

6°. La ley de variación de la intensidad de la corriente eléctrica en un circuito al cerrarlo o abrirlo, es decir, con régimen transitorio, constituye

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

donde I_0 es la intensidad de la corriente en el instante inicial ($t = 0$); R , la resistencia eléctrica del circuito; L , su inductancia; y \mathcal{E} la suma algebraica de las fem de las fuentes de energía eléctrica intercaladas en el circuito (III.8.2.2°).

Al conectar la fuente de fem, en el circuito no hay corriente inicial ($I_0 = 0$):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

La intensidad de la corriente en el circuito aumenta desde cero hasta el valor de $\frac{\mathcal{E}}{R}$ correspondiente a la magnitud de la

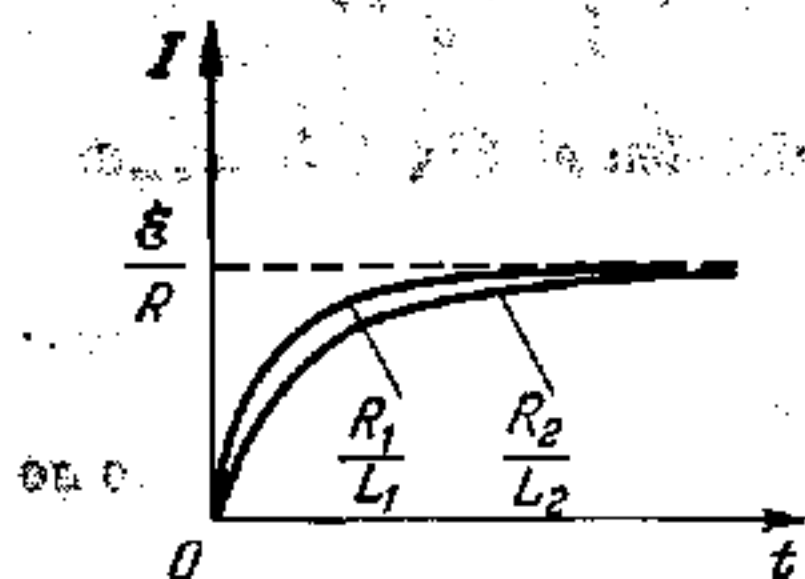


Fig. III.12.3.

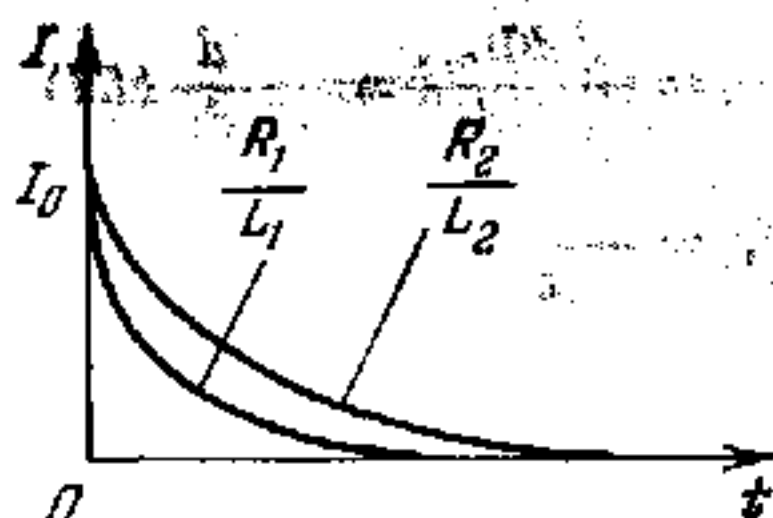


Fig. III.12.4.

intensidad de la corriente continua. Este aumento es tanto más rápido cuanto mayor es la relación $\frac{R}{L}$ (fig. III.12.3).

Al desconectar la fuente de fem, $\mathcal{E} = 0$:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

La intensidad de la corriente en el circuito disminuye exponencialmente desde su valor inicial I_0 , y esta disminución es tanto más rápida cuanto mayor es la relación $\frac{R}{L}$ (fig. III.12.4).

§ III.12.3. Inducción mutua

1°. Si cerca de un circuito de corriente alterna hay conductores, en ellos se generará una fem de inducción. En esto consiste el fenómeno de inducción mutua. Por lo tanto, si en el circuito 1 (fig. III.12.5) varía la intensidad de la corriente I_1 , en

el circuito 2 se generará una fem de autoinducción \mathcal{E}_{21} ,

$$\mathcal{E}_{21} = - \frac{d\Phi_{m21}}{dt} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathcal{E}_{21} = - \frac{d\Phi_{m21}}{dt} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde Φ_{m21} es el flujo magnético a través de la superficie del contorno del segundo circuito, debido al campo magnético de la corriente que pasa por el primer circuito (*flujo magnético de inducción mutua*).

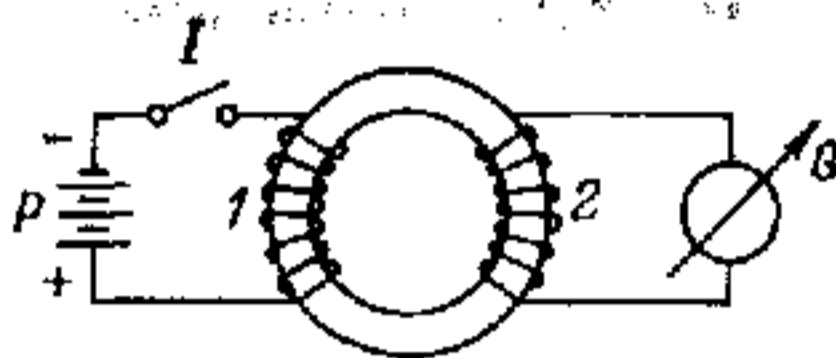


Fig. III.12.5.

2°. Por analogía con (III.12.2.2°), el flujo magnético Φ_{m21} es proporcional a la intensidad I_1 :

$$\Phi_{m21} = M_{21} I_1 \quad (\text{en el SI}),$$

$$\Phi_{m21} = \frac{1}{c} M_{21} I_1 \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde M_{21} recibe el nombre de *inductancia mutua* (*inductancia mutua estática*) de los contornos segundo y primero. La magnitud M_{21} depende de la forma, las dimensiones y la disposición mutua de ambos contornos, así como de la permeabilidad magnética relativa del medio en que se encuentran. El flujo magnético Φ_{m21} a través de la superficie del contorno del primer circuito, debido al campo magnético de la corriente I_2 que pasa por el segundo circuito, constituye

$$\Phi_{m12} = M_{12} I_2 \quad (\text{en el SI}),$$

$$\Phi_{m12} = \frac{1}{c} M_{12} I_2 \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

donde M_{12} es la inductancia mutua de los contornos primero y segundo.

Si los contornos se hallan en un medio no ferromagnético (III.13.5.2°), $M_{21} = M_{12}$. Para un medio ferromagnético, las inductancias mutuas M_{21} y M_{12} no son iguales entre sí y dependen de los factores antes enumerados y, además, de los valores de las intensidades de las corrientes en ambos contornos y del carácter de las variaciones de dichas corrientes.

3°. Las expresiones de la fem de inducción mutua, a condición de que $M_{21} = M_{12}$, son

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{1}{c^2} M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

$$\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{1}{c^2} M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Un ejemplo de inducción mutua es la acción del transformador que sirve para elevar o reducir la tensión de la corriente alterna.

§ III.12.4. Energía del campo magnético de la corriente eléctrica*

1°. Para crear corriente eléctrica en un contorno cerrado y aumentar su intensidad desde cero hasta I hay que realizar un trabajo A para vencer la fem de autoinducción que se opone al incremento de la corriente (III.12.2.6°),

$$A = \frac{\Phi_{ma} I}{2} = \frac{LI^2}{2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$A = \frac{1}{c} \frac{\Phi_{ma} I}{2} = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde Φ_{ma} es el flujo magnético de autoinducción del contorno (III.12.2.2°), y L , la inductancia de este último (III.12.2.2°).

*) En este párrafo se considera que los conductores con corriente se encuentran en un medio no ferromagnético uniforme e isótropo.

Según la ley de conservación de la energía, A determina la *energía intrínseca* W_m de la intensidad de la corriente I en el contorno:

$$W_m = \frac{LI^2}{2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$W_m = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

2°. Al mismo tiempo que la intensidad de la corriente, en el circuito también crece el campo magnético de ésta. Por esto la energía intrínseca de la corriente se considera como *energía del campo magnético*. Por ejemplo, para un solenoide largo (III.10.3.8°), cuyo campo magnético es uniforme (III.10.1.2°),

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n^2 I^2 V \quad (\text{en el SI}),$$

$$W_m = \frac{\mu}{c^2} 2\pi n^2 I^2 V \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

siendo V el volumen del solenoide; n , el número de espiras por unidad de longitud; μ_0 , la constante magnética (III.10.2.2°); y μ , la permeabilidad magnética relativa del medio.

3°. La *densidad volumétrica de la energía* w_m de un campo magnético es la energía de éste encerrada en la unidad de volumen del mismo.

$$w_m = \frac{dW_m}{dV}.$$

Para un campo magnético uniforme (III.10.1.3°), $w_m = \frac{W_m}{V}$.

La densidad volumétrica de cualquier campo magnético, incluso si no es uniforme, viene expresada por la fórmula

$$w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$w_m = \frac{BH}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \frac{B^2}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Aquí B y H son los módulos de los vectores inducción magnética (III.10.1.2°) e intensidad (III.10.2.3°) en el punto que se con-

sidera del campo magnético. Las demás notaciones véanse en el p. 2° :

4°. La energía W_m del campo magnético localizado en el volumen V constituye

$$W_m = \int_V \frac{BH}{2} dV \quad (\text{en el SI}),$$

$$W_m = \int_V \frac{BH}{8\pi} dV \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

5°. Si el campo magnético es generado por un sistema arbitrario de n contornos cuyas intensidades de la corriente son $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$, la energía de este campo se puede expresar por medio de la fórmula del p. 4°, en la cual B y H son los módulos de los vectores \mathbf{B} y \mathbf{H} del campo magnético resultante, de acuerdo con el principio de superposición de los campos (III.2.2.2°). Además, en este caso la energía del campo magnético se puede representar mediante la fórmula:

$$W_m = \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_{mk} I_k}{2} \quad (\text{en el SI})$$

$$W_m = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_{mk} I_k}{2} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde Φ_{mk} es el flujo magnético total «embragado» al k -ésimo contorno (III.10.6.5°). Al calcular este flujo, la normal \mathbf{n}_k , a la superficie que se extiende sobre el contorno, se traza de tal modo que desde el extremo del vector \mathbf{n}_k se vea que la corriente pasa por el contorno en sentido inverso al de las agujas del reloj. El flujo magnético

$$\Phi_{mk} = \Phi_{mka} + \Phi_{mkm},$$

donde Φ_{mka} es el flujo magnético de autoinducción del k -ésimo contorno (III.12.2.2°), y Φ_{mkm} , el flujo magnético de su inducción mutua originada por los campos magnéticos de todos los demás contornos con corriente (III.12.3.1°). De acuerdo con

esto, la energía del campo magnético W_m será

$$W_m = \sum_{k=1}^n \frac{I_k I_k^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1(l \neq k)}^n M_{kl} I_k I_l \quad (\text{en el SI}).$$

$$W_m = \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^n \frac{I_k I_k^2}{2} + \frac{1}{2c^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1(l \neq k)}^n M_{kl} I_k I_l \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

El primer término representa la suma de las energías intrínsecas de todas las corrientes (p. 1°). El segundo término se llama *energía mutua de las corrientes*. En él M_{kl} es la inductancia mutua de los contornos k -ésimo y l -ésimo (III.12.3.2°) cuyas respectivas corrientes son I_k e I_l .

Capítulo III.13. Materiales magnéticos en un campo magnético

§ III.13.1. Momentos magnéticos de los electrones y de los átomos

1°. Se llaman *magnéticos* los materiales capaces de adquirir, en un campo magnético externo, propiedades magnéticas, o sea, imanar y crear su propio campo magnético. Las propiedades magnéticas de una sustancia vienen determinadas por las de sus electrones y átomos*). Con arreglo a las propiedades magnéticas, los cuerpos magnéticos se dividen en tres grupos principales: diamagnéticos (III.13.3.1°), paramagnéticos (III.13.4.1°) y ferromagnéticos (III.13.6.1°).

2°. El movimiento de un electrón por su órbita en un átomo (VI.2.1.9°), equivale a cierto circuito cerrado con corriente (*corriente orbital*). De acuerdo con (III.10.3.4°), el momento

*) Las propiedades magnéticas de los núcleos atómicos se exponen en (VIII.1.1.6°).

magnético orbital del electrón \mathbf{p}_m constituye:

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{c} IS\mathbf{n} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

donde $I = ev$ es la intensidad de la corriente; e , la magnitud absoluta de la carga del electrón; v , el número de vueltas del electrón por la órbita en la unidad de tiempo; S , el área de la órbita del electrón; \mathbf{n} , el vector unidad de la normal a la superficie S ; y c , la constante electrodinámica (III.10.2.2°).

Un electrón que se mueve describiendo una órbita, posee momento de impulso orbital*) \mathbf{L}_e (I.4.1.4°). El momento magnético orbital es proporcional al momento de impulso orbital:

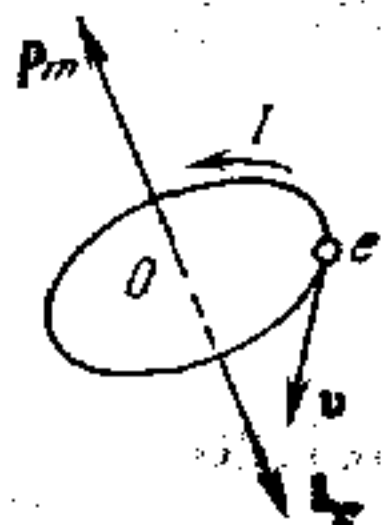


Fig. III.13.1.

$$\mathbf{p}_m = g\mathbf{L}_e,$$

donde

$$g = -\frac{e}{2m} \quad (\text{en el SI}),$$

$$g = -\frac{e}{2mc} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

La magnitud g se llama razón giromagnética de los momentos orbitales.

En las últimas fórmulas, m es la masa del electrón; e , la magnitud absoluta de su carga; y c , la constante electrodinámica (III.10.2.2°). Los vectores \mathbf{p}_m y \mathbf{L}_e tienen sentidos opuestos y son perpendiculares al plano de la órbita del electrón (fig. III.13.1).

3°. El electrón posee un momento de impulso propio \mathbf{L}_e **), llamado espín del electrón. La magnitud absoluta del espín del electrón es

$$L_{es} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar,$$

en la que h es la constante de Planck (IX), y $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Una peculiaridad importantísima del espín del electrón es la de tener solamente dos proyecciones sobre la dirección del

*) O momento cinético o angular propio (*N. del T.*).

***) También llamado momento cinético orbital y momento angular orbital (*N. del T.*).

vector B de inducción del campo magnético*):

$$L_{es}B = \pm \frac{\hbar}{2}.$$

4°. Al espín del electrón L_{es} le corresponde un momento magnético de espín P_{ms} , que es proporcional al espín y cuyo sentido es inverso al de éste:

$$P_{ms} = g_s L_{es}.$$

La magnitud g_s recibe el nombre de razón giromagnética de los momentos de espín:

$$g_s = -\frac{e}{m} \quad (\text{en el SI}),$$

$$g_s = -\frac{e}{mc} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

El significado de estas notaciones véase en el p. 2°.

La proyección del momento magnético de espín del electrón $P_{ms} B$ sobre la dirección del campo magnético (p. 3°) es

$$P_{ms} B = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm \mu_B \quad (\text{en el SI}),$$

$$P_{ms} B = \pm \frac{e\hbar}{2mc} = \pm \mu_B \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr, que es la unidad de medida de los momentos magnéticos (IX).

5°. Lo dicho en los pp. 1°—4° es correcto para cada uno de los Z electrones del átomo. El número Z coincide con el del orden que ocupa el elemento químico en el sistema periódico de Mendeléiev (VI.2.3.5°).

Se denomina momento magnético orbital P_m de un átomo, la suma vectorial de los momentos magnéticos orbitales p_m de todos sus electrones:

$$P_m = \sum_{i=1}^Z p_{mi}.$$

*) Independientemente de si este campo magnético es externo, creado, por ejemplo, por conductores con corriente, o es un campo magnético intrínseco de la misma substancia (III.13.4.2°).

Se da el nombre de *momento de impulso orbital* L de un átomo, a la suma vectorial de los momentos de impulso orbitales L_e de los Z electrones:

$$L = \sum_{i=1}^Z L_{ei}$$

Entre los momentos atómicos P_m y L existe la relación

$$P_m = gL,$$

en la que g es la razón giromagnética (p. 2°).

§ III.13.2. Atomo del campo magnético

1°. Si una substancia se encuentra en un campo magnético externo, dentro de los límites de un átomo se puede considerar que el campo magnético es uniforme (III.10.1.2°). Esto se deduce de la pequeñez de las dimensiones lineales del átomo. Su-

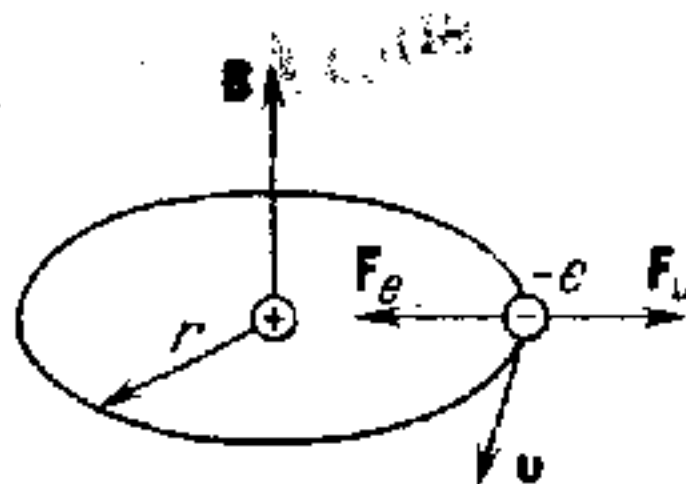


Fig. III.13.2.

pongamos que un electrón se mueve en el átomo describiendo una órbita circular cuyo plano es perpendicular al vector inducción B del campo magnético. La acción que ejerce sobre el electrón la fuerza de Lorentz F_L (III.11.1.1°) hace que disminuya la fuerza con que el electrón es atraído por el núcleo. La fuerza centrípeta (I.2.4.3°) resulta ser igual a la diferencia $F_e - F_L$, en la que F_e

es la fuerza de Coulomb (III.1.2.2°) con que el núcleo atrae el electrón (fig. III.13.2). Como resultado de esto varía la velocidad angular ω (I.1.5.3°) del movimiento del electrón por la órbita circular.

2°. La variación de la velocidad angular del movimiento del electrón se produce durante el proceso de crecimiento del campo magnético en que se introduce el átomo. El aumento del campo magnético que actúa sobre este último se efectúa en un tiempo finito. Con esto se produce un campo eléctrico rotacional inducido (III.12.1.1°) que actúa sobre el electrón en el átomo. La intensidad E de este campo está dirigida según la tangente a la

órbita del electrón, y la fuerza que actúa sobre el electrón es $F = eE$ (III.2.1.2°).

3°. Si la órbita del electrón está orientada arbitrariamente respecto al vector B , el momento magnético orbital p_m de ese electrón (III.13.1.2°) formará un ángulo α con la dirección del campo magnético (fig. III.13.3). En este caso la órbita experimentará cierta precesión alrededor de la dirección del vector B

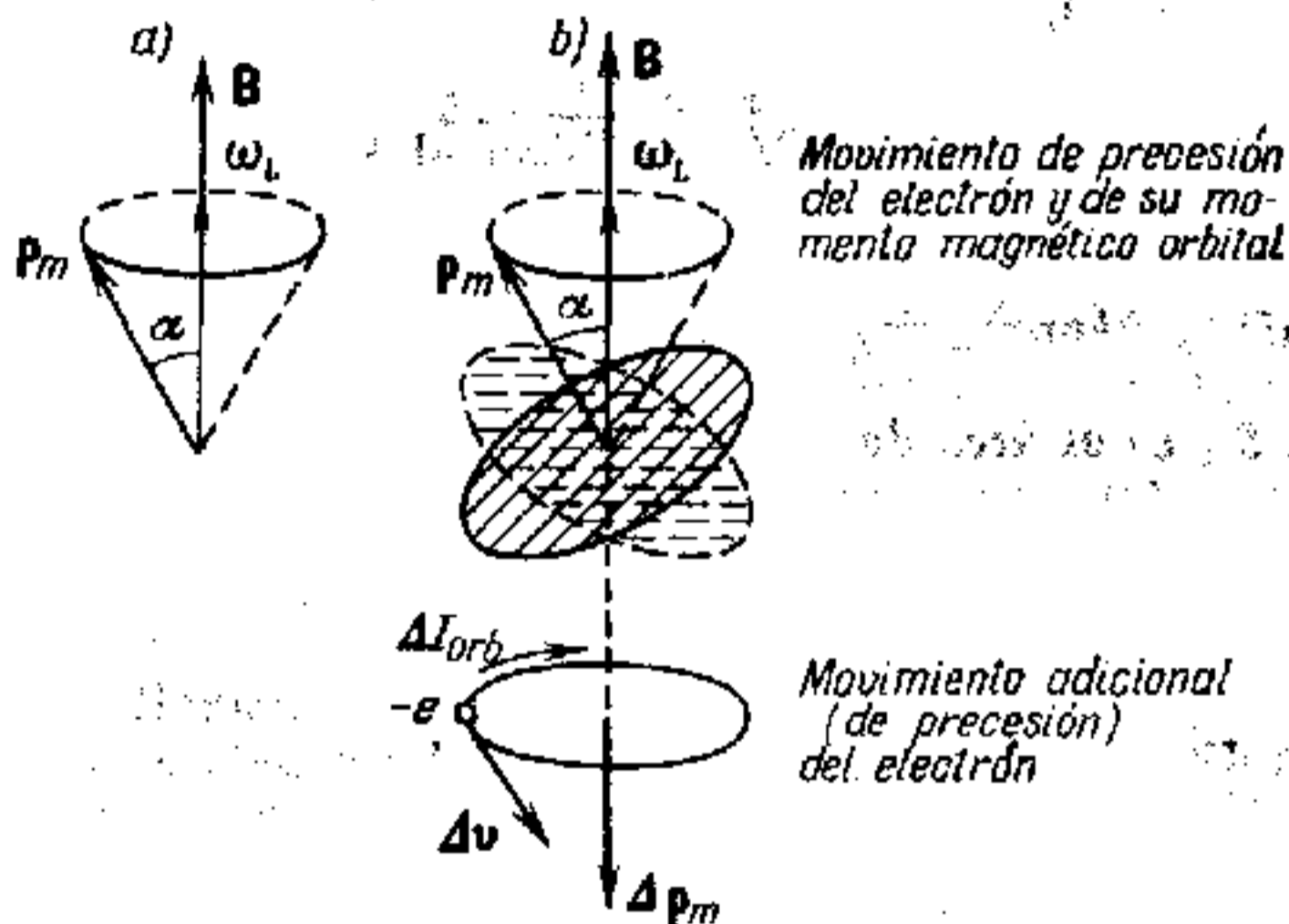


Fig. III.13.3.

(I.4.3.2°). Esto significa que el vector p_m , perpendicular al plano de la órbita, conservando invariable el ángulo α de inclinación respecto al campo, girará alrededor de la dirección de B con velocidad angular ω_L :

$$\omega_L = \frac{eB}{2m} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\omega_L = \frac{eH}{2mc} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Aquí e es la magnitud absoluta de la carga del electrón; m , su masa; H , la intensidad del campo magnético; c , la constante electrodinámica (III.10.2.2°); y ω_L recibe el nombre de *velocidad angular de precesión de Larmor*.

Teorema de Larmor: el único resultado de la influencia del campo magnético sobre la órbita del electrón en el átomo es la precesión de dicha órbita y del vector \mathbf{p}_m con velocidad angular ω_L alrededor del eje que pasa por el núcleo del átomo, y es paralelo al vector \mathbf{B} de inducción del campo magnético.

4°. El movimiento de precesión de la órbita hace que aparezca la corriente orbital adicional ΔI_{orb} (fig. III.13.3) y el momento magnético orbital inducido $\Delta \mathbf{p}_m$ (III.13.1.2°) correspondiente a ella, cuyo módulo es

$$\Delta p_m = \Delta I_{orb} S_{\perp} = \frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} B \quad (\text{en el SI}),$$

$$\Delta p_m = \frac{1}{c} \Delta I_{orb} S_{\perp} = \frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m c^2} B \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde S_{\perp} es el área de la proyección de la órbita del electrón sobre un plano perpendicular a la dirección del vector \mathbf{B} . El vector $\Delta \mathbf{p}_m$ está dirigido en sentido contrario al del vector inducción magnética \mathbf{B} :

$$\Delta \mathbf{p}_m = - \frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} \mathbf{B} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\Delta \mathbf{p}_m = - \frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m c^2} \mathbf{B} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

El significado de las notaciones véase en el p. 3°.

El momento orbital inducido total $\Delta \mathbf{P}_m$ del átomo (III.13.1.5°) constituye

$$\Delta \mathbf{P}_m = - \frac{e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m} \mathbf{B} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\Delta \mathbf{P}_m = - \frac{e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m c^2} \mathbf{B} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde Z es el número de electrones que tiene el átomo, y

$\langle S_{\perp} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^Z S_{\perp i}}{Z}$ es el área media de las proyecciones de las órbitas de los electrones del átomo sobre el plano perpendicular a la dirección del vector \mathbf{B} .

§ III.13.3. Diamagnéticos y paramagnéticos en un campo magnético uniforme

1°. La imanación o magnetización de una sustancia se caracteriza por el *vector magnetización (intensidad de magnetización)* \mathbf{J} , entendiéndose por éste la relación entre el momento magnético de un volumen pequeño ΔV de la sustancia y el valor de dicho volumen:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_{mi},$$

donde \mathbf{P}_{mi} es el momento magnético del i -ésimo átomo (o molécula), y N , el número total de átomos (o moléculas) que hay en el volumen pequeño ΔV . Dentro de los límites del volumen ΔV , el campo magnético se considera uniforme. Al mismo tiempo, en este volumen deberá haber un número bastante grande de partículas N ($N \gg 1$), para que tenga sentido el valor medio de las magnitudes físicas que caracterizan el sistema de dichas partículas.

2°. Se llaman *diamagnéticas* aquellas sustancias en las que los momentos magnéticos de los átomos (o moléculas), en ausencia de campo magnético externo, son iguales a cero. Esto significa que en los cuerpos diamagnéticos, la suma vectorial de los momentos magnéticos orbitales de todos los electrones del átomo es nula (III.13.1.5°), y que solamente en presencia de campo magnético existen momentos magnéticos inducidos (III.13.2.4°)

3°. En el volumen ΔV de un diamagnético isótropo, los momentos inducidos $\Delta \mathbf{P}_m$ de todos los átomos (o moléculas) son iguales y están dirigidos en sentido contrario al del vector \mathbf{B} (III.13.2.4°).

El vector magnetización

$$\mathbf{J} = \frac{N \Delta \mathbf{P}_m}{\Delta V} = n_0 \Delta \mathbf{P}_m,$$

o, teniendo en cuenta (III.13.2.4°):

$$\mathbf{J} = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m} \mathbf{B} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{J} = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m c^2} \mathbf{B} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

siendo n_0 el número de átomos (o moléculas) que hay en la unidad de volumen. El significado de las demás notaciones véase en III.13.2.3°. Llamando

$$\chi'_m = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle \mu_0}{4\pi m} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\chi'_m = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4mc^2} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

tenemos que

$$\mathbf{J} = \chi'_m \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{J} = \chi'_m \mathbf{B} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde χ'_m es una magnitud adimensional que caracteriza las propiedades magnéticas de los materiales magnéticos. Para todos los diamagnéticos $\chi'_m < 0$.

4°. Recibe el nombre de *susceptibilidad magnética* χ_m la magnitud entre cuyo valor y χ'_m existe la relación

$$1 + \chi_m = \frac{1}{1 - \chi'_m} \quad (\text{en el SI}),$$

$$1 + 4\pi\chi_m = \frac{1}{1 - 4\pi\chi'_m} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

De donde

$$\chi_m = \frac{\chi'_m}{1 - \chi'_m} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\chi_m = \frac{\chi'_m}{1 - 4\pi\chi'_m} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

En la práctica, para los diamagnéticos $\chi_m = \chi'_m$, ya que la magnitud absoluta de χ'_m es muy pequeña: $|\chi'_m| \approx 10^{-6}$.

5°. Se llaman *paramagnéticas* las sustancias en las cuales los átomos (o las moléculas), en ausencia de campo magnético externo, poseen cierto momento magnético \mathbf{P}_m permanente. Esto significa que la suma vectorial de los momentos magnéticos orbitales de todos los electrones del átomo (o molécula) es distinta de cero (III.13.1.5°).

6°. Cuando una sustancia paramagnética se introduce en un campo magnético uniforme (III.10.1.2°), los momentos mag-

néticos permanentes de los átomos (o moléculas) experimentan cierta precesión alrededor de la dirección del vector \mathbf{B} de inducción del campo magnético, con una velocidad angular de Larmor ω_L (III.13.2.3°).

El movimiento térmico y las colisiones entre los átomos (o moléculas) del cuerpo paramagnético contribuyen al amortiguamiento de la precesión de los momentos magnéticos, disminuyendo los ángulos entre las direcciones de los vectores de los momentos magnéticos y la dirección del vector \mathbf{B} . La acción conjunta de las colisiones interatómicas y el campo magnético hace que la orientación predominante de los momentos magnéticos de los átomos sea en sentido del campo externo. Aunque el momento magnético permanente \mathbf{P}_m de un átomo (o molécula) es de un orden de magnitud de 10^{-23} J/T (10^{-20} erg/Gs), los momentos magnéticos de todas las partículas en la unidad de volumen engendran una magnetización que supera mucho los fenómenos diamagnéticos (p. 3°). En una substancia paramagnética situada en un campo magnético externo existe un campo magnético propio dirigido a lo largo del campo magnético externo.

7°. En la teoría clásica del paramagnetismo, el módulo del vector magnetización (p. 4°) se expresa por medio de la fórmula

$$J = n_0 P_m L(a),$$

en la que n_0 es el número de átomos (o moléculas) que hay en la unidad de volumen, y $L(a)$, la función clásica de Langevin:

$$L(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a}.$$

El parámetro a tiene la forma $a = \frac{P_m B}{kT}$. Aquí B es la inducción del campo magnético; k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°); y T , la temperatura absoluta. A la temperatura ambiente y con campos externos no muy intensos, $a \ll 1$ y la función $L(a)$, después de desarrollarla en serie, se simplifica: $L(a) \approx \frac{a}{2}$.

Con esto el vector magnetización

$$\mathbf{J} = \chi'_m \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{J} = \chi'_m \mathbf{B} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde χ'_m se halla por la fórmula

$$\chi'_m = \frac{n_0 P_m^2 \mu_0}{3kT} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\chi'_m = \frac{n_0 P_m^2}{3kT} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

La magnitud χ'_m se relaciona con la susceptibilidad magnética χ_m por medio de las fórmulas del p. 4°. Los valores de la magnitud χ'_m para los cuerpos paramagnéticos son positivos y se encuentran entre los límites de 10^{-5} a 10^{-3} , por lo que $\chi'_m = \chi_m$ con alto grado de exactitud.

Ley de Curie: la susceptibilidad paramagnética de una sustancia es inversamente proporcional a la temperatura absoluta.

8°. En los campos magnéticos externos muy intensos se llega a la *saturación de imanación*: cuando $a \gg 1$, la función de Langevin $L(a) \rightarrow 1$. Esto quiere decir que los momentos magnéticos de todos los átomos (o moléculas) están orientados a lo largo del campo magnético externo y $J = n_0 P_m$.

§ III.13.4. Campo magnético de los cuerpos magnéticos

1°. En una sustancia se distinguen dos tipos de corrientes generadas por el campo magnético: las *macrocorrientes* y las *microcorrientes*. Se llaman *macrocorrientes* las corrientes de conducción (III.7.1.2°) y las de convección (III.7.1.2°). Las *microcorrientes* (*corrientes moleculares*) son las debidas al movimiento de los electrones dentro de los átomos, moléculas y iones.

El campo magnético de un cuerpo es la suma vectorial de dos campos (III.2.2.2°): el campo magnético externo generado por las macrocorrientes, y el campo *magnético intrínseco* o *campo magnético propio* generado por las microcorrientes. El vector inducción magnética B (III.10.1.2°) del campo magnético de la sustancia, caracteriza el campo magnético resultante y es igual a la suma geométrica de las inducciones magnéticas de los campos magnéticos externo B_0 e intrínseco B_{int} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{int}}.$$

Las fuentes primarias del campo magnético de los cuerpos magnéticos son las macrocorrientes. Sus campos magnéticos son

los que ocasionan la imanación de la substancia situada en el campo magnético externo.

2°. La ley de la corriente total para el campo magnético de una substancia es la generalización de la ley formulada en (III.10.5.2°):

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \mu_0 (I_{\text{macro}} + I_{\text{micro}}) \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (I_{\text{macro}} + I_{\text{micro}}) \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

donde I_{macro} e I_{micro} son las sumas algebraicas de las macro y microcorrientes a través de la superficie que se extiende sobre el circuito cerrado L .

3°. Entre la suma algebraica de las fuerzas de las microcorrientes y el vector magnetización existe la relación

$$I_{\text{micro}} = \oint_L \mathbf{J} \, d\mathbf{l} \quad (\text{en el SI}),$$

$$I_{\text{micro}} = c \oint_L \mathbf{J} \, d\mathbf{l} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde $\oint_L \mathbf{J} \, d\mathbf{l}$ es la circulación del vector magnetización \mathbf{J} (III.13.3.1°) a lo largo del circuito cerrado L que abarca las microcorrientes.

La ley de la corriente total (p. 2°) tiene en definitiva la forma

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) d\mathbf{l} = I_{\text{macro}} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_L (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}) \, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{macro}} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

4°. El vector

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \quad (\text{en el SI}).$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J} \quad (\text{en el sistema de Gauss})$$

se llama *intensidad del campo magnético* existente en un medio cualquiera (compárese con III.10.2.3°). La ley de la corriente total para el campo magnético en un medio arbitrario se escribe de forma idéntica a (III.10.5.4°):

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I_{\text{macro}} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{macro}} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

La circulación del vector intensidad del campo magnético a lo largo de un circuito cerrado arbitrario es igual (o proporcional) a la suma algebraica de las macrocorrientes que pasan a través de la superficie que se extiende sobre este circuito.

5°. Para un medio isótropo la relación entre los vectores inducción magnética \mathbf{B} y magnetización \mathbf{J} (III.13.4.3°) conduce al siguiente resultado para el vector \mathbf{H} (p. 4°):

$$\mathbf{H} = (1 - \chi'_m) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{H} = (1 - 4\pi\chi'_m) \mathbf{B} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Sustituyendo $(1 - \chi'_m)$ ó $(1 - 4\pi\chi'_m)$, basándose en (III.13.3.4°), tenemos:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde

$$\mu = 1 + \chi_m \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_F \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

La magnitud μ así introducida recibe el nombre de *permeabilidad magnética relativa de la substancia* (véase también III.10.2.1°). En estas fórmulas, χ_m es la susceptibilidad magnética (III.13.3.4°).

§ III.13.5. Ferromagnéticos

1°. Se llama *ferromagnéticos* los cuerpos en los cuales el campo magnético intrínseco (III.13.4.1°) es centenares y millares de veces mayor que el campo magnético externo que lo genera.

El ferromagnetismo se observa en los cristales de los metales de transición (VI.2.3.8°), tales como el hierro, el cobalto y el

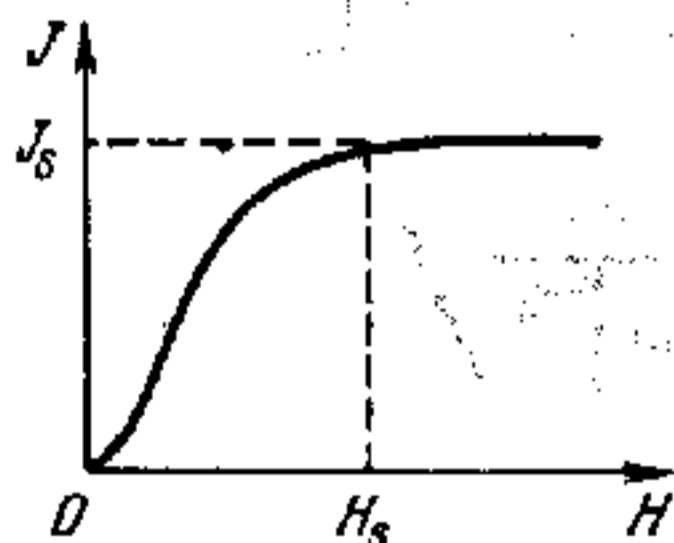


Fig. III.13.4.

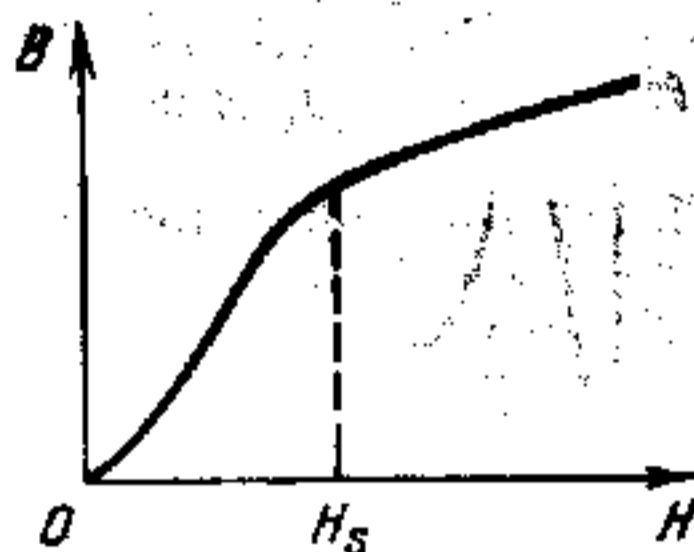


Fig. III.13.5.

níquel, así como en una serie de aleaciones, a condición de que se cumpla la desigualdad $\frac{a}{d} \geq 1,5$ en la que d es el diámetro del átomo, y a , el diámetro de su capa electrónica incompleta (VI.2.3.6°).

2°) Las propiedades fundamentales de los ferromagnéticos que los distinguen de los otros tipos de materiales magnéticos son:

a) La dependencia de la imanación (III.13.3.2°) respecto de la intensidad H del campo magnético externo se caracteriza por la existencia de la *saturación magnética* J_s , que comienza cuando $H \geq H_s$ (fig. III.13.4).

b) La dependencia de la inducción magnética B respecto de H se distingue porque la misma aumenta, según una ley lineal, cuando $H \geq H_s$ (fig. —III.13.5).

c) La dependencia de la permeabilidad magnética relativa μ respecto de la intensidad H tiene carácter complejo (fig. III.13.6).

d) La existencia de la *histéresis magnética de los ferromagnéticos*, o sea, del retraso con que varía la imanación respecto de la

variación de la intensidad del campo magnetizante externo, alternativo en magnitud y sentido. Este retraso se explica por la dependencia de J respecto de la «prehistoria» de la imanación de la sustancia.

e) Las propiedades antes enumeradas de los cuerpos ferromagnéticos*) se ponen de manifiesto a temperaturas inferiores al punto de Curie ϑ_C . A temperaturas $T \geq \vartheta_C$, el movimiento

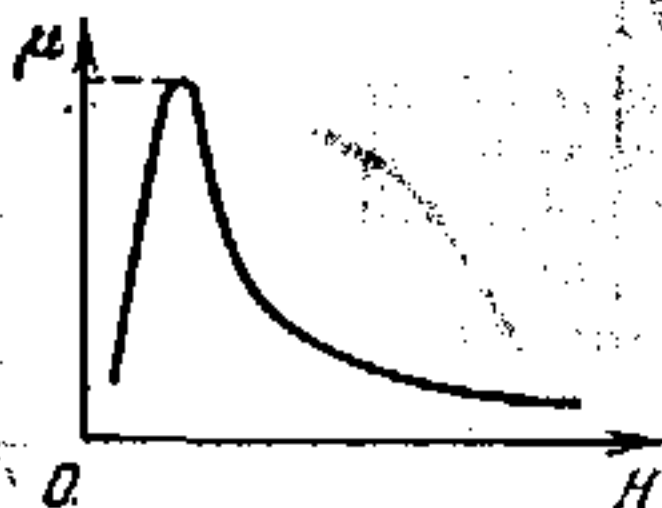


Fig. III.13.6.

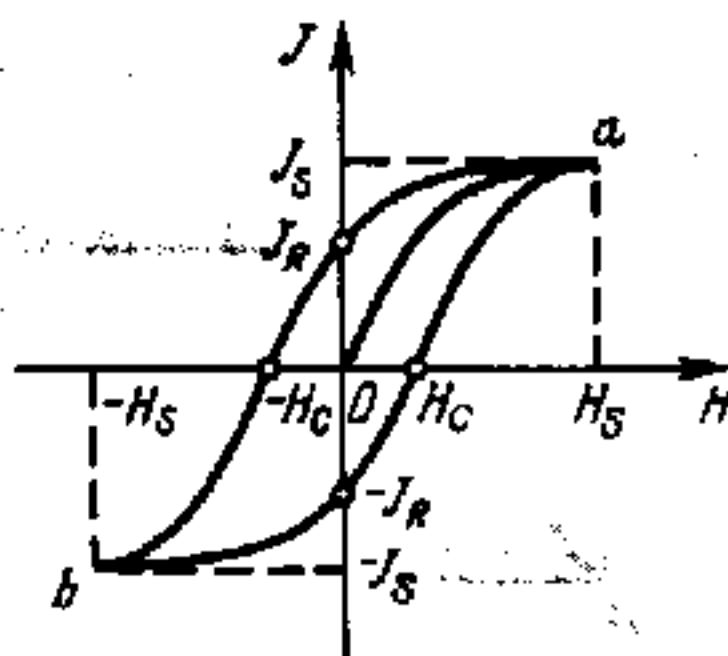


Fig. III.13.7.

térmico destruye tanto la región de imanación espontánea (p. 4º) como el ferromagnético, y, perdiendo sus peculiaridades, éste se transforma en sustancia paramagnética (III.13.3.5º). El punto de Curie para el hierro es 1043 K; para el níquel, 631 K; para el cobalto, 1403 K; y para la aleación permalloy, 823 K.

3º. Se llama *bucle de histéresis* la curva de imanación de un ferromagnético sometido a un campo magnético externo, al variar la intensidad de este campo desde $+H_S$ hasta $-H_S$ y viceversa, siendo H_S la intensidad del campo correspondiente a la saturación magnética (fig. III.13.7). La magnitud $\pm J_S$ de la imanación, cuando $H = \pm H_S$, se llama *imanación de saturación*. La cantidad de imanación $\pm J_R$ que se conserva en el ferromagnético en ausencia de campo exterior (cuando $H = 0$) recibe el nombre de *imanación remanente* o *remanencia*. La existencia de J_R sirve de base para la creación de imanes permanentes. La intensidad $\pm H_S$ del campo exterior que desimana totalmente la sustancia se denomina *fuerza coercitiva* (*intensidad retardante*).

*) Y de una serie de otros que no se consideran en este apartado.

La fuerza coercitiva determina la propiedad del ferromagnético de conservar la imanación remanente. Poseen gran fuerza coercitiva los *materiales magnéticos «duros»* que proporcionan un bucle de histéresis ancho y que se utilizan para fabricar imanes permanentes. Tienen poca fuerza coercitiva los *materiales magnéticos «blandos»* que ofrecen un bucle de histéresis estrecho y que se emplean para fabricar núcleos de transformadores.

La reimanación de un ferromagnético está relacionada con el cambio de orientación de las regiones de magnetización espontánea (p. 4°) y requiere la realización de trabajo a expensas de la energía del campo magnético exterior. La cantidad de calor que se desprende durante la reimanación es proporcional al área del bucle de histéresis.

4°. A temperaturas inferiores al punto de Curie (p. 2°), el ferromagnético se divide en pequeñas *regiones de magnetización espontánea* uniforme, llamadas *dominios*. Las dimensiones lineales de los dominios son del orden de $(10^{-5} - 10^{-4})$ m. Dentro de cada dominio la substancia está imanada hasta la saturación (p. 2°). En ausencia de campo magnético externo, los momentos magnéticos de los distintos dominios están orientados en el espacio de tal modo que el momento magnético resultante de todo el cuerpo ferromagnético es nulo.

Bajo la influencia del campo magnético exterior, en el ferromagnético se efectúa la orientación de los momentos magnéticos no de las partículas aisladas, como en el caso de los paramagnéticos (III.13.3.6°), sino de los dominios enteros. Como resultado de esto, la substancia se imana.

Las propiedades ferromagnéticas sólo pueden tenerlas los cuerpos en estado cristalino en que la interacción entre los átomos vecinos de la red conduce a la energía total del sistema de electrones que asegura el cumplimiento de las condiciones de existencia del ferromagnetismo (III.13.5.1°).

5°. La medida de la razón giromagnética (III.13.1.4°) para los cuerpos ferromagnéticos ha demostrado que los portadores elementales del magnetismo en los ferromagnéticos son los momentos magnéticos de espín de los electrones (III.13.1.4°). En la teoría mecanocuántica moderna del ferromagnetismo se explica la naturaleza de la magnetización espontánea de los ferromagnéticos (p. 4°) y las causas de que se produzca el intenso campo intrínseco (III.13.4.1°).

Poseen propiedades ferromagnéticas los cristales de las substancias cuyos átomos tienen capas y subcapas internas no completamente ocupadas por electrones (VI.2.3.6°) cuyo momento de espín resultante proporciona un valor distinto de cero de su

proyección sobre la dirección del campo magnético (III.13.1.3°). Entre los espines de estos electrones se produce una interacción mecanocuántica especial, de procedencia no magnética, llamada interacción de cambio (VI.2.1.4°). Como resultado de esto, el estado del sistema de electrones en los ferromagnéticos, cuando los espines están orientados paralelamente, resulta ser estable, produciéndose la magnetización espontánea (p. 4°) y originándose un fuerte campo magnético intrínseco.

Capítulo III.14. Fundamentos de la teoría de Maxwell

§ III.14.1. Característica general de la teoría de Maxwell

1°. Se da el nombre de *teoría de Maxwell* a la teoría consecuente del campo electromagnético único (III.2.1.2°) que genera un sistema arbitrario de cargas y corrientes. En la teoría de Maxwell se resuelve el *problema fundamental de la electrodinámica*: dada la distribución de las cargas y corrientes, buscar las características de los campos eléctrico y magnético generados por ellas. La teoría de Maxwell es la generalización de las leyes más importantes que definen los fenómenos eléctricos y electromagnéticos, como son el teorema de Ostrogradski—Gauss (III.5.3.3°), la ley de la corriente total (III.13.4.2°) y la ley de la inducción electromagnética (III.12.1.3°).

2°. La teoría de Maxwell tiene carácter fenomenológico. Esto se manifiesta en que en ella no se estudia el mecanismo intrínseco de los fenómenos que tienen lugar en el medio y que hacen que aparezcan los campos eléctricos y magnéticos. El medio se define en la teoría de Maxwell mediante las tres magnitudes que dan sus propiedades eléctricas y magnéticas: la permitividad relativa ϵ (III.5.3.4°), la permeabilidad magnética relativa μ (III.13.4.5°) y la conductividad eléctrica γ (III.7.3.4°).

3°. En la teoría de Maxwell se estudian los campos macroscópicos que generan las cargas y corrientes macroscópicas concentradas en volúmenes inconmensurablemente mayores que los volúmenes de los átomos y las moléculas. Se supone que las dis-

tancias desde las fuentes de los campos hasta los puntos que se consideran del espacio son mucho mayores que las dimensiones de los átomos y de las moléculas. Por esto los campos macroscópicos sólo varían sensiblemente a distancias enormes en comparación con las dimensiones lineales de los átomos (o moléculas). Además, los períodos de variación de los campos eléctricos y magnéticos alternativos se consideran mucho mayores que los períodos de los procesos intramoleculares.

4°. Las cargas y corrientes macroscópicas son conjuntos de cargas y corrientes microscópicas que generan sus microcampos (eléctricos y magnéticos), los cuales varían continuamente en función del tiempo en cada punto del espacio.

Los campos macroscópicos considerados en la teoría de Maxwell son *microcampos promediados*. El promedio de los microcampos se hace según intervalos de tiempo mucho mayores que los períodos de los procesos intraatómicos y según volúmenes de campos muy superiores a los de los átomos y moléculas (III.14.4.5°).

5°. La teoría de Maxwell es una teoría de *acción próxima*, de acuerdo con la cual las interacciones eléctricas y magnéticas tienen lugar en campos eléctricos y magnéticos y se propagan con velocidad finita, igual a la velocidad de la luz en un medio dado. Este importante resultado se tiene en cuenta en la teoría electromagnética de la luz, creada por Maxwell.

§ III.14.2. Primera ecuación de Maxwell

1°. La primera ecuación de Maxwell en forma integral es la generalización de la ley de inducción electromagnética de Faraday de la forma (III.12.1.6°):

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Según Maxwell, esta ley es válida no sólo para un circuito conductor, sino también para cualquier circuito cerrado elegido mentalmente en un campo magnético alternativo. Esto significa que el campo magnético alternativo genera en cualquier

punto del espacio un campo eléctrico rotacional, independientemente de que en dicho punto se encuentre o no un conductor.

2°. Si se aplica la expresión del flujo magnético (III.10.5.4°),

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B_n \, dS$$

y el teorema de Stokes del análisis vectorial: $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, donde $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$ (\mathbf{n} es el vector unidad de la

normal a la superficie elemental dS) y se puede pasar de la primera ecuación de Maxwell del p. 1° a la *primera ecuación de Maxwell en forma diferencial*:

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{en el SI})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Aquí $\text{rot } \mathbf{E}$ en coordenadas cartesianas se expresa por el determinante siguiente:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

3°. La creación de un campo eléctrico rotacional en el espacio, bajo la influencia del campo magnético alternativo, se utiliza en el acelerador de electrones del tipo de inducción (III.11.4.2°), llamado *betatrón*.

El campo magnético alternativo de un electroimán con piezas polares cónicas A y C (fig. III.14.1) hace que en la cámara de aceleración en el vacío D , en forma de anillo cerrado, se genere un campo eléctrico rotacional. Las líneas de intensidad (III.1.1.5°) de este campo eléctrico rotacional se encuentran en el plano MN , perpendicular al eje OO' de simetría de las piezas polares, y tienen forma de circunferencias con centro en el punto K . En todos los puntos de cualquiera de esas circunferencias, el vector intensidad \mathbf{E} tiene un valor numérico constante y su dirección es tangencial a la circunferencia. Los electrones se

mueven en la cámara de aceleración describiendo trayectorias circulares. Si un electrón recorre muchas veces una órbita circular estable, el mismo se acelera hasta adquirir gran energía.

4°. La intensidad E del campo eléctrico rotacional del betatrón es

$$E = -\frac{1}{2} r \frac{d\langle B \rangle}{dt},$$

donde $\langle B \rangle$ es el valor medio de la inducción magnética en el instante t , dentro de los límites de la órbita circular del electrón, cuyo radio es r .

La condición de estabilidad de la órbita del electrón en el betatrón es

$B = \frac{1}{2} \langle B \rangle$, donde B es el valor de la inducción magnética en la órbita.

La órbita del electrón en el betatrón es estable si:

a) toda ella se encuentra en un plano. Esta condición se llama *enfoque axial* y se consigue confiriendo una forma especial a las piezas polares, la cual asegure el debilitamiento gradual del campo magnético en dirección del centro de la órbita a su periferia;

b) está asegurado el retorno a la órbita estable de los electrones que casualmente se desvían de ella (*condición de enfoque radial*). Esto se logra distribuyendo espacialmente el campo magnético, de tal modo que la inducción magnética disminuya del eje a la periferia de la órbita, con más lentitud que $1/r$; donde r es la distancia desde el punto considerado del campo hasta el eje de simetría OO' .

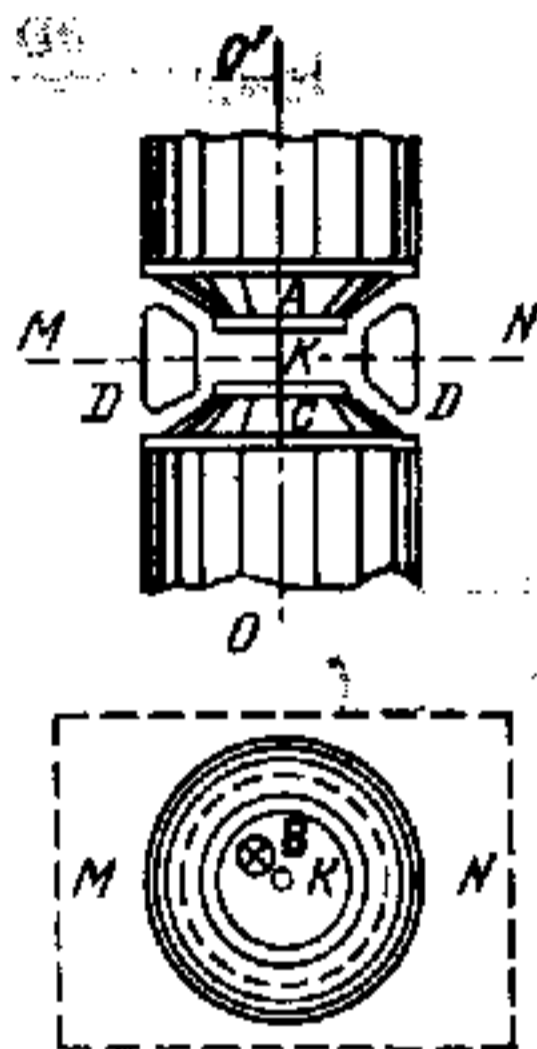


Fig. III.14.1.

§ III.14.3. Corriente de desplazamiento. Segunda ecuación de Maxwell

1°. Maxwell generalizó la ley de la corriente total ((III.13.4.2°) y (III.13.4.4°)) suponiendo que el campo eléctrico alternativo, lo mismo que la corriente eléctrica, es la fuente del

campo magnético. La medida cuantitativa de la acción magnética del campo eléctrico alternativo es la corriente de desplazamiento.

2°. La densidad de la corriente de desplazamiento (III.7.2.3°) constituye

$$j_{\text{despl}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{en el SI}),$$

$$j_{\text{despl}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Se denomina corriente de desplazamiento a través de una superficie arbitraria S , la magnitud física numéricamente igual al flujo del vector densidad de la corriente de desplazamiento a través de esta superficie:

$$I_{\text{despl}} = \int_S j_{\text{despl}} dS = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dS = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \quad (\text{en el SI}),$$

$$I_{\text{despl}} = \int_S j_{\text{despl}} dS = \int_S \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dS = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

donde $\Phi_e = \int_S \mathbf{D} dS$ es el flujo del vector desplazamiento eléctrico a través de la superficie S (III. 2.3.2°).

Teniendo en cuenta las corrientes de desplazamiento, todas las corrientes no continuas tienen circuitos cerrados. Las corrientes de desplazamiento «pasan» por las zonas donde no hay conductores, por ejemplo, entre las armaduras de un condensador durante su carga o descarga. En la fig. III.14.2 se muestran los vectores j_{despl} y las líneas de inducción de los campos magnéticos de las corrientes de desplazamiento durante la carga (III.14.2, a) y la descarga (III.14.2, b) de un condensador.

3°. Según (III.5.3.4°), en cualquier dieléctrico el vector desplazamiento constituye

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e \quad (\text{en el sistema CGS}),$$

donde \mathbf{P}_e es el vector polarización (III.5.2.2°).

La densidad de la corriente de desplazamiento en un dieléctrico es

$$j_{\text{despl}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad (\text{en el SI}),$$

$$j_{\text{despl}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad (\text{en el sistema CGS}).$$

En estas últimas fórmulas, el primer término $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (o, respectivamente, $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$) se llama *densidad de la corriente de despla-*

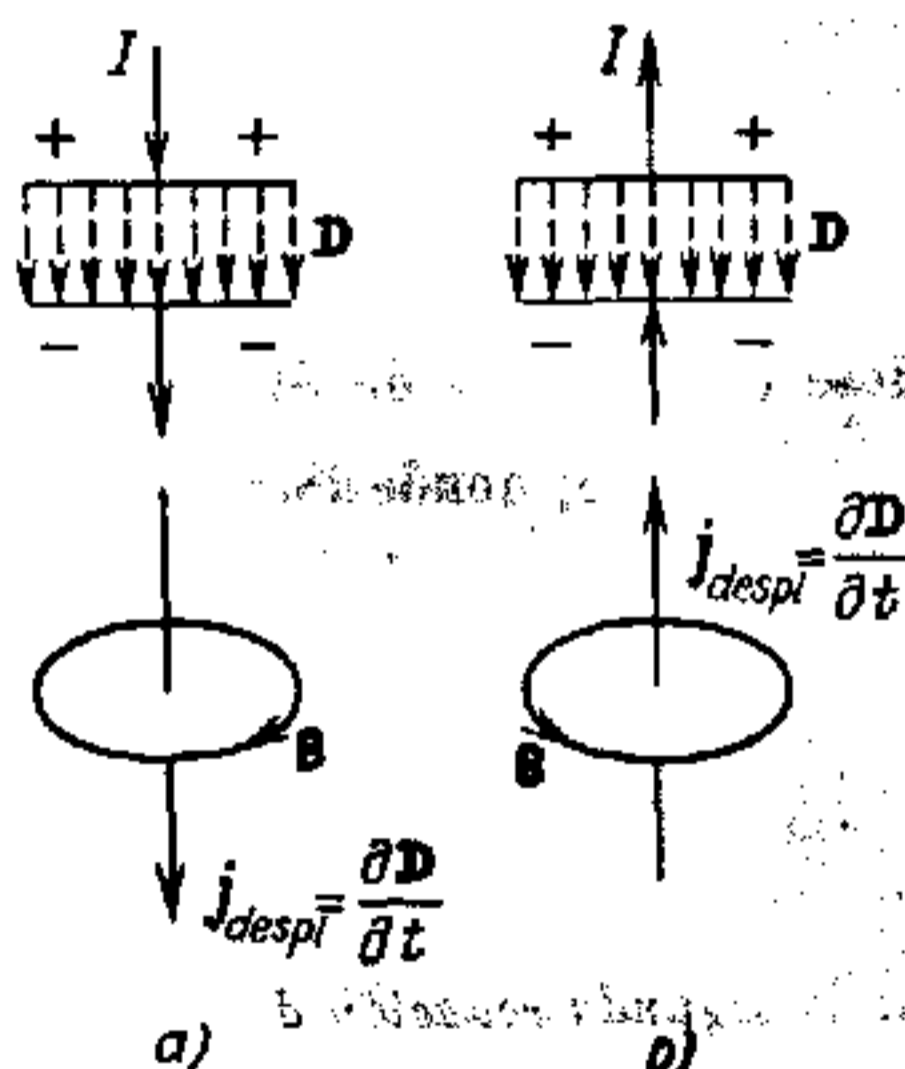


Fig. III.14.2.

zamiento en el vacío, y el segundo, $\frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t}$, es la *densidad de la corriente de polarización*. Este segundo término representa la densidad de la corriente debida al desplazamiento ordenado de las cargas en el dieléctrico, es decir, al desplazamiento de las cargas en la molécula del dieléctrico neutro (III.5.1.3°) o el giro de los dipolos en los dieléctricos polares (III.5.1.5°). La corriente de desplazamiento en el vacío y en los metales no produce calor de Joule (III.8.2.6°); esto la distingue de las corrientes de conducción.

La corriente de polarización está relacionada con la pérdida de energía en el dieléctrico durante el proceso de su polarización, y produce calor de Joule.

4°. Maxwell añadió al segundo miembro de la ley de la corriente total en la forma (III.13.4.4°), la corriente de desplazamiento y escribió esta ley así:

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I_{\text{macro}} + I_{\text{despl}} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (I_{\text{macro}} + I_{\text{despl}}) \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

A esta ecuación se le da el nombre de *segunda ecuación de Maxwell en forma integral*. Ella demuestra que la circulación del vector intensidad del campo magnético, siguiendo un contorno cerrado cualquiera L , es igual a la suma algebraica de las macrocorrientes y de la corriente de desplazamiento a través de la superficie que se extiende sobre este contorno.

5°. Valiéndose del teorema de Stokes del análisis vectorial: $\oint_S \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{H} \, d\mathbf{S}$; donde $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \, dS$, y \mathbf{n} es el vector unidad de la normal a la superficie elemental dS . Por lo tanto, de la expresión de la *corriente total*,

$$I = I_{\text{macro}} + I_{\text{despl}} = \int_S (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{despl}}) \, d\mathbf{S},$$

se puede escribir la *segunda ecuación de Maxwell en forma diferencial*:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

En estas ecuaciones, $\text{rot } \mathbf{H}$ tiene el mismo sentido que $\text{rot } \mathbf{E}$ en (III.14.2.2°).

6°. En ausencia de corrientes de conducción ($\mathbf{j} = 0$), las ecuaciones primera y segunda de Maxwell tienen forma simétrica con una exactitud de hasta el signo del segundo miembro de

las ecuaciones primera y segunda:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

De la comparación de las ecuaciones de Maxwell*) se sacan las siguientes conclusiones:

a) los campos eléctrico y magnético están relacionados entre sí: la variación del campo eléctrico en función del tiempo hace que se produzca un campo magnético**). A su vez, un campo magnético alternativo es fuente de un campo eléctrico rotacional.

b) La diferencia de signos de los segundos miembros de las ecuaciones de Maxwell se halla en concordancia con la ley de conservación de la energía y la ley de Lenz (III.12.1.4°). Si los signos de $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ y $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ fueran iguales, el in-

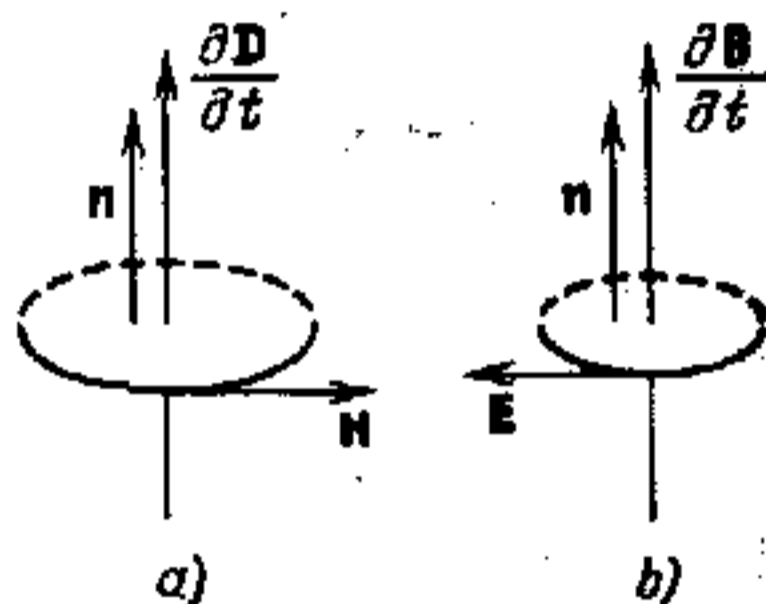


Fig. III.14.3.

cremento infinitesimal de uno de los campos acarrearía un aumento ilimitado de ambos, la disminución infinitesimal de uno de los campos conduciría a la completa desaparición de ambos. La diferencia indicada de signos de los segundos miembros de las ecuaciones de Maxwell es condición necesaria para la existencia de un campo electromagnético estable.

Las diferencias de signos de los segundos miembros de las ecuaciones de Maxwell corresponden a que los sentidos de $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ y \mathbf{H} forman un sistema «helicoidal dextrógiro» (fig. III.14.3,a), y los sentidos de $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ y \mathbf{E} originan un sistema «helicoidal levógiro» (fig. III.14.3,b).

*) La numeración de las ecuaciones de Maxwell es convencional y también suele encontrarse la inversa de la adoptada en este prontuario.

***) El campo magnético siempre es rotacional (III.10.5.3°).

§ III.14.4. Sistema completo de ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético

1°. El sistema completo de ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético incluye, además de las ecuaciones estudiadas en (III.14.2.1° y 2°) y (III.14.3.4° y 5°), el teorema de Ostrogradski—Gauss para el campo eléctrico (III.5.3.3°):

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{libr} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q_{libr} \quad (\text{en el sistema CGSE})$$

y este mismo teorema para el campo magnético (III.10.5.6°):

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Maxwell supuso que el teorema para el flujo del vector desplazamiento del campo eléctrico es correcto no sólo para el campo electrostático estacionario, sino también para el campo eléctrico alternativo.

2°. Valiéndose del teorema de Gauss del análisis vectorial

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{A} \cdot dV \text{ se puede, introduciendo la densidad vo-}$$

lumétrica de cargas libres $\rho = \frac{dq_{libr}}{dV}$ (dV es el elemento de volumen), obtener la tercera ecuación de Maxwell en forma diferencial:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (\text{en el SI}),$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

En estas fórmulas, $\text{div } \mathbf{A}$ (donde \mathbf{A} es un vector arbitrario) se determina en coordenadas cartesianas del modo siguiente:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

donde $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ e \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son los vectores unitarios de los ejes de coordenadas.

3°. El sistema completo de ecuaciones de Maxwell incluye cuatro ecuaciones:

$$\text{I rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{III div } \mathbf{D} = \rho, \quad (\text{en el SI}),$$

$$\text{II rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{IV div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{I rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{III div } \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

$$\text{II rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{IV div } \mathbf{B} = 0$$

4°. El sistema de ecuaciones de Maxwell se completa con las ecuaciones que caracterizan las propiedades eléctricas y magnéticas del medio. Para un medio isótropo, en el caso de macrocorrientes que cumplen la ley de Ohm (III.7.3.4°), estas ecuaciones tienen la forma:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{j}_{\text{macro}} = \gamma \mathbf{E} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{j}_{\text{macro}} = \gamma \mathbf{E} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Aquí ϵ_0 y μ_0 son, respectivamente, las constantes eléctrica y magnética en el SI (III.1.2.5°) y (III.10.2.2°); ϵ y μ , respectivamente, la permitividad relativa y la permeabilidad magnética relativa; y γ , la conductividad eléctrica.

Para resolver el sistema de ecuaciones de Maxwell hay que conocer también las condiciones de frontera para los vectores que caracterizan el campo electromagnético:

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma, \quad E_{t1} = E_{t2}$$

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{t1} - H_{t2} = j_{\text{sup}} \quad (\text{en el SI}),$$

$$D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\sigma, \quad E_{t1} = E_{t2}, \quad (\text{en el sistema de Gauss}),$$

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{t1} - H_{t2} = \frac{4\pi}{c} j_{\text{sup}}$$

donde σ es la densidad superficial de las cargas eléctricas libres; \mathbf{n} , el vector unidad de la normal a la superficie de separación, dirigido del medio 2 al medio 1; \mathbf{t} , el vector unidad de la tangente a dicha superficie; y j_{sup} , la proyección del vector densidad de corrientes de conducción superficiales sobre la dirección $[\mathbf{tn}]$.

Cuando se dan las condiciones de frontera y las condiciones iniciales, es decir, conociendo los valores de los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} en el instante inicial $t = 0$, el sistema de ecuaciones de Maxwell tiene una sola solución.

5°. Las ecuaciones de Maxwell son invariantes respecto de las transformaciones de Lorentz (I.5.3.2°).

En la teoría especial de la relatividad (TER) (I.5.1.1°) se demuestra que el campo electromagnético único se manifiesta de modo diferente en distintos sistemas inerciales de referencia (I.2.1.2°). En particular, uno de los campos —el eléctrico o el magnético— puede estar ausente en un sistema de coordenadas y presente en otro. Las fórmulas de las transformaciones de Lorentz para las componentes, según los ejes de los vectores \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} y \mathbf{B} de los campos eléctrico y magnético cuando se pasa de un sistema inercial en reposo K a un sistema K' que se mueve con respecto a K uniforme y rectilíneamente a lo largo del eje OX con velocidad V , son en el SI:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - VB'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - VD'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad H_z = \frac{H'_z + VD'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$D_x = D'_x, \quad D_y = \frac{D'_y + \frac{V}{c^2} H'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad D_z = \frac{D'_z - \frac{V}{c^2} H'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$B_x = B'_x, \quad B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

en el sistema de Gauss:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

6°. El siguiente desarrollo de la teoría del campo electromagnético de Maxwell fue la teoría clásica de Lorentz. Esta teoría partía de determinadas representaciones simuladas de estructura de la sustancia: se consideraba que los átomos están formados por partículas cargadas negativas y positivas y toda la diversidad de los fenómenos eléctricos y magnéticos se explica por una determinada disposición, movimiento e interacción de las cargas y las microcorrientes. En todo punto del espacio existen ciertos microcampos eléctrico y magnético, de intensidades e y h , los cuales son resultado del conjunto de las acciones de todas las cargas y microcorrientes. Los microcampos se subordinan a un sistema de ecuaciones análogas a las de Maxwell (p. 3°). La toma del valor medio de las ecuaciones de la teoría electrónica (III.14.1.4°) permite pasar a las ecuaciones de Maxwell para los campos macroscópicos E y B (III.14.1.3°), los cuales resultan ser iguales a los valores medios de los microcampos e y h :

$$\mathbf{E} = \langle e \rangle, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \langle h \rangle, \quad (\text{en el SI}).$$

Los vectores D y H resultan estar relacionados con $\langle e \rangle$ y $\langle h \rangle$ por medio de los vectores polarización P_e (III.5.2.3°) e intensidad de magnetización j (III.13.3.1°) como se indica en (III.5.3.4°) y (III.13.4.4°):

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

IV parte.

OSCILACIONES Y ONDAS

Capítulo IV.1. Oscilaciones armónicas libres

§ IV.1.1. Oscilaciones armónicas

1°. Se llaman *oscilaciones* los procesos (de movimiento o de variación de estado) que en mayor o menor grado se repiten con el tiempo. En dependencia de la naturaleza física del proceso de oscilación y del «mecanismo» de su excitación, las oscilaciones pueden ser: *mecánicas* (oscilaciones de los péndulos, de cuerdas (vibraciones), de partes de las máquinas y mecanismos, de edificios, puentes y otras estructuras, de la presión del aire al propagarse el sonido en él, de balanceo de los barcos y de agitación del mar, etc.), *electromagnéticas* (oscilaciones de la corriente alterna en un circuito eléctrico, oscilaciones de los vectores intensidad eléctrica E e inducción magnética B de un campo electromagnético y otras), *electromecánicas* (vibraciones de la membrana de un teléfono, del difusor de un altavoz eléctrico, etc.) y de otros tipos.

El sistema que efectúa las oscilaciones recibe el nombre de *sistema oscilante* u *oscilatorio*. Son *oscilaciones libres* (*naturales* o *propias*) las que se producen en ausencia de acciones externas sobre el sistema oscilatorio y surgen como consecuencia de cualquier desviación inicial de dicho sistema respecto de su estado de equilibrio estable. Se dice que son *forzadas* las oscilaciones que se producen en un sistema cualquiera bajo la influencia de una acción alterna exterior (por ejemplo, las oscilaciones de la intensidad de la corriente en un circuito eléctrico, debidas a la fem alterna; las oscilaciones de un péndulo motivadas por una fuerza alterna exterior).

2°. Las oscilaciones se llaman *periódicas* si los valores de todas las magnitudes físicas que caracterizan el sistema oscilatorio y las oscilaciones que varían en él se repiten al cabo de

intervalos de tiempo iguales. El menor lapso T que satisface esta condición se denomina *período de las oscilaciones*. Durante el período T , el sistema realiza una *oscilación completa*. Se da el nombre de *frecuencia de las oscilaciones* periódicas a la magnitud $\nu = 1/T$, igual al número de oscilaciones completas que se realizan en la unidad de tiempo. Se llama *frecuencia cíclica o circular de las oscilaciones* periódicas la magnitud $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, igual al número de oscilaciones completas que se efectúan en 2π unidades de tiempo.

3°. En las oscilaciones periódicas, la dependencia de la magnitud oscilante s respecto del tiempo t satisface la condición $s(t + T) = s(t)$.

Las oscilaciones periódicas de la magnitud $s(t)$ se llaman *armónicas* si

$$s(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \text{ o } s(t) = A \operatorname{cos}(\omega t + \varphi_1),$$

donde $\omega = 2\pi\nu = (2\pi/T) = \text{const}$ es la *frecuencia cíclica de las oscilaciones armónicas*; $A = s_{\text{máx}} = \text{const} > 0$ es el valor máximo de la magnitud oscilante s y se llama *amplitud de las oscilaciones*, y φ_0 y $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi/2$ son magnitudes constantes. El valor de s en un instante arbitrario t se determina por elevarlos de la *fase de las oscilaciones* $\Phi(t) = \omega t + \varphi_0$ (respectivamente $\Phi_1(t) = \omega t + \varphi_1$). Las magnitudes φ_0 y φ_1 son las *fases iniciales de las oscilaciones*, es decir, los valores de $\Phi(t)$ y $\Phi_1(t)$ en el instante ($t = 0$) de referencia del tiempo: $\varphi_0 = \Phi(0)$ y $\varphi_1 = \Phi_1(0)$.

4°. La primera y la segunda derivada respecto del tiempo de la magnitud $s(t)$ oscilante armónicamente, también realizan oscilaciones armónicas de la misma frecuencia cíclica:

$$\frac{ds}{dt} = A\omega \operatorname{cos}(\omega t + \varphi_0) = A\omega \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0 + \pi),$$

las amplitudes de ds/dt y d^2s/dt^2 son respectivamente iguales a $A\omega$ y $A\omega^2$. La fase inicial de ds/dt es igual a $(\varphi_0 + \pi/2)$, es decir, la diferencia de fase entre las oscilaciones de ds/dt y s es constante e igual a $\pi/2$ (la magnitud ds/dt tiene un avance de fase de $\pi/2$ respecto de s). La fase inicial de d^2s/dt^2 es igual a $(\varphi_0 + \pi)$, o sea, la diferencia de fase entre las oscilaciones de d^2s/dt^2 y s es constante e igual a π (la magnitud d^2s/dt^2 tiene un

avance de fase igual a π respecto de s). La gráfica de la dependencia, respecto del tiempo t , de las magnitudes s , ds/dt y d^2s/dt^2 para las oscilaciones armónicas cuando $\varphi_0 = 0$, se muestra en la fig. IV.1.1.

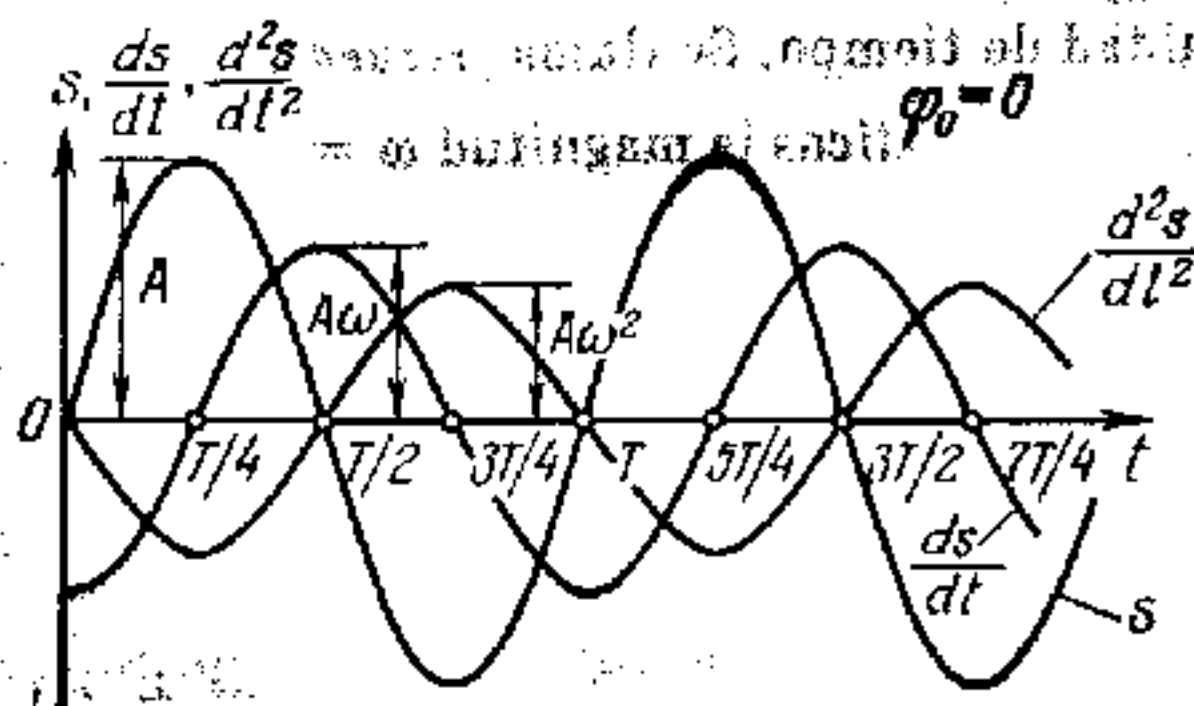


Fig. IV.1.1.

5°. De la segunda relación del p. 4° se infiere que la magnitud s armónicamente oscilante satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

La solución general de esta ecuación tiene la forma

$$s = A_1 \operatorname{sen} \omega t + A_2 \operatorname{cos} \omega t,$$

en la que A_1 y A_2 son constantes de integración arbitrarias. Los valores de A_1 y A_2 pueden hallarse partiendo de las condiciones iniciales, o sea, conociendo los valores de s y de ds/dt en el instante inicial ($t = 0$):

$$A_1 = \left(\frac{1}{\omega} \right)_{t=0} \quad \text{y} \quad A_2 = s(0).$$

La solución general se puede reducir a la forma normal de las oscilaciones armónicas (p. 3°):

$$s = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0),$$

donde $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ y $\varphi_0 = \operatorname{arctg} (A_2/A_1)$.

Así, pues, la magnitud s efectuará oscilaciones armónicas en el caso, y sólo en el caso, en que satisfaga la ecuación diferen-

cial antes escrita, la cual, por esto, recibe el nombre de *ecuación diferencial de las oscilaciones armónicas*.

6°. Las oscilaciones armónicas se pueden representar gráficamente en forma de un vector en un plano. Para esto, desde el origen de coordenadas O situado en el plano se traza el vector A (fig. IV.1.2), de módulo igual a la amplitud A de las oscilaciones que se consideran, formando con el eje de coordenadas OX un ángulo $\varphi = \omega t + \varphi_0$ igual a la fase de las oscilaciones en un instante dado t . Con el tiempo el ángulo φ aumenta de manera que el vector A gira uniformemente alrededor del punto O con una velocidad angular igual a la frecuencia cíclica ω de las oscilaciones. Respectivamente, la proyección del vector A sobre el eje vertical OY efectúa oscilaciones armónicas según la ley

$$A_y = s = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0).$$

La representación gráfica de las oscilaciones armónicas mediante el vector amplitud giratorio se llama *método de los diagramas vectoriales*. Este método se emplea mucho, por ejemplo, para componer oscilaciones armónicas de igual dirección (IV.1.4.2°).

7°. De acuerdo con la fórmula de Euler para los números complejos,

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi,$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Por esto las oscilaciones armónicas $s = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_1)$, donde $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi/2$ se pueden escribir en forma exponencial:

$$\tilde{s} = \tilde{A} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \varphi_1)},$$

donde $\tilde{A} = A e^{i\varphi_1}$ es la amplitud compleja. Sólo tiene sentido físico la parte real de la función compleja \tilde{s} que se designa por $\operatorname{Re} \tilde{s}$:

$$\operatorname{Re} \tilde{s} = s = A \cos(\omega t + \varphi_1) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0),$$

donde $\varphi_0 = \varphi_1 + \pi/2$.

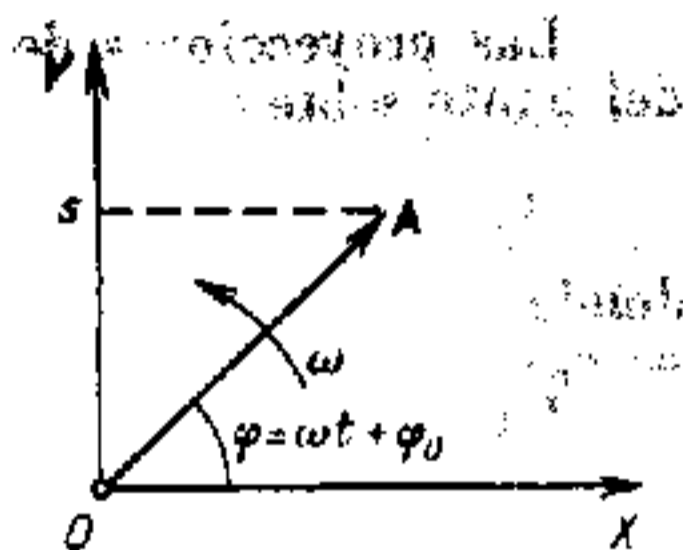


Fig. IV.1.2.

§ IV.1.2. Oscilaciones armónicas mecánicas

1°. Si un punto material efectúa oscilaciones armónicas rectilíneas a lo largo de un eje de coordenadas OX en torno a la posición de equilibrio tomada como origen de coordenadas, la dependencia de la coordenada x del punto respecto del tiempo t , tiene la forma ((IV.1.1.3°), en la que $s = x$):

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0).$$

Las proyecciones de la velocidad v y de la aceleración a del punto sobre el eje OX son:

$$v_x = v_0 (\cos \omega t + \varphi_0) \text{ y } a_x = -a_0 \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0),$$

donde $v_0 = A\omega$ es la amplitud de la velocidad, y $a_0 = A\omega^2 = v_0\omega$ es la amplitud de la aceleración.

La fuerza F que actúa sobre el punto material es

$$F = ma \text{ y } F_x = -m\omega^2 x,$$

siendo m la masa del punto material. Por consiguiente, la fuerza F es proporcional a la desviación del punto material de su posición de equilibrio y está dirigida en sentido contrario:

$$F = -m\omega^2 xi,$$

donde i es el versor del eje OX .

Esta dependencia de la fuerza respecto de la desviación (o elongación) es característica de una fuerza elástica (I.3.3.6°). Por esto las fuerzas de otra naturaleza física que satisfacen esta misma dependencia se llaman *cuasielásticas*.

2°. La energía cinética de un punto material que realiza oscilaciones armónicas rectilíneas es

$$W_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \cos^2 (\omega t + \varphi_0) = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2 (\omega t + \varphi_0),$$

o bien

$$W_c = \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 + \cos (2\omega t + 2\varphi_0)].$$

La energía cinética del punto material varía periódicamente desde 0 hasta $m\omega^2 A^2/2$, efectuando oscilaciones armónicas de frecuencia cíclica 2ω y de amplitud $m\omega^2 A^2/4$ en torno a su valor medio, igual a $m\omega^2 A^2/4$.

La energía potencial de un punto material que oscila armónicamente bajo la acción de una fuerza cuasielástica constituye

$$W_p = - \int_0^x F_x dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \text{sen}^2 (\omega t + \varphi_0),$$

o bien

$$W_p = \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 - \cos (2\omega t + 2\varphi_0)] = \frac{m\omega^2 A^2}{4} [1 + \cos (2\omega t + 2\varphi_0 + \pi)].$$

La energía potencial del punto material varía periódicamente desde 0 hasta $m\omega^2 A^2/2$ cumpliendo oscilaciones armónicas de frecuencia cíclica 2ω y de amplitud $m\omega^2 A^2/4$ en torno a su

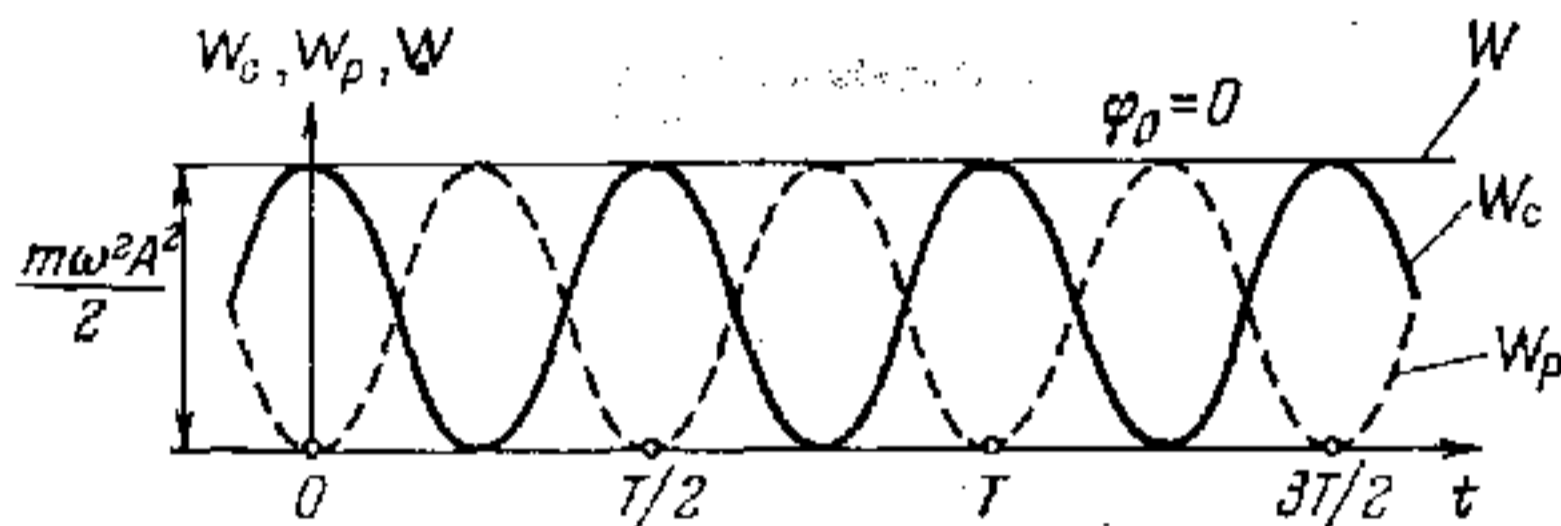


Fig. IV.1.3.

valor medio, igual a $m\omega^2 A^2/4$. Las oscilaciones de la energía potencial y de la energía cinética se efectúan con un avance de fase igual a π , de manera que la energía mecánica total del punto material no varía durante las oscilaciones:

$$W = W_c + W_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \text{const.}$$

Las gráficas de la dependencia de W_c , W_p y W respecto de t para el caso en que $\varphi_0 = 0$, se muestra en la fig. IV.1.3.

3°. **Ejemplo 1.** Un oscilador armónico lineal es un punto material de masa m que efectúa oscilaciones armónicas rectilíneas bajo la acción de una fuerza elástica $F_{el} = -kxi$ (I.3.3.6°). De ejemplo de este sistema puede servir un péndulo de resorte, es decir, un peso de masa m suspendido de un muelle perfecta-

mento elástico (k es un coeficiente que caracteriza las propiedades elásticas del muelle). La ecuación del movimiento es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0.$$

De IV.1.1.5° se deduce que el oscilador armónico (péndulo de resorte) efectúa oscilaciones armónicas de acuerdo con la ley $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, cuya frecuencia ω y período T constituyen

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{y} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

La energía potencial del oscilador armónico lineal es

$$W_p = \frac{kx^2}{2}.$$

4°. Ejemplo 2. Un péndulo físico es un sólido que tiene la posibilidad de oscilar, bajo la acción de la fuerza de su gravedad mg , alrededor de un eje horizontal fijo O que no pasa por su centro de gravedad (fig. IV.1.4) y que se llama *eje de oscilación del péndulo*. El centro de gravedad del péndulo coincide con su centro de inercia C (I.7.3.2°). El punto O de inter-

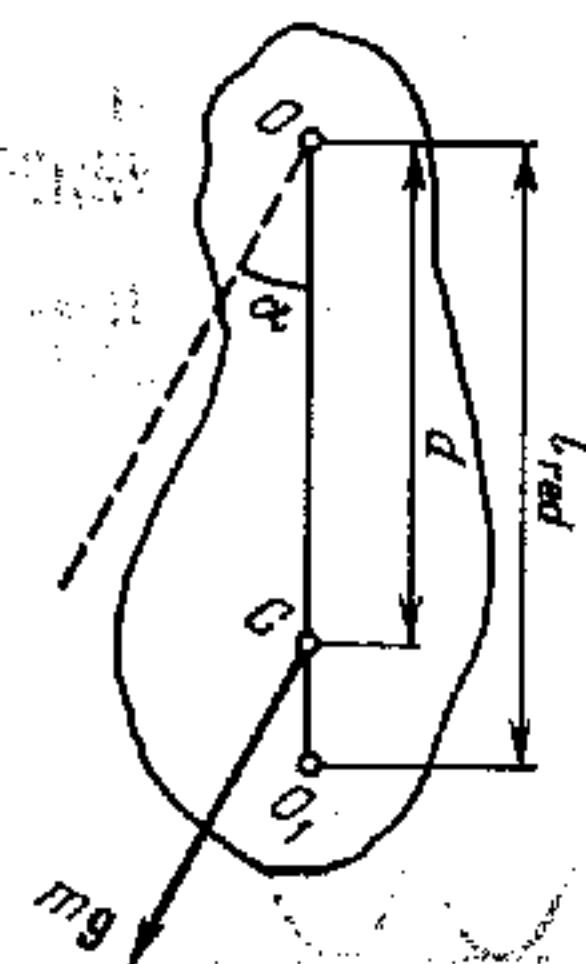


Fig. IV.1.4.

sección del eje de oscilación del péndulo con el plano vertical que pasa por el centro de gravedad de dicho péndulo y es perpendicular al eje de oscilación, se llama *punto de suspensión del péndulo*.

En ausencia de fuerzas de rozamiento en la suspensión, la ecuación del movimiento del péndulo tiene la forma (I.4.3.4°) siguiente:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgd \sin \alpha,$$

donde α es el ángulo de giro del péndulo alrededor del eje de oscilación desde la posición de equilibrio; $d = OC$, la distancia del centro de inercia del péndulo al eje de oscilación; J , el momento de inercia del péndulo respecto del mismo eje (I.4.2.1°); m , la masa del péndulo; y g , la aceleración de caída libre. Si

las oscilaciones del péndulo son pequeñas, $\sin \alpha \approx \alpha$ y la ecuación de su movimiento tiene la forma

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{J} \alpha = 0,$$

es decir, el ángulo α satisface la ecuación diferencial de las oscilaciones armónicas (IV.1.1.5°). Por lo tanto, en ausencia de rozamiento, las oscilaciones pequeñas del péndulo físico son armónicas:

$$\alpha = \alpha_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0),$$

donde α_0 es la amplitud de las oscilaciones del ángulo α , y

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}} \quad \text{y} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}$$

son la frecuencia cíclica y el período de las oscilaciones pequeñas del péndulo físico.

5°. **Ejemplo 3.** *Un péndulo matemático* es un punto material suspendido de un hilo inextensible y sin peso que oscila en un plano vertical por la acción de la gravedad. El péndulo matemático es un caso extremo del péndulo físico, en el que toda la masa se concentra en su centro de inercia, de manera que $d = l$ es la longitud del péndulo matemático. El momento de inercia de este péndulo respecto del eje de oscilación $J = ml^2$. Respectivamente, la frecuencia cíclica y el período de las pequeñas oscilaciones del péndulo matemático constituyen

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{y} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Las oscilaciones pequeñas de los péndulos físico y matemático son ejemplos de *oscilaciones isócronas*, es decir, de oscilaciones cuyas frecuencias y períodos no dependen de la amplitud.

En el caso general, el período de las oscilaciones de un péndulo físico depende de su amplitud α_0 :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \right].$$

La variación del valor de T cuando α_0 aumenta hasta 15° no supera un 0,5%.

6°. Se llama *longitud reducida* l_{red} de un péndulo físico la longitud del péndulo matemático que tiene el mismo período de oscilación:

$$l_{\text{red}} = \frac{J}{md} = d + \frac{J_C}{md} > d,$$

donde J_C es el momento de inercia del péndulo físico respecto del eje que pasa por el centro de inercia C y es paralelo a su eje de oscilación. El punto O_1 que se encuentra en la recta OC a la distancia l_{red} del punto de suspensión O del péndulo (fig.

IV.1.4) se llama *centro de oscilación del péndulo físico*. El centro de oscilación O_1 y el punto de suspensión O tienen la propiedad de ser recíprocos, es decir, si el péndulo se suspende de tal modo que su eje de oscilación pase por el punto O_1 , el punto O coincidirá con la nueva posición del centro de oscilación del péndulo, o sea, la longitud reducida y el período de oscilación del péndulo seguirán siendo los mismos.

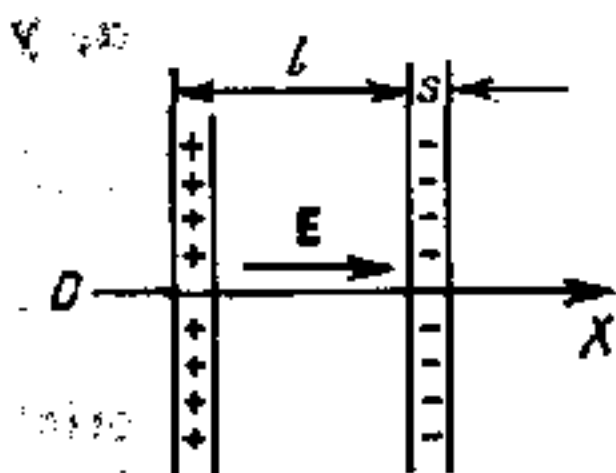


Fig. IV.1.5.

7°. **Ejemplo 4.** *Pequeñas oscilaciones libres de los electrones en el plasma* (III.9.6.1°). Estas oscilaciones, llamadas de *Langmuir*, son provocadas por las fuerzas del campo eléctrico que aparecen en el plasma eléctricamente neutro cuando se produce cualquier desviación casual de la distribución espacial de los electrones respecto de la de equilibrio. Por ejemplo, si en una capa plana de plasma de espesor l (fig. IV.1.5) se desplazan los electrones a una pequeña distancia s a lo largo del sentido positivo del eje OX , en la parte izquierda de la capa se produce un exceso de carga positiva, y en la derecha, un exceso de carga negativa. Como consecuencia de esto surge un campo eléctrico cuya intensidad E está dirigida a lo largo de OX y cuya proyec-

ción sobre este eje es $E_x = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} s$, donde n_0 es la concentración de electrones en el plasma; e , la magnitud absoluta de la carga del electrón; y ϵ_0 , una constante eléctrica. Según la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento de los electrones del plasma en este campo eléctrico tiene la forma

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -e E_x = -\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0} s \quad \text{ó} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} s = 0,$$

donde m es la masa del electrón. Por lo tanto, los electrones del plasma efectúan oscilaciones armónicas libres de frecuencia cíclica:

$$\omega = e \sqrt{\frac{n_0}{m\epsilon_0}},$$

que recibe el nombre de *frecuencia de plasma* o de *Langmuir*.

§ IV.1.3. Oscilaciones armónicas libres en un circuito oscilante

1°. De ejemplo de circuito eléctrico en el cual se pueden producir oscilaciones eléctricas, sirve el *circuito oscilante* más simple (fig. IV.1.6), formado por un condensador de capacidad C y una bobina de inductancia L conectada en serie con aquél. Cuando se cierra el contacto del condensador, previamente cargado, con la bobina, se originan oscilaciones libres de la carga en el condensador y de la intensidad de la corriente en la bobina. El campo eléctrico alternativo se propaga en el espacio con una velocidad igual a la de la luz. Por esto, si las dimensiones lineales del circuito l no son

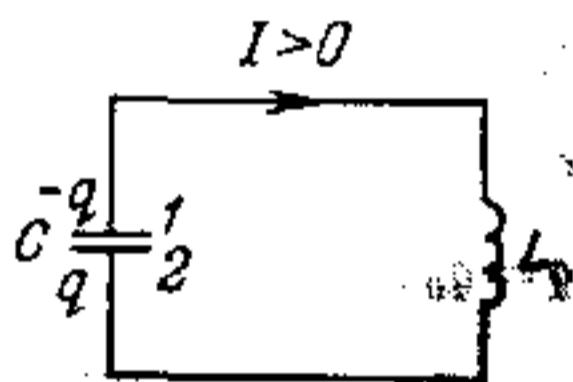


Fig. IV.1.6.

demasiado grandes ($l \ll \frac{c}{\nu}$, siendo $c = 3 \cdot 10^8$ m/s la velocidad de la luz en el vacío y ν , la frecuencia de las oscilaciones en el circuito), se puede considerar que en cada instante t la intensidad de la corriente I es igual en todas partes del circuito. Esta corriente alterna se llama *cuasiestacionaria*. De acuerdo con la ley de Ohm (III.8.2.3°) para el tramo de circuito 1-L-2 (fig. IV.1.6),

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_a \quad \text{ó} \quad IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}.$$

Aquí q y $\varphi_1 - \varphi_2 = -(q/C)$ son, respectivamente, la carga del condensador y la diferencia de potencial entre sus armaduras en el instante arbitrario t que se considera; R es la resistencia eléctrica del circuito oscilante, es decir, del tramo del circuito 1-L-2; $\mathcal{E}_a = -L (dI/dt)$, la fem de autoinducción en la bo-

bina (III.12.2.4°). De la ley de conservación de la carga eléctrica (III.1.1.3°) se deduce que la intensidad de la corriente cuasi-estacionaria en el circuito es $I = dq/dt$, por lo que la ecuación diferencial de las oscilaciones de la carga q tiene la forma

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

2°. Las oscilaciones eléctricas libres en el circuito oscilante serán armónicas si su resistencia eléctrica $R = 0$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

La frecuencia cíclica ω y el período T de estas oscilaciones satisfacen la fórmula de Thomson:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

La carga q del condensador y la intensidad de la corriente I en el circuito varían según las leyes

$$q = q_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad \text{e} \quad I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0) = \\ = I_0 \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

donde q_0 es la amplitud de la carga del condensador; $I_0 = \omega q_0 / \sqrt{LC}$, la amplitud de la intensidad de la corriente; y φ_0 , la fase inicial de las oscilaciones de la carga del condensador. La corriente en el circuito adelanta en fase a la carga del condensador en $\pi/2$.

La diferencia de potencial entre las armaduras del condensador $u = \varphi_2 - \varphi_1$ también varía según la ley armónica y coincide en fase con la carga q :

$$u = \frac{q}{C} = U_0 \operatorname{sen}(t + \varphi_0),$$

donde $U_0 = q_0/C$ es la amplitud de la diferencia de potencial. La amplitud de la intensidad de la corriente

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

La magnitud $\sqrt{L/C}$ se llama *impedancia de onda del circuito oscilante*.

3°. Cuando las oscilaciones son armónicas libres, en el circuito oscilante se produce la transformación periódica de la energía W_e del campo eléctrico del condensador en energía W_m del campo magnético de la bobina de inductancia y viceversa:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \operatorname{sen}^2 (\omega t + \varphi_0) = \frac{q_0^2}{4C} [1 - \cos (2\omega t + 2\varphi_0)],$$

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} \cos^2 (\omega t + \varphi_0) = \frac{LI_0^2}{4} [1 + \cos (2\omega t + 2\varphi_0)].$$

Por esto las oscilaciones que tienen lugar en el circuito oscilante eléctrico suelen llamarse *oscilaciones electromagnéticas del circuito*.

Los valores de W_e y W_m varían en las oscilaciones electromagnéticas armónicas entre los límites de 0 a los valores máximos respectivamente iguales a $q_0^2/2C$ y $LI_0^2/2$, con la particularidad de que $q_0^2/2C = LI_0^2/2$. Las oscilaciones de W_e y W_m están desplazadas en fase: en los instantes en que $W_e = 0$, $W_m = W_{m\text{máx}} = LI_0^2/2$ y, viceversa, cuando $W_m = 0$, $W_e = W_{e\text{máx}} = q_0^2/2C$. La energía total de las oscilaciones electromagnéticas en el circuito no varían con el tiempo:

$$W = W_e + W_m = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} = \text{const.}$$

§ IV.1.4. Composición de oscilaciones armónicas

1°. Se entiende por *composición de las oscilaciones armónicas* de un sistema la obtención de la ley de las oscilaciones resultantes de dicho sistema en aquellos casos en que éste participa simultáneamente en varios procesos oscilatorios. Se distinguen dos casos extremos: la composición de las oscilaciones de igual dirección y la composición de las oscilaciones perpendiculares entre sí. El primer caso corresponde, por ejemplo, a las oscilaciones de un peso pequeño 1 (fig. IV.1.7) que oscila respecto de otro peso también pequeño 2. El peso 1 pende del muelle a y, junto con el 2, del muelle b . Este mismo caso se realiza si se superponen las oscilaciones de las características físicas escalares de un sistema oscilante (presión, temperatura, densidad, carga eléctrica, intensidad de corriente, etc.).

2°. La composición de dos oscilaciones armónicas de igual dirección, $s_1 = A_1 \operatorname{sen} (\omega_1 t + \varphi_1)$ y $s_2 = A_2 \operatorname{sen} (\omega_2 t + \varphi_2)$, se

puede hacer aplicando el método de los diagramas vectoriales (IV.1.1.6°). En la fig. IV.1.8. se representan los vectores amplitud $A_1(t)$ y $A_2(t)$ respectivos de las oscilaciones primera y segunda en un instante t arbitrario, en que las fases de estas oscilaciones son $\Phi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_1$ y $\Phi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_2$. A las



Fig. IV.1.7

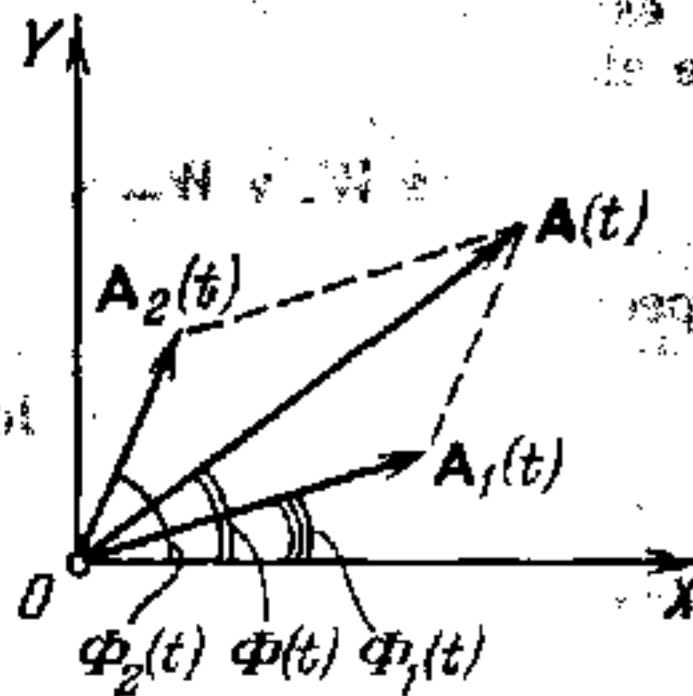


Fig. IV.1.8.

oscilaciones resultantes $s = s_1 + s_2$ les corresponde el vector $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$ cuya proyección sobre el eje vertical OY es igual a s :

$$s = A(t) \operatorname{sen} \Phi(t).$$

Por el teorema de los cosenos,

$$[A_1(t)]^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos [\Phi_2(t) - \Phi_1(t)],$$

y

$$\operatorname{tg} \Phi(t) = \frac{A_1 \operatorname{sen} \Phi_1(t) + A_2 \operatorname{sen} \Phi_2(t)}{A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Phi_2(t)}.$$

3°. Dos oscilaciones armónicas s_1 y s_2 son *coherentes* si la diferencia de fases entre ellas no depende del tiempo:

$$\frac{d}{dt} [\Phi_2(t) - \Phi_1(t)] \equiv 0 \quad \text{y} \quad \Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \text{const.}$$

Como $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$, las frecuencias cíclicas de las oscilaciones coherentes deben ser iguales, es decir, $\omega_2 = \omega_1 = \omega$. En cualquier instante la diferencia de fases de las oscilaciones coherentes es igual a la diferencia de sus fases iniciales: $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \varphi_2 - \varphi_1$. Respectivamente, las oscilaciones resultantes son también armónicas y tienen la misma frecuencia cíclica ω , o sea,

$$s = s_1 + s_2 = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0),$$

donde

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

y

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

En dependencia de la diferencia de las fases iniciales de las oscilaciones que se componen, la amplitud A de las oscilaciones resultantes varía entre los límites

$$\text{de } A = |A_1 - A_2| \text{ para } \varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi$$

$$\text{a } A = A_1 + A_2 \text{ para } \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi,$$

donde $m = 0, 1, 2, \dots$ es cualquier número entero no negativo. Si $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, se dice que las oscilaciones que se componen son *cofásicas* (o que están *en una misma fase*), y cuando $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi$, las oscilaciones que se componen están *en oposición de fase*.

4°. Las oscilaciones armónicas cuyas frecuencias son distintas ($\omega_2 \neq \omega_1$), son *incoherentes*, ya que la diferencia de sus fases, igual a $(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$, varía continuamente con el tiempo. Cuando se superponen estas oscilaciones, se obtienen oscilaciones resultantes inarmónicas. Los vectores amplitud A_1 y A_2 de las oscilaciones que se componen (fig. IV.1.8) giran con velocidades angulares distintas, de manera que el paralelogramo construido sobre ellas se deforma continuamente y su diagonal —vector A de las oscilaciones resultantes— varía de longitud y gira con velocidad angular variable.

Dos oscilaciones armónicas con distintas frecuencias cíclicas ω_1 y ω_2 se pueden considerar aproximadamente como coherentes sólo en el intervalo de tiempo Δt durante el cual la diferencia de fases de estas oscilaciones varía de un modo insignificante: $|\omega_2 - \omega_1| \Delta t \ll 2\pi$, ó $\Delta t \ll \tau_{\text{coh}}$, siendo $\tau_{\text{coh}} = 2\pi/|\omega_2 - \omega_1|$ el *tiempo de coherencia* de las oscilaciones consideradas.

5°. Las oscilaciones inarmónicas que se obtienen como resultado de la superposición de dos oscilaciones armónicas de la misma dirección, con frecuencias próximas ($|\omega_2 - \omega_1| \ll \ll \omega_1$), se llaman *batimientos* o *pulsaciones*. En este caso conviene tomar como instante de referencia del tiempo t aquel en que las fases de ambas oscilaciones s_1 y s_2 coinciden y son iguales a φ_0 . Entonces $s_1 = A_1 \text{ sen } (\omega_1 t + \varphi_0)$ y $s_2 = A_2 \text{ sen } (\omega_2 t + \varphi_0) = AC \text{ sen } [\omega_1 t + \varphi_0 + \varphi(t)]$, donde $\varphi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t$. Las oscilaciones resultantes $s = s_1 + s_2$ satisfacen la condición

$$s = A(t) \text{ sen } [\omega_1 t + \varphi_0 + \psi(t)]$$

en la que

$$[A(t)]^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi(t)$$

y

$$\text{tg } \psi(t) = \frac{A_2 \text{ sen } \varphi(t)}{A_1 + A_2 \cos \varphi(t)}$$

En particular, si $A_1 = A_2 = A_0$,

$$A(t) = 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \quad \text{y} \quad \psi(t) = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t,$$

de manera que

$$s = 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \text{ sen } \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_0 \right).$$

La magnitud $|A(t)|$, que caracteriza la amplitud de las oscilaciones durante el batimiento, varía dentro de los límites de $|A_1 - A_2|$ a $A_1 + A_2$, con una frecuencia cíclica $\Omega = |\omega_2 - \omega_1|$ que se llama *frecuencia cíclica de las pulsaciones*. Como la frecuencia del batimiento es mucho menor que la frecuencia de las oscilaciones ($\Omega \ll \omega_1$), a la magnitud variable $|A(t)|$ se le da el nombre convencional de *amplitud de batimiento*. El *período de batimiento* T_b y la *frecuencia de batimiento* ν_b constituyen

$$T_b = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{1}{\left| \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right|}$$

$$\nu_b = \frac{1}{T_b} = |\nu_2 - \nu_1|,$$

donde T_1 , ν_1 y T_2 , ν_2 son, respectivamente, los períodos y las frecuencias de las oscilaciones que se componen. El carácter de

dependencia de s respecto del tiempo t durante las pulsaciones se muestra en la fig. IV.1.9 (para el caso en que $A_1 = A_2 = A_0$).

6°. Como resultado de la composición de las oscilaciones armónicas que coinciden en dirección y que tienen frecuencias cíclicas múltiples $\omega, 2\omega, 3\omega$, etc., se obtienen oscilaciones inarmónicas periódicas cuyo período es $T = 2\pi/\omega$. A su vez, toda oscilación periódica compleja $s = f(t)$ se puede representar en

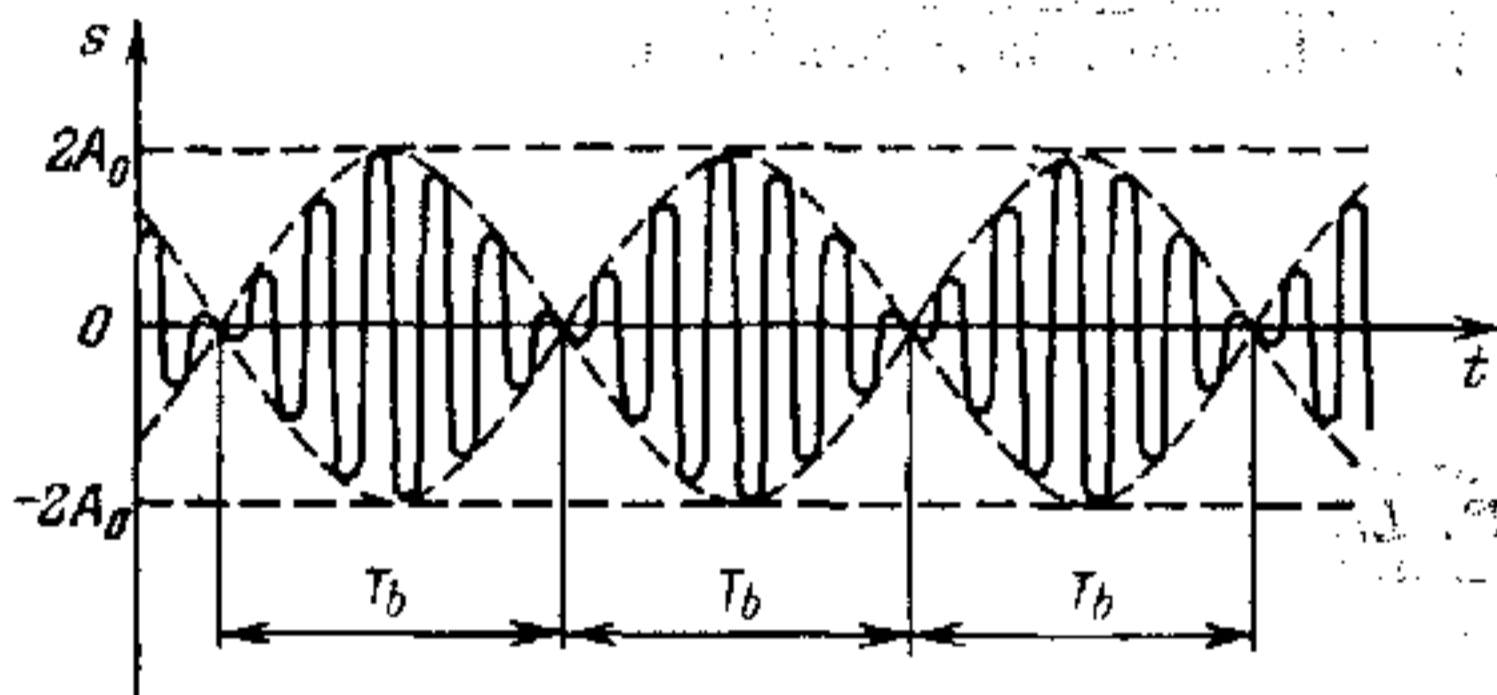


Fig. IV.1.9.

forma de la suma de las oscilaciones armónicas simples con frecuencias cíclicas múltiples de la frecuencia cíclica fundamental $\omega = 2\pi/T$, donde T es el período de las oscilaciones:

$$s = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t + \varphi_n),$$

siendo

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega t \, dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

Esta representación de la función periódica $f(t)$ se llama *desarrollo de dicha función en serie de Fourier o análisis armónico de las oscilaciones periódicas complejas*. Los términos de la serie de Fourier correspondientes a las oscilaciones armónicas con frecuencias cíclicas $\omega, 2\omega, 3\omega$, etc., se llaman *armónicas primera o fundamental, segunda, tercera*, etc. de la oscilación periódica compleja $s = f(t)$. El conjunto de estas armónicas constituye el *espectro de las oscilaciones $s = f(t)$* . La composición del espectro depende de la forma de la función periódica $f(t)$. En los casos más simples, el espectro puede estar compuesto por un número pequeño de armónicas.

Por espectro de las oscilaciones se suele entender el *espectro de sus frecuencias*, es decir, el conjunto de frecuencias de las oscilaciones armónicas simples de cuya composición se puede obtener la oscilación compleja considerada. Las oscilaciones periódicas tienen *espectros de frecuencias discretos (de rayas)*.

7°. Las oscilaciones no periódicas tienen, por regla general, *espectro de frecuencias continuo*, es decir, se pueden imaginar como el resultado de la superposición de un conjunto de oscilaciones armónicas cuyas frecuencias toman todos los valores posibles en cierto intervalo (en el caso general, de 0 a ∞). El análisis armónico de estas oscilaciones consiste en representarlas en forma de *integral de Fourier*:

$$s = f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega,$$

donde

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi.$$

Algunas oscilaciones no periódicas, llamadas *casi periódicas (cuasiperiódicas)* tienen espectro de frecuencia de rayas. Pero las frecuencias cíclicas que entran en él son inconmensurables entre sí, o sea, sus relaciones vienen expresadas por números irracionales.

8°. Se llama *modulación de las oscilaciones* la variación según una ley determinada de cualquiera de los parámetros de las oscilaciones periódicas (por ejemplo, la amplitud o la frecuencia), efectuada en un tiempo mucho mayor que el período de dichas oscilaciones.

Por ejemplo, en la *modulación de amplitud* de las *oscilaciones armónicas* $s = A_0 \text{ sen } (\omega_0 t + \varphi_0)$, las *oscilaciones moduladas* tienen la forma

$$s = A_0 [1 + b(t)] \text{ sen } (\omega_0 t + \varphi_0),$$

donde $|b(t)| < 1$.

Si la *modulación de amplitud* se realiza según la ley armónica $b(t) = b_0 \cos \Omega t$, donde $b_0 = \text{const}$ y $\Omega \ll \omega_0$, entonces

$$s = A_0 (1 + b_0 \cos \Omega t) \text{ sen } (\omega_0 t + \varphi_0).$$

Esta *oscilación modulada* tiene espectro de frecuencia de rayas, ya que se puede representar en forma de tres *oscilaciones armónicas* de frecuencias cíclicas ω_0 , $\omega_0 - \Omega$ y $\omega_0 + \Omega$ y amplitudes respectivamente iguales a A_0 , $A_0 b_0/2$ y $A_0 b_0/2$:

$$A_0 (1 + b_0 \cos \Omega t) \text{ sen } (\omega_0 t + \varphi_0) = A_0 \text{ sen } (\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{A_0 b_0}{2} \{ \text{sen } [(\omega_0 + \Omega) t + \varphi_0] + \text{sen } [(\omega_0 - \Omega) t + \varphi_0] \}.$$

En la *modulación de frecuencia* de las *oscilaciones armónicas* $s = A_0 \text{ sen } (\omega_0 t + \varphi_0)$, efectuada según la ley armónica, las *oscilaciones moduladas* tienen la forma

$$s = A_0 \text{ sen } [\omega_0 (1 + b_0 \cos \Omega t) t + \varphi_0], \text{ donde } b_0 < 1 \text{ y } \Omega \ll \omega_0.$$

Respectivamente, en la *modulación de fase* varía la fase inicial de las *oscilaciones*:

$$s = A_0 \text{ sen } [\omega_0 t + \Delta\varphi \cos \Omega t], \text{ siendo } \Omega \ll \omega_0.$$

En el caso general, las *oscilaciones* pueden ser moduladas simultáneamente en amplitud y en fase (o frecuencia). De ejemplo de *oscilaciones* así moduladas pueden servir las *pulsaciones* (p. 4°).

9°. *Composición de oscilaciones armónicas perpendiculares entre sí de igual frecuencia.* Supongamos que un punto M oscila al mismo tiempo a lo largo de los ejes de coordenadas OX y OY según las leyes $x = A_1 \text{ sen } (\omega t + \varphi_1)$ e $y = A_2 \text{ sen } (\omega t + \varphi_2)$, donde x e y son las coordenadas cartesianas del punto M . La ecuación de la trayectoria del movimiento resultante del punto M en el plano XOY se puede hallar eliminando de las expresiones para x e y el parámetro t ,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) = \text{sen}^2 (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Esta trayectoria tiene la forma de elipse (fig. IV.1.10). El punto M describe esta elipse durante un tiempo igual al período de las oscilaciones que se componen, $T = 2\pi/\omega$. Por esto el movimiento resultante del punto M se llama *oscilación polarizada elípticamente*.

La orientación en el plano XOY de los ejes de la elipse, así como sus dimensiones, dependen de las amplitudes A_1 y A_2 de las oscilaciones componentes y de la diferencia de sus fases iniciales $\varphi_2 - \varphi_1$. Si $\varphi_2 - \varphi_1 = (2m + 1)\pi/2$ y, siendo $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, los ejes de la elipse coincidirán con los ejes de coordenadas OX y OY , y las dimensiones de los semiejes serán iguales a las amplitudes A_1 y A_2 :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Si además de esto, $A_1 = A_2$, la trayectoria del punto M será una circunferencia. Este movimiento resultante del punto M recibe el

nombre de *oscilación polarizada circularmente* o de *oscilaciones polarizadas según una circunferencia*.

En los casos en que $\varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), la elipse degenera en un segmento de recta:

$$y = \pm \frac{A_2}{A_1} x.$$

El signo más corresponde a los valores pares de m , es decir, a la composición de oscilaciones colásicas (fig. IV.1.11, a), y el signo menos, a los valores impares de m , o sea, a la composición de oscilaciones que se cumplen en oposición de fase (fig. IV.1.11, b). En estos casos el punto M efectúa *oscilaciones polarizadas linealmente*. Sus oscilaciones son armónicas y tienen la frecuencia de las oscilaciones que la componen y la amplitud $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ a lo largo de una recta que forma con el eje OX un ángulo $\alpha = \text{arctg} \left(\frac{A_2}{A_1} \cos m\pi \right)$.

10°. Composición de oscilaciones perpendiculares entre sí de frecuencias cíclicas $p\omega$ y $q\omega$, donde p y q son números enteros:

$$x = A_1 \text{sen} (p\omega t + \varphi_1) \text{ e } y = A_2 \text{sen} (q\omega t + \varphi_2).$$

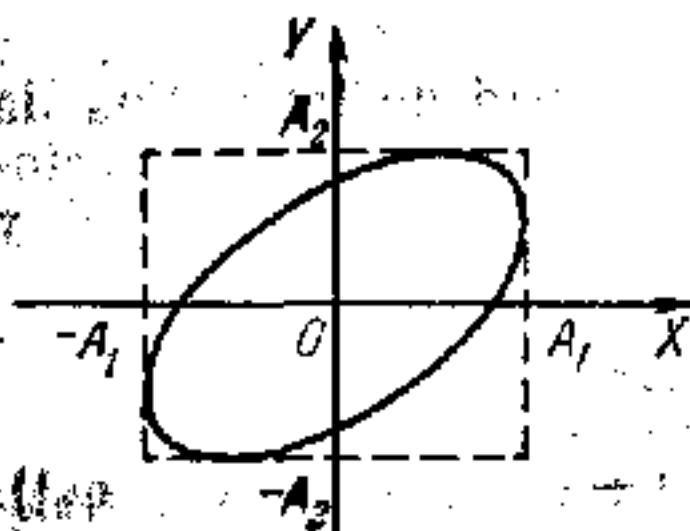


Fig. IV.1.10.

Los valores de las coordenadas x e y del punto oscilante M se repiten simultáneamente al cabo de intervalos de tiempo T_0 idénticos e iguales al mínimo común múltiplo de los períodos

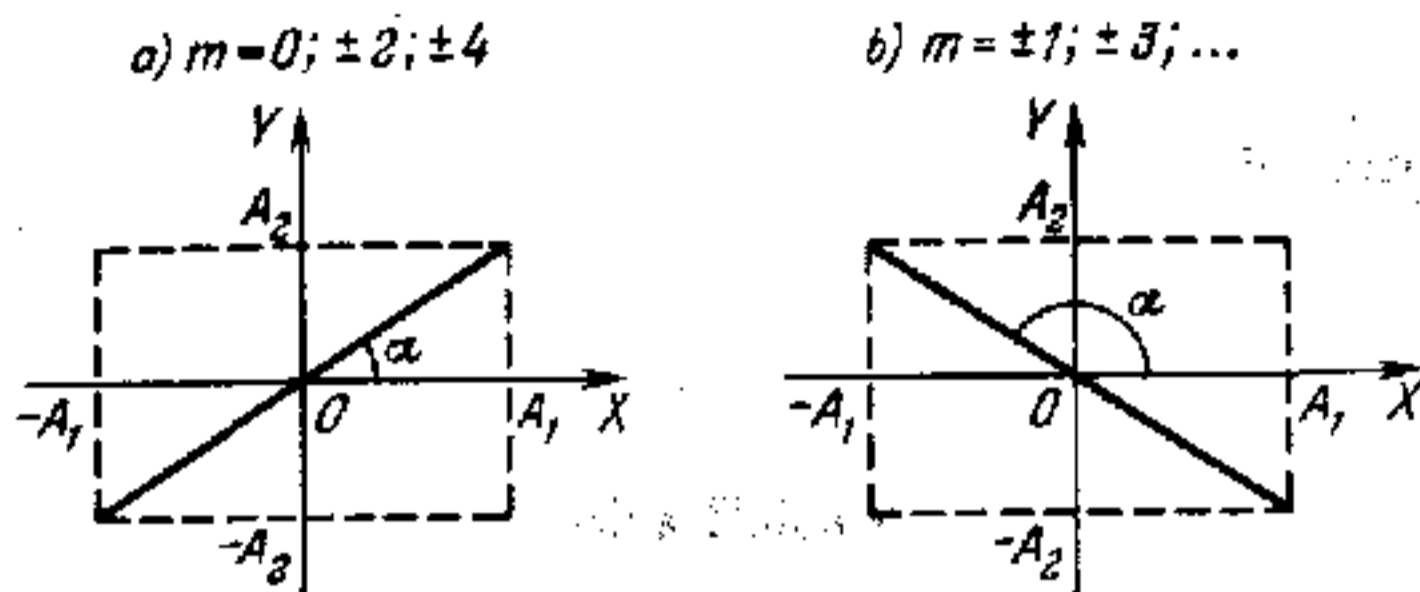


Fig. IV.1.11.

$T_1 = 2\pi/p\omega$ y $T_2 = 2\pi/q\omega$ de las oscilaciones a lo largo de los ejes OX y OY . Por esto la trayectoria del punto M es una curva cerrada cuya forma depende de la relación entre las amplitudes,

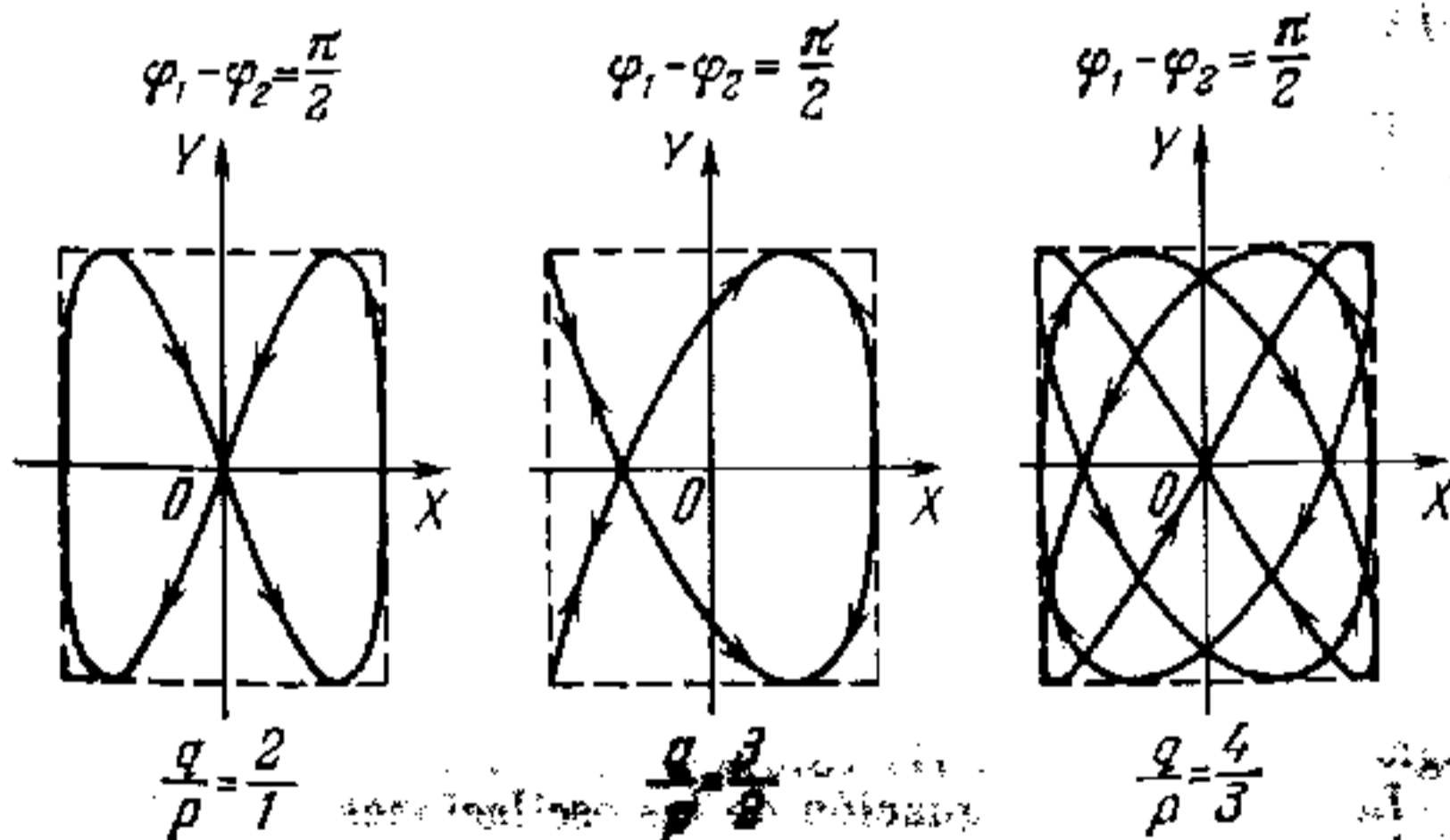
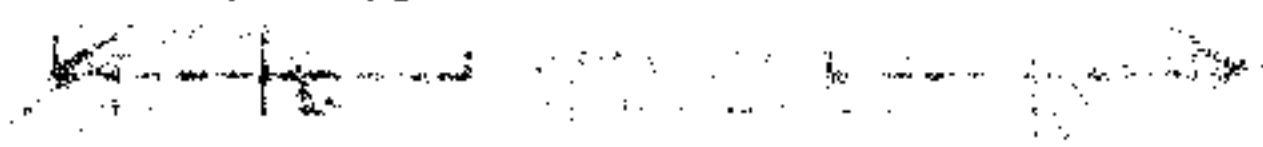


Fig. IV.1.12.

así como de las frecuencias y de las fases iniciales de las oscilaciones componentes. Estas trayectorias cerradas del punto M , que realiza al mismo tiempo oscilaciones armónicas en dos direcciones perpendiculares entre sí, se llaman *figuras de Lissa-*

jous. Las figuras de Lissajous se inscriben en un rectángulo cuyo centro coincide con el origen de coordenadas y cuyos lados son paralelos a los ejes OX y OY y se encuentran a ambos lados de ellos a distancias respectivamente iguales a A_2 y A_1 . La relación entre las frecuencias $p\omega$ y $q\omega$ de las oscilaciones que se componen, es igual a la relación entre el número de puntos de tangencia de las figuras de Lissajous respectivas con el lado del rectángulo paralelo al eje OY y con el lado paralelo al eje OX . En la fig. IV.1.12 se reproducen las figuras de Lissajous de tres valores distintos de la relación q/p (2:1, 3:2 y 4:3) para una diferencia de fases iniciales $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$.



Capítulo IV.2. Oscilaciones amortiguadas y forzadas

§ IV.2.1. Oscilaciones amortiguadas

1°. Se llama *amortiguación de las oscilaciones* su debilitamiento paulatino con el tiempo, debido a la pérdida de energía del sistema oscilante. Las oscilaciones libres de los sistemas reales siempre se amortiguan. La amortiguación de las oscilaciones mecánicas libres se debe principalmente al rozamiento y a la excitación de ondas elásticas (IV.3.1.3°) en el medio circundante. En los sistemas oscilantes eléctricos, la amortiguación es provocada por las pérdidas térmicas en los conductores que forman el sistema o que se encuentran en su campo eléctrico alternativo, por las pérdidas de energía en la radiación de ondas electromagnéticas (IV.4.1.1°) y por las pérdidas térmicas en los dieléctricos y ferromagnéticos a causa de la histéresis eléctrica y magnética (III.5.4.5°; III.13.5.2°).

La ley de amortiguación de las oscilaciones depende de las propiedades del sistema oscilante. El sistema se llama *lineal* si los parámetros que caracterizan las propiedades físicas del sistema que tienen importancia en el proceso que se considera, no varían en el transcurso de éste. Los sistemas lineales se definen por ecuaciones diferenciales lineales. Por ejemplo, un péndulo de resorte (IV.1.2.3°) que se mueve en un medio viscoso es un sistema lineal si el coeficiente de resistencia del medio y la elasticidad del muelle no dependen de la velocidad y el despla-

zamiento del péndulo. Un circuito oscilante eléctrico (IV.1.3.1°) se puede considerar como un sistema lineal si su resistencia eléctrica R , su capacidad C y su inductancia L no dependen de la corriente en el circuito ni de la tensión. En la mayoría de los casos, los sistemas oscilantes reales se asemejan bastante, en cuanto a sus propiedades, a los sistemas lineales.

2°. La ecuación diferencial de las oscilaciones amortiguadas de un sistema lineal tiene la forma

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0.$$

Aquí s es la característica física del sistema que varía durante las oscilaciones; $\beta = \text{const} > 0$ es el *coeficiente de amortiguamiento*, y ω_0 , la frecuencia cíclica de las oscilaciones libres *no amortiguadas* de este mismo sistema, es decir, en ausencia de pérdidas de energía (para $\beta = 0$).

Ejemplo 1. *Oscilaciones amortiguadas libres de un péndulo de resorte* (IV.1.2.3°). Sobre un péndulo de masa m que realiza oscilaciones lineales a lo largo del eje OX bajo la acción de la fuerza elástica de un muelle, también actúa la fuerza de resistencia $F_{\text{res}} = -bv$, en la que v es la velocidad del péndulo, y $b = \text{const} > 0$ es el *coeficiente de resistencia*. La ecuación diferencial de las oscilaciones amortiguadas libres de este péndulo es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx \quad \text{ó} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

en la que $\beta = b/2m$ y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Ejemplo 2. *Oscilaciones amortiguadas libres en un circuito oscilante eléctrico*. La resistencia eléctrica de un circuito real $R \neq 0$, y la ecuación diferencial de las oscilaciones en dicho circuito tiene la forma (IV.1.3.1°)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

donde $\beta = R/2L$ y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

3°. Si la amortiguación no es demasiado grande ($\beta < \omega_0$), la dependencia de s respecto de t que satisface la ecuación de las oscilaciones amortiguadas (p. 2°), tiene la forma

$$s = A_0 e^{-\beta t} \text{sen}(\omega t + \psi_0).$$

Aquí $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, y las magnitudes constantes A_0 y ψ_0 dependen de las condiciones iniciales, es decir, de los valores

de s y ds/dt en el instante inicial ($t = 0$). La gráfica de la dependencia de s respecto de t cuando $\psi_0 = 0$, se da en la fig. IV.2.1.

Las oscilaciones amortiguadas no son periódicas (IV.1.1.2°). Por ejemplo, el valor máximo de la magnitud oscilante s , alcanzado en un determinado instante t_1 , en lo sucesivo (cuando $t > t_1$) nunca vuelve a repetirse. Pero en estas oscilaciones, la

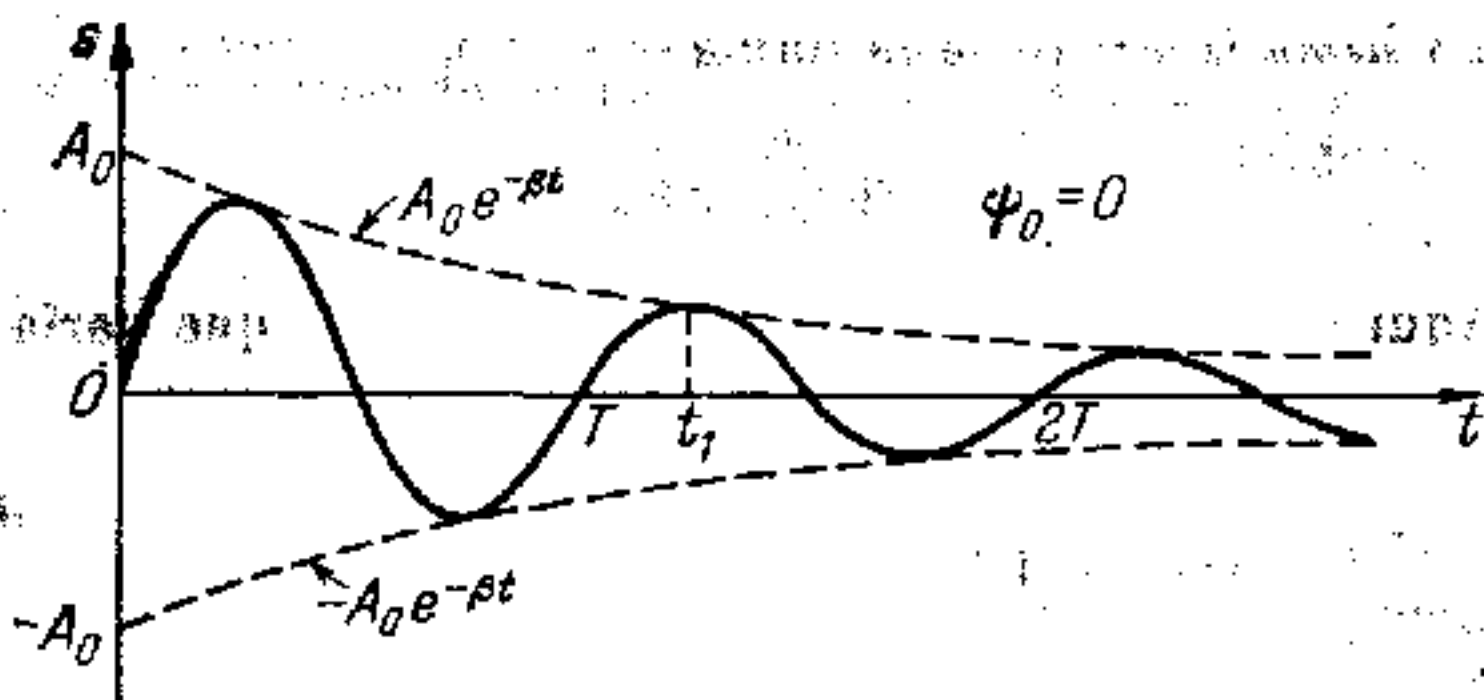


Fig. IV.2.1.

magnitud s se anula variando en un mismo sentido (por ejemplo, decreciendo) y también alcanza valores máximos y mínimos con intervalos de tiempo iguales:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Por esto las magnitudes T y ω se llaman convencionalmente *período (período convencional)* y *frecuencia cíclica (frecuencia cíclica convencional)* de las oscilaciones amortiguadas.

La magnitud

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

recibe el nombre de *amplitud de las oscilaciones amortiguadas*, y A_0 , el de *amplitud inicial*. La amplitud de las oscilaciones amortiguadas disminuye en función del tiempo, con tanta más rapidez cuanto mayor es el coeficiente de amortiguación β .

El intervalo de tiempo $\tau = 1/\beta$, durante el cual la amplitud de las oscilaciones amortiguadas disminuye e veces, se denomina *tiempo de relajación*.

4°. Se da el nombre de *decremento logarítmico de amortiguación* a la magnitud adimensional δ igual al logaritmo natural de

la relación entre los valores de las amplitudes de las oscilaciones amortiguadas en los instantes t y $t + T$ (T es el período convencional de las oscilaciones),

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

donde N es el número de oscilaciones con el que la amplitud disminuye e veces.

Entre la frecuencia cíclica ω de las oscilaciones amortiguadas del sistema, y el decremento logarítmico de amortiguación δ , existe la relación siguiente:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}.$$

5°. Se llama *factor de calidad de un sistema oscilante* la magnitud física adimensional Q igual al producto de 2π por la razón de la energía $W(t)$ del sistema oscilante en un instante arbitrario t al decremento de esta energía durante el intervalo de tiempo de t a $t + T$, o sea, durante un período convencional de las oscilaciones amortiguadas:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}$$

Como la energía $W(t)$ es proporcional al cuadrado de la amplitud de las oscilaciones $A(t)$,

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}$$

Cuando los valores del decremento logarítmico de amortiguación δ son pequeños, el factor de calidad del sistema oscilante $Q = \pi/\delta$. En este caso el período convencional de las oscilaciones amortiguadas T es prácticamente igual al período T_0 de las oscilaciones no amortiguadas libres, de manera que

$Q = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}$. Por ejemplo, el factor de calidad de un circuito

oscilante eléctrico (IV.1.3.1°) $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, y el de un péndulo

de resorte (IV.2.1.2°) $Q = \frac{1}{b} \sqrt{km}$.

6°. Cuando aumenta el coeficiente de amortiguación β , el período convencional de las oscilaciones amortiguadas crece y

se hace infinito para $\beta = \omega_0$. Si $\beta > \omega_0$, la ecuación diferencial del movimiento del sistema,

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0,$$

tiene la solución general siguiente:

$$s = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

donde $\alpha_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ y $\alpha_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, y C_1 y C_2 son coeficientes constantes que dependen de las condiciones inicia-

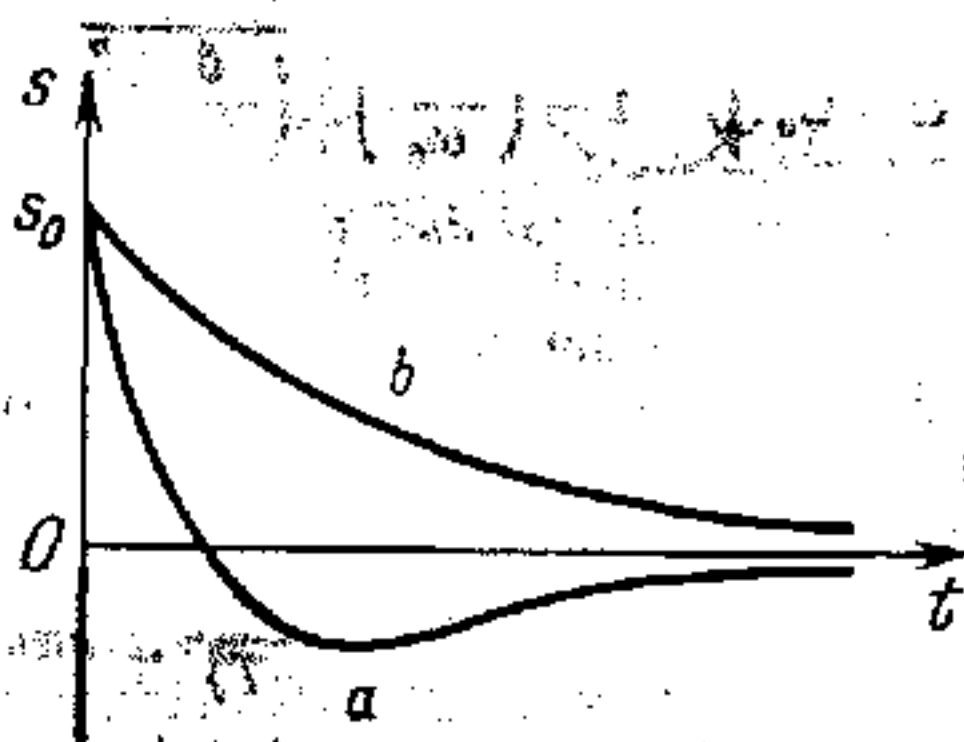


Fig. IV.2.2.

les. Si los valores iniciales (en el instante $t=0$) son $s=s_0$ y $\frac{ds}{dt} = v_0$, entonces

$$C_1 = -\frac{\alpha_2 s_0 + v_0}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{\alpha_1 s_0 + v_0}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Este movimiento del sistema no tiene carácter oscilatorio y se llama *aperiódico*. En dependencia de las condiciones iniciales son posibles dos tipos de movimiento aperiódico de un sistema (fig. IV.2.2). El movimiento del tipo *a* se efectúa en los casos en que s_0 y v_0 tienen signos contrarios y $|v_0| > \alpha_1 |s_0|$. En todos los demás casos se realiza el movimiento del tipo *b*.

§ IV.2.2. Oscilaciones mecánicas forzadas

1°. Una fuerza exterior variable aplicada a un sistema y que provoque en él oscilaciones mecánicas forzadas, se llama *fuerza impulsante* o *excitatriz*.

La ecuación diferencial de las oscilaciones forzadas del sistema lineal más simple (IV.2.1.1°)—péndulo de resorte (IV.2.1.2°)—, que tienen lugar a lo largo del eje OX bajo la influencia de una fuerza exterior variable $F(t)$, es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_x(t).$$

Si $F_x(t)$ es función periódica del tiempo, después de aplicarle esta fuerza al péndulo, al principio se produce un *régimen transitorio de oscilaciones forzadas*. El péndulo participa simultáneamente en dos oscilaciones:

$$x = x_1(t) + x_2(t).$$

El primer término corresponde a las oscilaciones amortiguadas libres*) del péndulo (IV.2.1.3°):

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \psi_0),$$

donde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

El segundo término corresponde a las oscilaciones periódicas no amortiguadas del péndulo, de frecuencia igual a la de la fuerza excitatriz $F_x(t)$.

El valor de la amplitud de $x_1(t)$, igual a $A_0 e^{-\beta t}$, disminuye más o menos rápidamente después de comenzar las oscilaciones forzadas: durante el tiempo $\tau_0 = 4,6/\beta$, el valor de $x_1(t)$ disminuye 100 veces. Por consiguiente, al cabo de cierto tiempo de haber comenzado las oscilaciones ($\tau \sim \tau_0$), las oscilaciones libres del péndulo cesan prácticamente: $x(t) \approx x_2(t)$. El péndulo pasa al estado de *oscilaciones forzadas estacionarias*, que se realizan con la frecuencia de la fuerza excitatriz.

2°. Si la fuerza excitatriz varía según la ley armónica, o sea, $F_x = F_0 \cos \Omega t$, las oscilaciones forzadas estacionarias del

*) Se supone que $\beta < \omega_0$. En el caso contrario el movimiento libre del péndulo sería aperiódico (IV.2.1.6°), es decir, $x_1(t) = C_1 \exp[-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t] + C_2 \exp[-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t]$.

péndulo serán también armónicas y tendrán la misma frecuencia:

$$x = A \cos (\Omega t + \varphi_0).$$

La amplitud A de estas oscilaciones y el desfase φ_0 entre la elongación y la fuerza excitatriz dependen de la relación

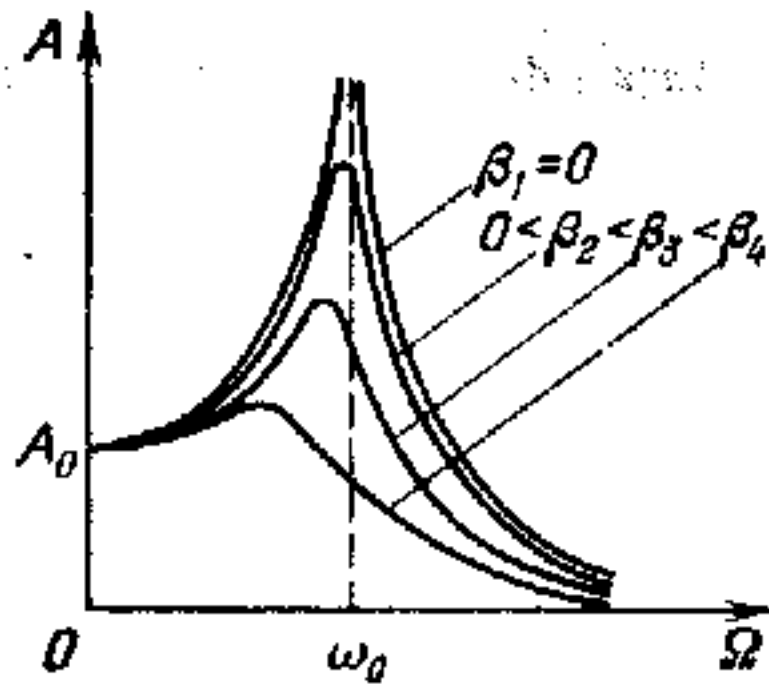


Fig. IV.2.3.

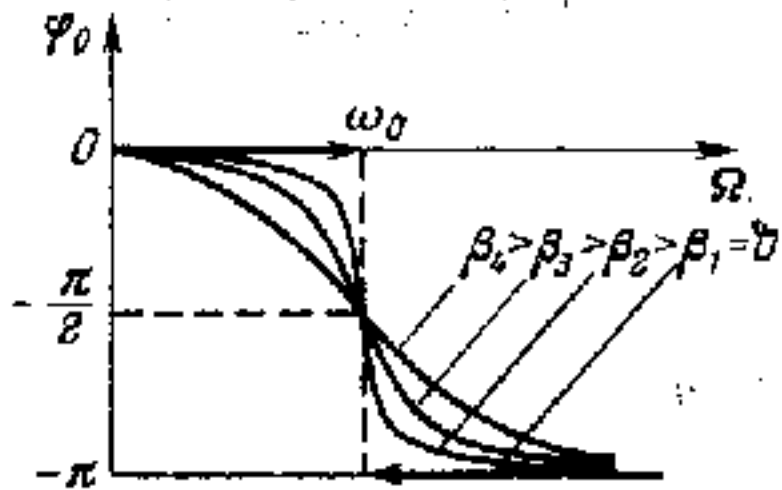


Fig. IV.2.4.

entre las frecuencias cíclicas de las oscilaciones forzadas Ω y de las oscilaciones libres no amortiguadas del péndulo ω_0 :

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad \text{y} \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Cuando $\Omega = 0$ se obtiene $\varphi_0(0) = 0$ y $A(0) = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ es la *elongación o desplazamiento estático* del péndulo de la posición de equilibrio bajo la acción de la fuerza constante $F_x = F_0$. Si $\Omega \rightarrow \infty$, la amplitud $A(\Omega) \rightarrow 0$ y $\text{tg } \varphi_0 \rightarrow 0$ y $\varphi_0 \rightarrow -\pi$. Las gráficas de las dependencias de $A(\Omega)$ y $\varphi_0(\Omega)$ para diversos valores del coeficiente de amortiguación β , se muestran en la fig. IV.2.3 y en la fig. IV.2.4.

3°. La amplitud del desplazamiento en el caso de las oscilaciones armónicas forzadas estacionarias del péndulo, alcanza el máximo cuando la frecuencia cíclica de las oscilaciones es

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2},$$

donde ω es la frecuencia cíclica de las oscilaciones amortiguadas libres del péndulo (IV.2.1.3°). La frecuencia Ω_r se llama *frecuencia de resonancia*.

La amplitud máxima

$$A_{\text{máx}} = A(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\beta\omega} = \frac{\pi F_0}{m\delta\omega^2},$$

donde δ es el decremento logarítmico de amortiguación (IV.2.1.4°). Si $\beta \ll \omega_0$, entonces $\Omega_r \approx \omega_0$, $\varphi_0(\Omega_r) \approx -\pi/2$ y $A_{\text{máx}} \approx QA_0$, donde $Q \approx \pi/\delta$ es el factor de calidad del péndulo (IV.2.1.5°), y A_0 , el desplazamiento estático (p. 2°).

El crecimiento brusco de la amplitud de las oscilaciones mecánicas forzadas, al aproximarse la frecuencia cíclica de la fuerza excitatriz al valor Ω_r , se conoce con el nombre de fenómeno de *resonancia mecánica*. Respectivamente, las gráficas de la dependencia de A respecto de Ω , representadas en la fig. IV.2.3; se llaman *curvas de resonancia*.

A medida que aumenta el coeficiente de amortiguación β , los picos de las curvas de resonancia se van suavizando rápidamente (para valores pequeños de β la amplitud $A_{\text{máx}} \sim 1/\beta$) y la frecuencia de resonancia Ω_r disminuye lentamente.

4°. La velocidad del péndulo cuando las oscilaciones armónicas forzadas son estables constituye

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) = A_v \cos(\Omega t + \alpha).$$

Aquí $A_v = A\Omega$ y $\alpha = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ son la amplitud de la velocidad y el desfase entre la velocidad y la fuerza excitatriz, siendo

$$A_v = \frac{F_0\Omega}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{m \sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{\Omega^2} + 4\beta^2}}$$

y

$$\text{tg } \alpha = -\text{ctg } \varphi_0 = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\beta\Omega}.$$

La amplitud de la velocidad es máxima para $\Omega = \omega_0$ e igual a

$$(A_v)_{\text{máx}} = A_v(\omega_0) = \frac{F_0}{2m\beta}.$$

En este caso $\alpha = 0$, es decir, la velocidad del péndulo en una fase oscila con la fuerza excitatriz. Cuando $\Omega \rightarrow \infty$, la amplitud $A_v \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow -\pi/2$, y cuando $\Omega \rightarrow 0$, la amplitud $A_v \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow \pi/2$.

5°. La aceleración del péndulo cuando las oscilaciones armónicas forzadas son estables constituye

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0) = A_a \cos(\Omega t + \gamma).$$

Aquí $A_a = A\Omega^2$ y $\gamma = \varphi_0 + \pi$ son, respectivamente, la amplitud de la aceleración y el desfase entre la aceleración y la fuerza excitatriz, siendo

$$A_a = \frac{F_0 \Omega^2}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{F_0}{m \sqrt{\left[\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 - 1\right]^2 + \left(\frac{2\beta}{\Omega}\right)^2}}.$$

La amplitud de la aceleración es máxima para

$$\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\right).$$

Cuando $\Omega = 0$, la amplitud $A_a = 0$, y cuando $\Omega \rightarrow \infty$, la amplitud de la aceleración tiende al valor $A_a(\infty) = F_0/m$.

6°. En las oscilaciones forzadas estables, las pérdidas de energía del sistema oscilante, debidas a las fuerzas disipativas (I.3.1.7°), se compensan totalmente a expensas del trabajo que realiza sobre dicho sistema la fuerza excitatriz. Por ejemplo, el trabajo realizado durante una oscilación completa por la fuerza de resistencia que actúa sobre un péndulo de resorte, constituye

$$A_1 = -b \int_0^T \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = -2m\beta A^2 \Omega^2 \int_0^T \sin^2(\Omega t + \varphi_0) dt = -m\beta A^2 \Omega^2 T,$$

donde $b = 2m\beta$ es el coeficiente de resistencia (IV.2.1.2°).

El trabajo que realiza durante este mismo tiempo la fuerza excitatriz $F_x = F_0 \cos \Omega t$, es

$$A_2 = F_0 \int_0^T \frac{dx}{dt} \cos \Omega t dt = -A\Omega F_0 \int_0^T \cos \Omega t \sin(\Omega t + \varphi_0) dt = \\ = -\frac{1}{2} A\Omega F_0 \sin \varphi_0 = -A_1,$$

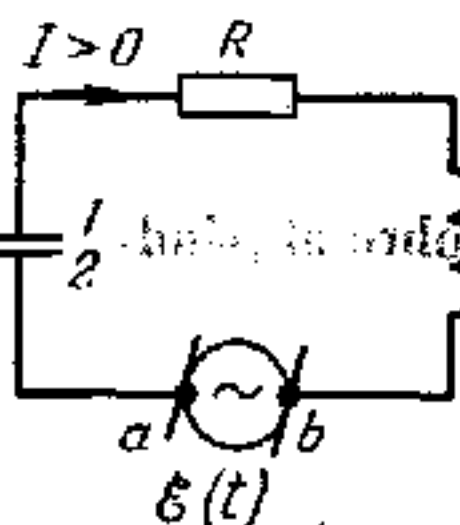
ya que $\sin \varphi_0 = -2m\beta A\Omega/F_0$.

7°. Si la fuerza excitatriz que actúa sobre el péndulo de resorte varía periódicamente, pero no según la ley armónica, la misma se puede representar en forma de la suma de las armónicas de esta fuerza (IV.1.4.6°). Dichas armónicas tienen distintas amplitudes, fases iniciales y frecuencias cíclicas múltiples de $\Omega = 2\pi/T$, donde T es el período de variación de la fuerza excitatriz. Como el péndulo es un sistema oscilante lineal (IV.2.1.1°), cada armónica de la fuerza excitatriz actúa sobre él como si las demás armónicas no existieran. Por esto, las oscilaciones forzadas estables del péndulo provocadas por una fuerza excitatriz periódica arbitraria, se pueden considerar como resultado de la superposición de las oscilaciones forzadas estables de este péndulo, debidas a la acción de cada una de las armónicas de la fuerza excitatriz tomada aisladamente. La «aportación» de las diversas armónicas de la fuerza a la oscilación resultante, depende de sus frecuencias y amplitudes. En virtud del fenómeno de resonancia, sólo desempeñan un papel importante las armónicas de la fuerza excitatriz cuyas frecuencias cíclicas se asemejan a la frecuencia de resonancia del péndulo (p. 3°). Si el coeficiente de amortiguación del péndulo β es pequeño, éste puede efectuar oscilaciones forzadas estables semejantes a las oscilaciones armónicas, incluso en los casos en que la fuerza excitatriz se diferencia mucho de la fuerza armónica. Como ejemplo de tales oscilaciones forzadas pueden servir las oscilaciones de un péndulo que periódicamente recibe acciones externas de corta duración en forma de impulsos dirigidos en un mismo sentido y que se repiten al cabo de intervalos de tiempo iguales entre sí y equivalentes al período de las oscilaciones libres del péndulo.

§ IV.2.3. Oscilaciones eléctricas forzadas

1°. Para producir oscilaciones forzadas en un circuito oscilante eléctrico (IV.1.3.1°) hay que incluir en él una fuente de energía eléctrica cuya fem \mathcal{E} varíe con el tiempo (fig. IV.2.5.)

En electrotecnia las fuentes de energía eléctrica, que se caracterizan por una fem y una resistencia eléctrica interna, se llaman *fuentes de fem (fuentes de tensión)*. Según la ley de Ohm para el trozo de circuito 1—R—L—2 (III.8.2.3°), la corriente cuasiestacionaria (IV.1.3.1°) que aparece en el circuito durante las oscilaciones forzadas, es



$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 - L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}(t).$$

Fig. IV.2.5.

Aquí $\varphi_2 - \varphi_1 = q/C$ es la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador; q , la carga de éste, y la resistencia eléctrica interna de la fuente de fem se considera insignificante en comparación con R (esta fuente de fem se llama *ideal*). De la ley de conservación de la carga eléctrica

(III.1.1.3°) se deduce que $I = dq/dt$. Por esto la ecuación diferencial de las oscilaciones eléctricas forzadas en el circuito se puede representar de una forma análoga a la ecuación de las oscilaciones mecánicas forzadas (IV.2.2.1°):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L} \mathcal{E}(t).$$

Aquí $\beta = R/2L$ es el coeficiente de amortiguación de las oscilaciones libres en el circuito, y $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ es la frecuencia cíclica de las oscilaciones libres no amortiguadas (es decir, cuando $R = 0$).

2°. Si la fem excitatriz $\mathcal{E}(t)$ varía según la ley armónica: $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t$, cuando las oscilaciones forzadas son estables (IV.2.2.1°), la carga del condensador oscila armónicamente con la misma frecuencia cíclica Ω :

$$q = q_0 \cos(\Omega t + \varphi_0).$$

La amplitud de q_0 y la fase inicial φ_0 se hallan por las fórmulas

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\Omega \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

y

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{R}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}} = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Cuando $\Omega = 0$, la fase $\varphi_0(0) = 0$ y $q_0(0) = \mathcal{E}_0 C$ es la carga del condensador a diferencia de potencial constante entre sus armaduras, igual a \mathcal{E}_0 . Cuando $\Omega \rightarrow \infty$, la amplitud de

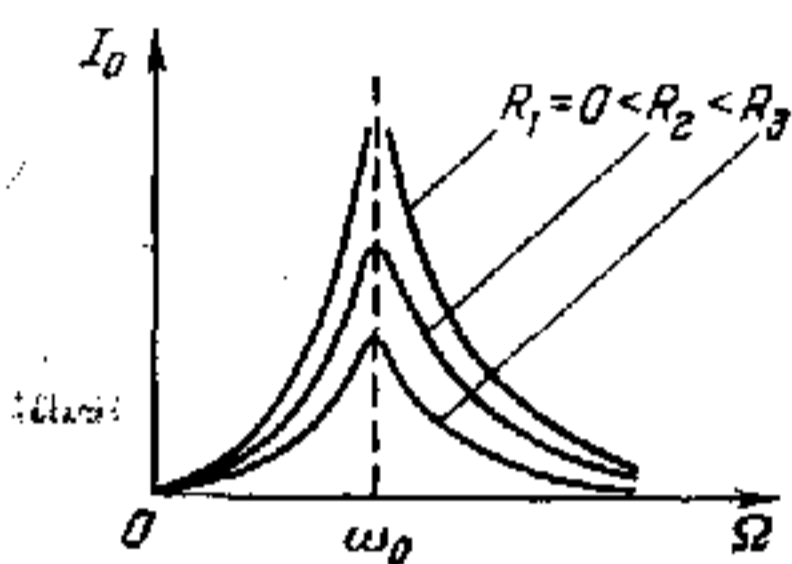


Fig. IV.2.6.

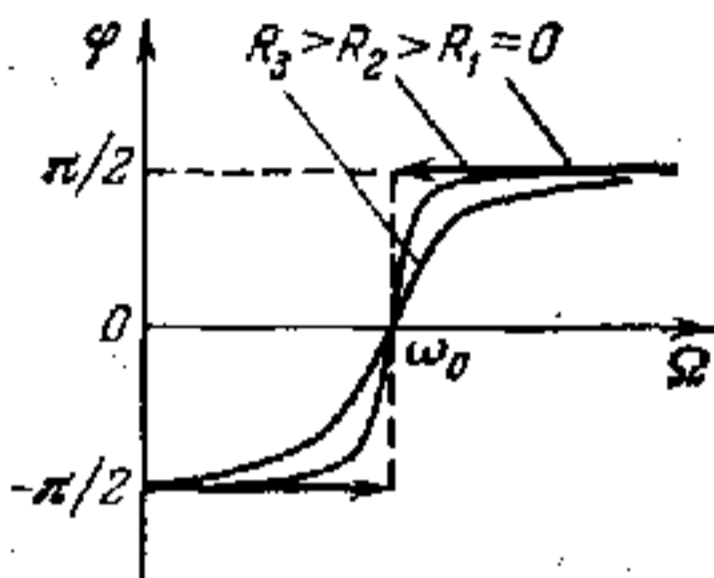


Fig. IV.2.7.

$q_0 \rightarrow 0$ y $\varphi_0 \rightarrow -\pi$. La gráfica de la dependencia de φ_0 respecto de Ω se muestra en la fig. IV.2.4, y la de la dependencia de q_0 respecto de Ω , en la fig. IV.2.3, donde $A = q_0$ y $A_0 = q_0(0) = \mathcal{E}_0 C$.

3°. La intensidad de la corriente durante las oscilaciones forzadas estables en el circuito constituye

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \Omega \operatorname{sen}(\Omega t + \varphi_0) = I_0 \cos(\Omega t - \varphi)$$

La amplitud de la corriente $I_0 = q_0 \Omega$ y la fase inicial $-\varphi = \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ se hallan por medio de las fórmulas

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}$$

Las gráficas de la dependencia de I_0 respecto de Ω para distintos valores de R , llamadas *curvas de resonancia del circuito oscilante*, se dan en la fig. IV.2.6, y las gráficas de la dependencia de φ respecto de Ω , en la fig. IV.2.7. La frecuencia cíclica de re-

sonancia Ω_r , correspondiente al máximo de la amplitud de la corriente en el circuito durante las oscilaciones forzadas, no depende de R :

$$\Omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

La amplitud de la intensidad de la corriente para la resonancia $I_0(\Omega_r) = \mathcal{E}_0/R$, y el desfase entre la corriente y la fem $\varphi(\Omega_r) = 0$. Si $\Omega < \omega_0$, entonces $\varphi < 0$, es decir, la corriente adelanta en fase a la fem y este avance será tanto mayor cuanto menor sea Ω ($\varphi = -\pi/2$ para $\Omega = 0$). Si $\Omega > \omega_0$, será $\varphi > 0$, o sea, la corriente en fase se retrasará de la fem y este retraso será tanto mayor cuanto mayor sea Ω ($\varphi \rightarrow \pi/2$ cuando $\Omega \rightarrow \infty$).

4°. La diferencia de potencial en los bornes a y b de una fuente ideal de fem armónica (fig. IV.2.5) es igual a su fem:

$$u = \varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t.$$

La caída de potencial en cada una de las partes—condensador de capacidad C , resistencia R y bobina de inductancia L —del circuito de corriente alterna sinusoidal, $I = I_0 \cos(\Omega t - \varphi)$, representado en la fig. IV.2.5, constituye

$$u_C = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C} = U_C \cos\left(\Omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$u_R = IR = U_R \cos(\Omega t - \varphi),$$

$$u_L = L \frac{dI}{dt} = U_L \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Las oscilaciones de u_R coinciden en fase con las oscilaciones de la corriente I en la red; u_L tiene un avance de fase de $\pi/2$ respecto de la corriente, y u_C , un retardo de fase de $\pi/2$, siendo

$$u_C + u_R + u_L = u = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t.$$

5°. Los valores de las amplitudes de u_C , u_L y u_R son, respectivamente,

$$U_C = x_C I_0, \quad U_L = x_L I_0 \quad \text{y} \quad U_R = R I_0,$$

donde $x_C = 1/\Omega C$ es la capacitancia del circuito, y $x_L = \Omega L$, la inductancia del mismo. La magnitud $x = x_L - x_C = \Omega L - \frac{1}{\Omega C}$

se llama *reactancia del circuito*; R , *resistencia óhmica*; y $z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$, *impedancia*.

Las fórmulas del p. 3º para la amplitud de la corriente sinusoidal en el circuito y para la fase inicial de esa corriente, también se pueden escribir de la forma siguiente: $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{z}$

y $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{R}$, siendo $\cos \varphi = \frac{R}{z}$ y $\operatorname{sen} \varphi = \frac{x}{z}$.

Durante la resonancia $\Omega = 1/\sqrt{LC}$ y $x_L = x_C$, de manera que la reactancia del circuito se anula y la impedancia alcanza el valor mínimo, igual a su resistencia óhmica R :

$$x(\Omega_r) = 0 \text{ y } z(\Omega_r) = z_{\min} = R.$$

En este caso $U_R = \mathcal{E}_0$ y $U_C = U_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\mathcal{E}_0}{R}$.

6º. Se llama *valor efectivo o eficaz* de una corriente periódica (y respectivamente de su fem, tensión, etc.) el valor cuadrático medio de dicha corriente durante el período T de su variación:

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt}$$

Para la corriente sinusoidal y la fem sinusoidal,

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \text{ y } \mathcal{E}_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}.$$

El trabajo elemental que realiza la corriente sinusoidal durante el pequeño espacio de dt en el circuito representado en la fig. IV.2.5, constituye

$$\delta A = Iu dt = I_0 \mathcal{E}_0 \cos(\Omega t - \varphi) \cos \Omega t dt.$$

La potencia instantánea de la corriente en el circuito es

$$N = \frac{\delta A}{dt} = Iu = I_0 \mathcal{E}_0 \cos(\Omega t - \varphi) \cos \Omega t.$$

El valor medio durante un período de potencia instantánea se llama *potencia activa* P de la corriente en el circuito

eléctrico:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T N dt = \frac{1}{2} I_0 \mathcal{E}_0 \cos \varphi = I_{ef} \mathcal{E}_{ef} \cos \varphi.$$

El factor $\cos \varphi$ se llama *factor de potencia*. Como $I_{ef} = \mathcal{E}_{ef}/z$ y $\cos \varphi = R/z$, tenemos que

$$P = \frac{R}{z^2} \mathcal{E}_{ef}^2.$$

Durante la resonancia, $z = R$ y la potencia activa es máxima:

$$P = \frac{\mathcal{E}_{ef}^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R}.$$

Capítulo IV.3. Ondas elásticas

§ IV.3.1. Ondas longitudinales y transversales en un medio elástico

1°. Un cuerpo se llama *elástico* y sus deformaciones, provocadas por acciones externas, se denominan *elásticas*, si éstas desaparecen totalmente una vez que cesen dichas acciones. De acuerdo con la *ley de Hooke*, las deformaciones elásticas son directamente proporcionales a las acciones externas que las provocan, es decir, dependen de ellas linealmente. Para deformaciones bastante pequeñas, todos los cuerpos se pueden considerar prácticamente elásticos.

Las propiedades elásticas de los cuerpos dependen del carácter de movimiento térmico de las moléculas y de las fuerzas con que éstas interaccionan. Por ejemplo, un cuerpo gaseoso cambia de forma sin dificultad y se adapta a la forma del recipiente que lo contiene, o sea, el gas no posee *elasticidad de forma*. Pero al mismo tiempo el gas posee elasticidad de volumen, es decir, capacidad para oponerse al cambio de volumen. Esta propiedad del gas se debe al movimiento térmico de sus moléculas y se pone de manifiesto en la variación de la presión p del mismo cuando cambia su volumen V . Por la *ley de Hooke para*

la *deformación volumétrica*, la variación dp de la presión del gas cuando el cambio de volumen dV es pequeño, es directamente proporcional a la deformación relativa de ese volumen:

$$dp = -K \frac{dV}{V},$$

donde K es el *módulo de elasticidad volumétrica* del gas. Para un gas perfecto (II.1.4.1°), el valor de K depende de la forma del proceso termodinámico de compresión (o expansión) del mismo. Si la variación del volumen del gas es muy lenta, el proceso se puede considerar isotérmico (II.1.3.7°), y si es muy rápida, adiabático (II.1.3.7°). En el primer caso $K = p$, y en el segundo $K = \kappa p$, donde κ es el exponente o índice adiabático (II.1.3.11°).

2°. La elasticidad de un sólido cristalino se debe a las fuerzas de atracción y repulsión mutua de las partículas (iones, átomos o moléculas) que forman el cuerpo y que efectúan oscilaciones térmicas desordenadas en torno a los nudos de la red cristalina. Las fuerzas de interacción de las partículas dificultan las deformaciones de la red cristalina relacionadas tanto con la variación del volumen del cuerpo como con el cambio de su forma. Por esto los sólidos, además de la elasticidad de volumen, poseen elasticidad de forma, que se manifiesta en su resistencia a la deformación por cizallamiento (VII.1.3.9°).

La elasticidad de los líquidos también se debe a las fuerzas intermoleculares. Pero en virtud de que la duración media τ de la existencia sedentaria de las moléculas de los líquidos (II.6.2.4°) es muy pequeña, éstos, de un modo semejante a los gases, sólo tienen elasticidad de volumen. Los líquidos únicamente ponen de manifiesto la elasticidad de forma, respecto de las deformaciones variables de frecuencia ultraelevada, cuyo período es del orden de τ o menor.

3°. Se llaman *ondas elásticas* o *mecánicas* las perturbaciones mecánicas (deformaciones) que se propagan en un medio elástico. Los cuerpos que, actuando sobre ese medio, provocan tales perturbaciones, se llaman *fuentes de ondas*. Por ejemplo, en un teatro, los espectadores oyen las palabras, el canto de los actores y el sonido de los instrumentos musicales gracias a que hasta ellos llegan las oscilaciones de la presión del aire provocadas por estas fuentes de sonido.

Reciben el nombre de *ondas sonoras* o *acústicas* las ondas elásticas de poca intensidad, es decir, las perturbaciones mecánicas débiles que se propagan en un medio elástico. Las ondas sonoras, actuando sobre los órganos del oído del hombre, son

capaces de originar sensaciones sonoras si la frecuencia ν de las oscilaciones correspondientes a ellas se encuentran dentro de los límites de 16 y $2 \cdot 10^4$ Hz (*sonidos audibles*). Las ondas elásticas de frecuencia $\nu < 16$ Hz se llaman *infrasonido*, y las de frecuencia $\nu > 2 \cdot 10^4$ Hz, *ultrasonido* (las ondas elásticas de frecuencia $\nu > 10^9$ Hz suelen llamarse *hipersonido*).

4°. La propagación de las ondas elásticas en un medio no va ligada al transporte de substancia*). En un medio ilimitado, aquélla consiste en la incorporación a las oscilaciones forzadas de partes del medio cada vez más alejadas de la fuente de las ondas. En este caso se puede hacer abstracción de la estructura discreta (molecular) del medio y considerarlo como *continuo*, distribuido ininterrumpidamente en el espacio, y poseedor de determinadas propiedades elásticas. Por *partícula* del medio que efectúa las oscilaciones forzadas se entiende un pequeño elemento de su volumen cuyas dimensiones son, no obstante, mucho mayores que las distancias intermoleculares, por lo que contiene un número muy grande de moléculas. Las partículas del medio se pueden considerar prácticamente como puntos, ya que incluso en un gas las distancias intermoleculares son extraordinariamente pequeñas (del orden de 10^{-8} m en condiciones normales).

5°. Se dice que una onda elástica es *longitudinal* si las partículas del medio oscilan en dirección de propagación de la onda. Las ondas longitudinales van ligadas a la deformación del volumen del medio elástico, por lo que se pueden propagar en cualquier medio, ya sea sólido, líquido o gaseoso. Ejemplo de estas ondas son las ondas sonoras en el aire.

Una onda elástica se llama *transversal* si las partículas del medio oscilan permaneciendo en planos perpendiculares a la dirección en que se propaga tal onda. Las ondas longitudinales están relacionadas con la deformación de cizallamiento del medio elástico y, por consiguiente, sólo pueden originarse y propagarse en los medios que poseen elasticidad de forma, o sea, en los sólidos. Como ejemplo de ondas transversales pueden servir las ondas que se propagan a lo largo de las cuerdas de los instrumentos musicales.

*) Cierta transporte de substancia puede realizarse cuando en un medio se propagan fuertes perturbaciones (por ejemplo, las ondas de choque que se producen en una explosión), en cuyo caso las oscilaciones de las partículas del medio se hacen no lineales.

Un lugar especial ocupan las *ondas superficiales*, es decir, las perturbaciones de la superficie de un líquido (o de la superficie de separación de dos líquidos no miscibles) que se originan bajo la influencia de acciones externas (caída de cuerpos, movimiento de embarcaciones, viento, etc.) y que se propagan por dicha superficie. En la formación y propagación de estas ondas desempeñan un papel determinante las fuerzas de la tensión superficial y de la gravedad. En las ondas superficiales, las partículas del líquido efectúan simultáneamente oscilaciones transversales y longitudinales, describiendo trayectorias elípticas y más complejas.

6°. Un medio se llama *homogéneo* si sus propiedades físicas importantes en los problemas que se consideran, no varían de un punto a otro. Un medio homogéneo con respecto a unas propiedades físicas puede no ser homogéneo con relación a otras. Por ejemplo, un cuerpo policristalino es homogéneo conforme a sus propiedades elásticas y, al mismo tiempo, es ópticamente heterogéneo para los rayos X.

Se da el nombre de *isótropo* a un medio cuyas propiedades físicas importantes en los problemas que se consideran son iguales en todas las direcciones. Un medio isótropo con relación a unas propiedades físicas puede ser anisótropo respecto a otras. Por ejemplo, los cristales del sistema cúbico son ópticamente isótropos, pero con respecto a otras propiedades son anisótropos. Los gases y los líquidos son isótropos con relación a cualesquiera propiedades físicas.

7°. Un medio se dice que es *lineal* si entre las magnitudes que caracterizan la acción externa que se considera ejercida sobre ese medio, y la variación del estado de éste que produce, existe una relación directamente proporcional. Por ejemplo, un medio elástico que cumple la ley de Hooke (p. 1°) será lineal en cuanto a sus propiedades mecánicas. Un dieléctrico será lineal según sus propiedades eléctricas, si su permitividad (III.5.3.3°) no depende de la intensidad del campo eléctrico. Análogamente, un cuerpo será magnético, o sea, un medio será lineal con arreglo a sus propiedades magnéticas, si su permeabilidad magnética (III.13.4.3°) no depende de la inducción magnética del campo.

§ IV.3.2. Ecuación de una onda móvil

1°. Se llaman *ondas móviles* o *progresivas* aquellas que, a diferencia de las estacionarias (IV.3.5.4°), transportan energía en el espacio.

La ecuación de una onda elástica es la dependencia entre las coordenadas y el tiempo de las magnitudes escalares o vectoriales que caracterizan las oscilaciones del medio cuando pasa por él una onda dada. Por ejemplo, para las ondas en un medio sólido, esta magnitud puede ser el vector desplazamiento de las partículas del medio (IV.3.1.4°) de sus posiciones de equilibrio o de sus tres proyecciones sobre los ejes de coordenadas. Para caracterizar las ondas longitudinales en un gas o en un líquido se utiliza, por lo general, la sobrepresión del medio oscilante, igual a la diferencia entre su presión variable y su presión de equilibrio.

Se da el nombre de *rayo* a la línea cuya tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección en que se propaga la onda, es decir, con la dirección en que esa onda transporta la energía (IV.3.3.5°). En un medio homogéneo (IV.3.1.6°), los rayos tienen forma de líneas rectas.

2°. Una onda elástica se llama *sinusoidal* o *armónica* cuando las oscilaciones correspondientes de las partículas del medio son armónicas (IV.1.1.3°). La frecuencia de estas oscilaciones se denomina *frecuencia de la onda*. Las oscilaciones de la presión en un medio gaseoso o líquido, que se originan al propagarse en él una onda sinusoidal, también se cumplen, según la ley armónica, con una frecuencia igual a la de la onda. En una onda transversal sinusoidal, las partículas del medio pueden oscilar simultáneamente, de un modo armónico y con la frecuencia de la onda, en dos direcciones perpendiculares entre sí y perpendiculares, a su vez, a la dirección en que se propaga tal onda. En dependencia del carácter de la polarización de las oscilaciones resultantes (IV.1.4.9°), se distinguen los siguientes tipos de polarización de las ondas sinusoidales transversales: *elíptico*, *cíclico* (o *circular*) y *lineal* (o *plano*).

3°. Las perturbaciones mecánicas (deformaciones) se propagan en un medio elástico, con una velocidad finita v . Por esto, la perturbación producida por un foco de ondas en un instante t_0 llega a un punto arbitrario M del medio en el instante $t > t_0$. La diferencia $t - t_0 = l/v$ es tanto mayor cuanto más largo es el espacio l recorrido por la onda desde su fuente hasta el punto M . Respectivamente, las oscilaciones en el punto M se retardan en fase respecto de las oscilaciones de la fuente de ondas.

Recibe el nombre de *superficie* o *frente de onda* el lugar geométrico de los puntos donde la fase de las oscilaciones tiene el mismo valor. En todos los puntos de una superficie de onda, la diferencia $t - t_0$ es la misma. Por cada punto de un medio sometido a movimiento ondulatorio se puede trazar la superficie de

onda correspondiente al valor de la fase de las oscilaciones en dicho punto en un instante dado. Al conjunto de los distintos valores de las fases de las oscilaciones le corresponde una familia de superficies de onda. En un medio homogéneo isótropo (IV.3.1.6°), las superficies de onda son ortogonales a los rayos (p. 1°).

4°. Una onda se dice que es *plana* si sus superficies de onda forman un conjunto de planos paralelos entre sí. En una onda plana que se propaga a lo largo del eje OX , todas las magnitudes s que caracterizan el movimiento oscilatorio del medio, dependen solamente del tiempo t y de la coordenada x del punto M que se considere. Si no existe absorción de la onda por el medio (IV.3.3.7°), las oscilaciones en el punto M se diferenciarán de las oscilaciones en el origen de coordenadas O únicamente en que permanecerán desplazadas (en función del tiempo) x/v , donde v es la velocidad de la onda. Por esto, en una onda plana que se propaga a lo largo del sentido *positivo* del eje OX , s es función de la diferencia $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, de manera que la ecuación de esta onda plana tiene la forma

$$s = f\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Respectivamente, la ecuación de una onda plana que se propaga en sentido contrario será

$$s = f\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

5°. La ecuación de la onda sinusoidal plana que se propaga (en un medio no absorbente) a lo largo del sentido positivo del eje OX es

$$s = A \operatorname{sen} \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right] = A \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0 \right),$$

o bien

$$s = A \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{vT} x + \varphi_0 \right],$$

donde $A = \text{const}$ es la amplitud de las oscilaciones, llamada *amplitud de onda*; $\omega = 2\pi/T$, la *frecuencia cíclica (circular) de la onda*; T , el período de las oscilaciones; y φ_0 , la fase inicial de las oscilaciones (en el instante $t = 0$) en los puntos del plano

coordenado $x = 0$. La magnitud $\Phi = \omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0$, igual a la fase de las oscilaciones en un punto arbitrario de coordenada x , se llama *fase de la onda plana* (véase también el p. 6°).

6°. La distancia $\lambda = vT$ a que se propaga la onda sinusoidal durante un tiempo igual al período de las oscilaciones, recibe el nombre de *longitud de onda*. La longitud de onda es igual a la distancia entre los dos puntos más próximos del medio donde la diferencia de fase de las oscilaciones es igual a 2π .

Además de la longitud de onda se utiliza otra característica de la onda sinusoidal, el *número de onda*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

Por esto la ecuación de la onda sinusoidal plana (p. 5°) también se puede presentar de la forma siguiente:

$$s = A \operatorname{sen} \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right) = A \operatorname{sen} (\omega t - kx + \varphi_0).$$

Respectivamente, la fase de esta onda plana $\Phi = \omega t - kx + \varphi_0$.

7°. Se da el nombre de *vector de onda* al vector k cuyo módulo es igual al número de onda k y que está dirigido a lo largo del rayo (p. 1°) en un punto M elegido en el medio. El vector de onda de una onda plana sinusoidal no depende del punto M que se elija, y la ecuación de dicha onda se puede escribir de la forma siguiente:

$$s = A \operatorname{sen} [\omega t - kr + \alpha],$$

donde r es el radio vector del punto M , y α es la fase inicial de las oscilaciones en el origen de coordenadas, o sea, en el punto $r = 0$.

Basándose en la fórmula de Euler (IV.1.1.7°), la ecuación de la onda sinusoidal plana se puede escribir en forma exponencial, conveniente para la diferenciación,

$$\tilde{s} = A e^{i(\omega t - kr + \delta)},$$

donde $\delta = \alpha - \pi/2$. Sólo tiene sentido físico la parte real de la magnitud compleja \tilde{s} , es decir, la magnitud $s = \operatorname{Re} \tilde{s}$. Por esto, cuando se utiliza \tilde{s} para encontrar cualquier característica de una onda, después de efectuar todas las operaciones matemá-

ticas hay que omitir la parte imaginaria de la expresión compleja obtenida.

8°. Se dice que una onda es *esférica* cuando sus superficies de onda tienen forma de esferas concéntricas. El centro de tales esferas se llama *foco* o *centro de la onda*. Este tipo de ondas se excitan en un medio isótropo homogéneo por una fuente puntual aislada. La *ecuación de la onda esférica divergente* tiene la forma

$$s = \frac{1}{r} f \left(t - \frac{r}{v} \right),$$

donde r es la distancia desde el foco de la onda hasta el punto considerado M del medio, y v es la velocidad de la onda.

En el caso de una *onda esférica sinusoidal*,

$$s = \frac{a_0}{r} \text{sen} (\omega t - kr + \alpha),$$

siendo $A(r) = a_0/r$ la amplitud de la onda (IV.3.3.6°); a_0 , una magnitud física numéricamente igual a la amplitud de onda a la distancia unidad de su foco; α , la fase inicial de las oscilaciones en el centro de la onda; y $\Phi = \omega t - kr + \alpha$, la fase de la onda esférica.

La forma exponencial en que se escribe la ecuación de la onda esférica sinusoidal es

$$\tilde{s} = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \delta)} = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \delta)},$$

donde $\delta = \alpha - \pi/2$; r es el radio vector trazado desde el foco de la onda hasta el punto considerado M , y el vector de onda \mathbf{k} está dirigido al punto M radialmente desde el centro de la onda.

Los focos reales de ondas tienen siempre dimensiones finitas. Sin embargo, se pueden considerar puntuales, y las ondas excitadas por ellos en un medio isótropo homogéneo, se pueden considerar esféricas si la distancia r desde el foco hasta los puntos que se consideren del medio son mucho mayores que las dimensiones de dicho foco. Si r es muy grande, cualesquiera trozos pequeños de las superficies de onda se pueden considerar prácticamente como planos.

9°. La propagación de las ondas en un medio isótropo homogéneo se describe por una ecuación diferencial en derivadas parciales, llamada *ecuación de onda*:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \quad \text{o} \quad \Delta s = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Aquí s es la magnitud física que caracteriza la perturbación que se propaga en el medio con velocidad v , y $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace. Esta ecuación la satisfacen, en particular, la onda plana (p. 7°) y la onda esférica divergente (p. 8°).

La función s , que caracteriza la *onda sinusoidal* en un medio isótropo homogéneo, satisface al mismo tiempo dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$\Delta s = -k^2 s,$$

donde k es el número de onda (p. 6°), y

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s,$$

ω , la frecuencia cíclica de ésta.

10°. La velocidad v de propagación de una *onda sinusoidal* se llama *velocidad de fase*. Esta velocidad es igual a la de traslación en el espacio de los puntos de una superficie correspondiente a cualquier valor fijo de la fase de la onda sinusoidal. Por ejemplo, en el caso de una onda sinusoidal plana (p. 6°), de la condición $\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}$ se deduce que $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$. Respectivamente, en el caso de una onda esférica sinusoidal (p. 8°), de la condición $\omega t - kr + \alpha = \text{const}$ se deduce que $\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$.

§ IV.3.3. Velocidad de fase y energía de las ondas elásticas

1°. La *velocidad de fase de las ondas sonoras (velocidad del sonido) en un líquido o en un gas es*

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

donde ρ es la densidad del medio no perturbado, y K , el módulo de elasticidad de volumen de dicho medio (IV.3.1.1°). La

frecuencia de las ondas sonoras audibles $\nu > 16$ Hz, y el proceso de deformación del medio se puede considerar adiabático (II.1.3.7°), es decir, $K = -V \left(\frac{dp}{dV} \right)_{\text{ad}}$. Para un gas perfecto (II.1.4.1°) la relación entre la presión p y el volumen V en el proceso adiabático es $pV^\kappa = \text{const}$, donde κ es el exponente adiabático (II.3.1.11°), de manera que $K = \kappa p$. Por lo que la *velocidad del sonido en el gas perfecto* constituye

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}},$$

siendo μ la masa molar del gas; T , su temperatura absoluta; y R , la constante universal de los gases.

2°. *La velocidad de fase de las ondas elásticas transversales en un medio sólido isótropo homogéneo es*

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

donde G es el módulo de cizallamiento del medio (VII.1.3.9°), y ρ , la densidad de este último.

La propagación de las ondas longitudinales en una varilla larga y delgada está relacionada con su extensión y compresión. De acuerdo con esto la velocidad de fase de estas ondas constituye

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

donde E es el módulo de Young (VII.1.3.6°) para el material de la varilla.

La velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo de una cuerda, es decir, a lo largo de un hilo flexible largo y tenso, es

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

siendo F la fuerza de tensión de la cuerda, y ρ y S , la densidad del material de dicha cuerda y el área de su sección transversal.

3°. El medio elástico en que se propagan las ondas mecánicas posee tanto energía cinética del movimiento de oscilación de las partículas como energía potencial debida a la deformación. Si v_1 es la velocidad de las partículas del medio (IV.3.1.1°), la *densidad volumétrica de la energía cinética del medio* consti-

tuirá

$$w_c = \frac{dW_c}{dV} = \frac{1}{2} \rho v_1^2,$$

donde ρ es la densidad del medio; dW_c , la energía cinética de todas las partículas que hay en el volumen infinitesimal dV del mismo, elegido de tal manera que, dentro de sus límites, la velocidad v_1 sea igual en todas partes.

La densidad volumétrica de la energía potencial del medio deformado elásticamente será

$$w_p = \frac{dW_p}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 e^2,$$

donde W_p es la energía potencial de una parte infinitesimal del medio deformada homogéneamente, cuyo volumen es dV ; v , la velocidad de fase de la onda en el medio; y e , la deformación relativa.

Por densidad volumétrica de la energía de las ondas elásticas se entiende la densidad volumétrica w de la energía mecánica del medio, debida a la propagación de estas ondas:

$$w = w_c + w_p = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 + v^2 e^2).$$

4°. Si en un medio se propaga una onda plana longitudinal progresiva (IV.3.2.4°), $v_1 = \partial s / \partial t$, siendo s el desplazamiento de las partículas, y $e = \frac{ds}{dx} = - \left(\frac{v_1}{v} \right)$, de modo que

$$w_p = w_c \quad \text{y} \quad w = \rho v_1^2 = \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2.$$

En cada punto del medio abarcado por el movimiento ondulatorio, w_c y w_p son funciones iguales del tiempo. Respectivamente, w también cambia con el tiempo. Esta regularidad es válida para cualesquiera ondas viajeras en un medio elástico, y no depende de la forma de sus superficies ni del tipo de deformación del medio. Esto se infiere de la ley de conservación de la energía, aplicada al proceso de propagación de las oscilaciones en un medio elástico. Para hacer participar en el movimiento oscilatorio regiones del medio cada vez más alejadas del foco de ondas, es necesario consumir la energía que dicho foco le comunica al medio. Por consiguiente, la propagación de las ondas elásticas está ligada íntimamente a la transmisión de energía de unas par-

tes del medio a otras. Por esto precisamente la densidad volumétrica w de la energía de las ondas depende tanto de las coordenadas como del tiempo.

Para una onda sinusoidal plana viajera en un medio no absorbente (IV.3.2.5°),

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 [1 + \cos 2 (\omega t - kx + \varphi_0)],$$

donde $A = \text{const}$ es la amplitud de la onda.

En el caso de una onda sinusoidal esférica divergente en un medio no absorbente (IV.3.2.8°),

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t - kr + \alpha),$$

siendo $A = a_0/r$ la amplitud de la onda.

El valor medio de la densidad volumétrica de la energía durante un período es

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2.$$

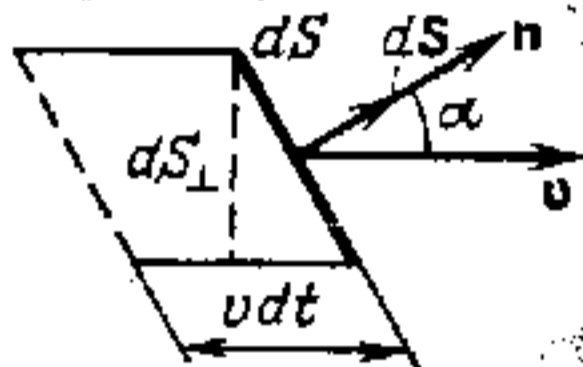


Fig. IV.3.1.

5°. La velocidad del transporte de energía por la onda es igual a la velocidad de traslación en el espacio de la superficie correspondiente al valor máximo de la densidad volumétrica w de la energía de la onda. Para las ondas sinusoidales, esta velocidad es igual a la velocidad de fase v .

Se llama *flujo de energía* $d\Phi_w$ a través de una superficie infinitesimal dS , la razón de la energía dW transmitida a través de esta superficie durante un pequeño espacio de tiempo, a la magnitud dt de dicho intervalo:

$$d\Phi_w = dW/dt.$$

Si v es el vector velocidad de transporte de la energía por la onda (fig. IV.3.1), entonces

$$dW = wv dt dS \cos \alpha = w (v dS) dt$$

y

$$d\Phi_w = w (v dS) = (U dS),$$

donde w es la densidad volumétrica de la energía de la onda; $dS = n dS$, el vector de la superficie dS ; n , el vector unitario de la normal a la superficie; y α , el ángulo entre v y dS .

El vector $U = wv$, dirigido en el sentido del transporte de energía por la onda, se llama *vector de U_{mov}* (vector de den-

alidad del flujo de energía de la onda). Por su módulo este vector es igual a la razón del flujo de energía $d\Phi_w$ a través de la superficie infinitesimal dS , al área $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$ de la proyección de dicha superficie sobre un plano perpendicular a la dirección del transporte de energía: $U = d\Phi_w/dS_{\perp}$.

6°. Se da el nombre de *intensidad de una onda* J al módulo del valor medio del vector de Úmov. La intensidad de una onda es numéricamente igual a la energía transportada por ella en la unidad de tiempo a través de la unidad de área de una superficie perpendicular a la dirección en que se propaga la onda. La intensidad de una onda sinusoidal progresiva es proporcional al cuadrado de su amplitud. Para las ondas sinusoidales plana y esférica,

$$J = |\langle U \rangle| = v \langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2.$$

Si una onda esférica se propaga en un medio absorbente a través de cualquier superficie esférica de radio r cuyo centro se halla en el foco de la onda, en la unidad de tiempo se transmitirá una misma cantidad de energía igual a la energía que durante este mismo tiempo gasta el foco antedicho: $J 4\pi r^2 = \text{const.}$ Así, pues, la intensidad y la amplitud de una onda esférica, a medida que ésta se aleja de su foco, disminuyen según las leyes

$$J(r) = \frac{t_0}{r^2} \quad \text{y} \quad A(r) = \frac{a_0}{r},$$

donde t_0 y a_0 son magnitudes físicas respectivamente iguales numéricamente a la intensidad y a la amplitud de la onda a la distancia $r = 1$ m del foco de ésta.

Por este mismo procedimiento se puede demostrar que, en el caso de una onda sinusoidal plana en un medio no absorbente, la amplitud de la onda A no depende de las coordenadas.

7°. La transformación de la energía de una onda en otras formas de la energía durante su propagación en un medio, recibe el nombre de *absorción de la onda*. En un medio homogéneo, la absorción de las ondas elásticas se debe principalmente a los procesos de rozamiento interno (II.3.8.4°) y de conductibilidad calorífica (II.3.8.5°). La amplitud A y la intensidad J de una onda plana que se propaga en un medio absorbente a lo largo del sentido positivo del eje OX , varía según la siguiente ley exponencial:

$$A(x) = A_0 e^{-\alpha x} \quad \text{y} \quad J(x) = J_0 e^{-2\alpha x}.$$

Aquí A_0 y J_0 son la amplitud y la intensidad de la onda en los puntos $x = 0$, y α es el *coeficiente lineal de absorción de las ondas elásticas*, que depende de las propiedades del medio y de la frecuencia de la onda.

8°. Se llama *dispersión de las ondas* la variación de la velocidad de fase de las ondas sinusoidales en el medio, en función de sus frecuencias. El medio en que se observa este fenómeno se denomina *medio dispersor*. La dispersión de las ondas sonoras en un medio ilimitado depende de las propiedades de éste y siempre va acompañada de absorción del sonido.

§ IV.3.4. Principio de la superposición de las ondas. Velocidad de grupo

1°. *Principio de la superposición de las ondas*: en un medio lineal (IV.3.1.7°), las ondas se propagan independientemente unas de otras, de tal modo que la perturbación en un punto cualquiera del medio, cuando en él se propagan varias ondas a la vez, es igual a la suma de las perturbaciones correspondientes a cada una de dichas ondas.

Por ejemplo, si en un medio lineal se propagan a la vez n ondas mecánicas distintas, el desplazamiento s , la velocidad v y la aceleración a resultantes de las partículas del medio en un instante arbitrario t serán

$$s = \sum_{i=1}^n s_i, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i \quad \text{y} \quad a = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Aquí s_i , v_i y a_i son los valores del desplazamiento, la velocidad y la aceleración que tendrían las partículas consideradas en el mismo instante t si en el medio se propagara únicamente la i -ésima onda.

2°. Basándose en el principio de la superposición de las ondas y en el desarrollo de Fourier (IV.1.4.6° y IV.1.4.7°), se puede sustituir cualquier ondas no sinusoidal por un sistema equivalente a ella de ondas sinusoidales, es decir, presentarlo en la forma de un *grupo* o *paquete de ondas*. El conjunto de valores de las frecuencias de estas ondas sinusoidales se llama *espectro de frecuencias* (o simplemente *espectro*) de la onda no sinusoidal considerada. En dependencia del carácter de las oscilaciones excitadas por la onda, el espectro de las frecuencias de esta última puede ser discreto (IV.1.4.6°) o continuo (IV.1.4.7°).

La ley de propagación en un medio lineal de una perturbación (señal) arbitraria, consistente en una onda no sinusoidal, es simple únicamente a condición de que el medio no sea dispersor (IV.3.3.8°). En este caso la señal se traslada por el medio sin cambiar de «forma», ya que todas las ondas sinusoidales que forman el grupo tienen las mismas velocidades de fase iguales a la velocidad de la señal.

En un medio dispersor las componentes sinusoidales de un grupo de ondas, correspondientes a una onda no sinusoidal, se

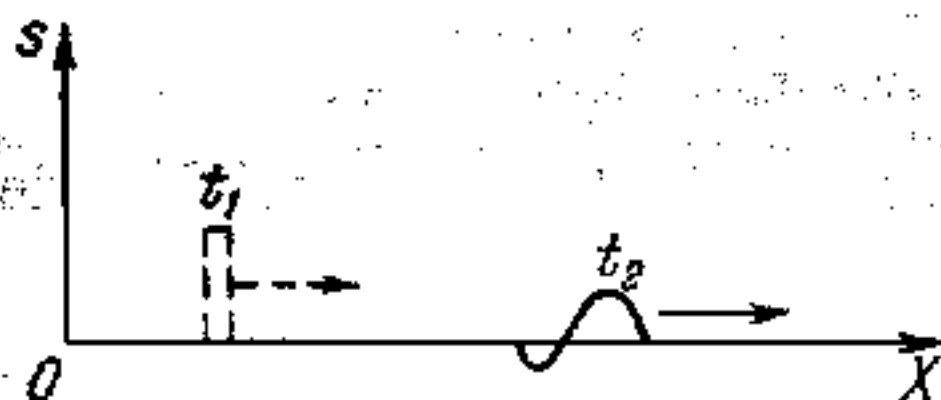


Fig. IV.3.2.

propagan a velocidades distintas. Por esto, a medida que se propaga, el grupo de ondas se va «esparciendo», de manera que la «forma» de la señal varía. Por ejemplo, si en el instante t_1 la señal que se propaga en el medio dispersor a lo largo del eje OX tiene la «forma» que se ve en la fig. IV.3.2 con línea de trazos, en el instante $t_2 > t_1$ tiene ya otra «forma» distinta, representada con línea continua.

3°. El grupo de ondas más simple es la *onda plana cuasisinusoidal* que se obtiene como resultado de la superposición de dos ondas planas que se propagan a lo largo del eje OX con la misma amplitud y con valores próximos de las frecuencias y de los números de onda:

$$s = A_0 \operatorname{sen} (\omega t - kx) + A_0 \operatorname{sen} [(\omega + d\omega) t - (k + dk) x] = \\ = 2A_0 \cos \left(\frac{t d\omega - x dk}{2} \right) \operatorname{sen} (\omega t - kx).$$

La dependencia de s respecto de x en un instante dado se muestra en la fig. IV.3.3. Esta onda difiere de la sinusoidal en que su amplitud

$$A = 2A_0 \left| \cos \left(\frac{t d\omega - x dk}{2} \right) \right|$$

es una función de la coordenada x y del tiempo t , que varía lentamente.

Como velocidad de propagación de esta onda no sinusoidal se toma la velocidad u de traslación de un punto M en el cual la amplitud A tiene un valor fijo cualquiera (por ejemplo,

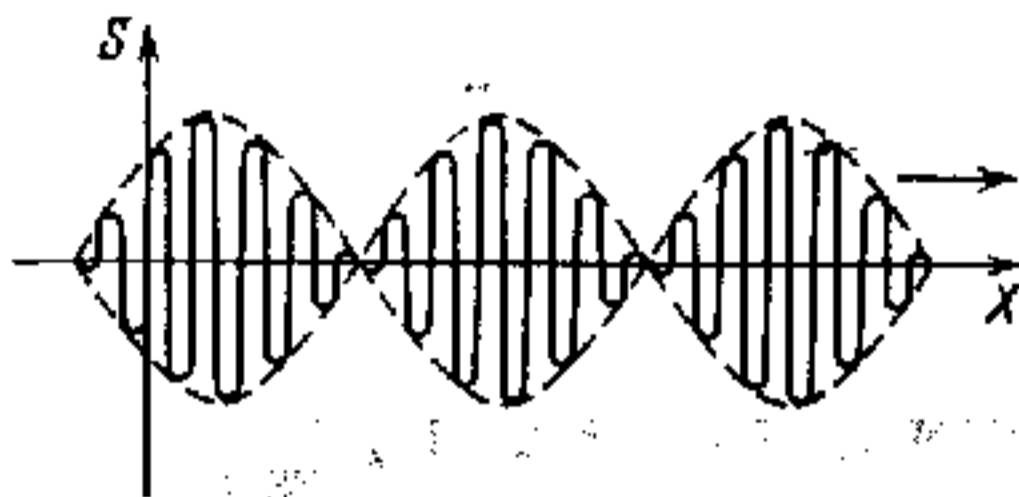


Fig. IV.3.3.

$A = 0$ ó $A = 2A_0$). Por consiguiente, el punto M se mueve según la ley $t d\omega - x dk = \text{const.}$ De donde

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

La velocidad u se llama *velocidad de grupo* y es igual a la velocidad de transporte de energía por la onda cuasisinusoidal. La velocidad de grupo $u = d\omega/dk$ es útil también para describir el transporte de energía (transmisión de una señal) por medio de ondas no sinusoidales que tengan otro espectro de frecuencias a condición de que éste no sea muy amplio y la dispersión de las ondas en el medio no sea demasiado grande para estas frecuencias.

La relación entre la velocidad de grupo ($u = d\omega/dk$) y la velocidad de fase ($v = \omega/k$) de las ondas tiene la forma

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

donde λ es la longitud de onda (IV.3.2.6°). En un medio no dispersor $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ y la velocidad de grupo coincide con la de fase.

§ IV.3.5. Interferencia de ondas.

Ondas estacionarias

1°. Dos ondas se dice que son *coherentes* si la diferencia entre sus fases no depende del tiempo. A las ondas coherentes les corresponden oscilaciones coherentes (IV.1.4.3°). Las fuentes de ondas coherentes se llaman *focos coherentes*. Las ondas sinusoidales cuyas frecuencias son iguales, son siempre coherentes. Las ondas cuyas frecuencias difieren, sólo son coherentes durante el tiempo de coherencia de las oscilaciones excitadas por ellas (IV.1.4.4°).

Cuando se superponen ondas sinusoidales no coherentes excitadas por focos puntuales S_1 y S_2 (fig. IV.3.4), el cuadrado

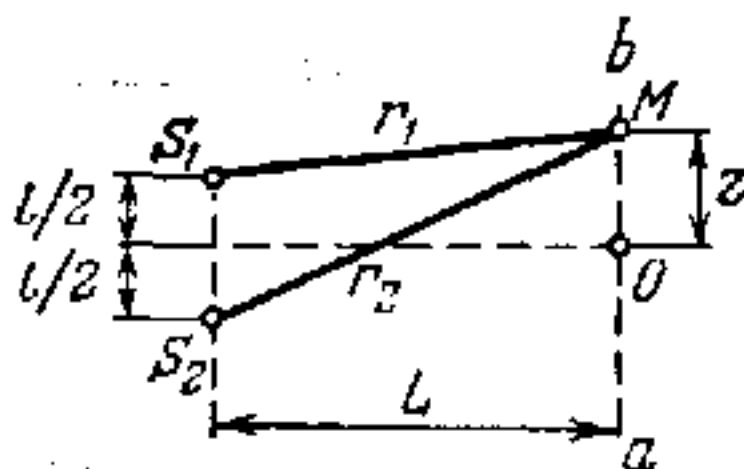


Fig. IV.3.4.

de la amplitud A de las oscilaciones inarmónicas resultantes en un punto arbitrario M varía periódicamente con el tiempo t según la ley (véase (IV.1.4.2°) y (IV.3.2.8°))

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos [(\omega_2 - \omega_1)t - (k_2r_2 - k_1r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)].$$

Aquí A_1 y A_2 , ω_1 y ω_2 , k_1 y k_2 , α_1 y α_2 son, respectivamente, las amplitudes en el punto M , las frecuencias cíclicas, los números de onda y las fases iniciales de las dos ondas esféricas que se superponen. El período de variación de A^2 es $T = 2\pi/|\omega_2 - \omega_1|$.

El valor medio del cuadrado de la amplitud durante este período es

$$\langle A^2 \rangle = A_1^2 + A_2^2.$$

Cuando se superponen ondas no coherentes, los cuadrados de sus amplitudes se suman.

2°. Se llama *interferencia de ondas* el fenómeno de superposición de éstas, en el cual se produce en unos puntos del espacio

su reforzamiento mutuo estable con el tiempo, y en otros, su amortiguación en dependencia de la relación entre las fases de dichas ondas. Sólo pueden interferir las ondas coherentes cuyas oscilaciones se efectúan a lo largo de una misma dirección o de direcciones próximas.

Al superponerse las ondas esféricas coherentes excitadas por los focos puntuales S_1 y S_2 (fig. IV.3.4),

$$s_1 = A_1 \operatorname{sen} (\omega t - kr_1 + \alpha_1) = A_1 \operatorname{sen} \Phi_1$$

y

$$s_2 = A_2 \operatorname{sen} (\omega t - kr_2 + \alpha_2) = A_2 \operatorname{sen} \Phi_2,$$

la amplitud A y la fase Φ de las oscilaciones armónicas resultantes en el punto M ($s = s_1 + s_2 = A \operatorname{sen} \Phi$) se determina por las relaciones (IV.1.4.3°)

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos [k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)],$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{A_1 \operatorname{sen} \Phi_1 + A_2 \operatorname{sen} \Phi_2}{A_1 \cos \Phi_1 + A_2 \cos \Phi_2}$$

Como para las oscilaciones de los focos coherentes S_2 y S_1 , la diferencia entre las fases iniciales $\alpha_2 - \alpha_1 = \text{const}$, el resultado de la interferencia de las dos ondas en distintos puntos M depende de la magnitud $\Delta = r_2 - r_1$ llamada *diferencia de recorrido* o *de marcha de la onda*. En los máximos de interferencia, la amplitud de las oscilaciones resultantes $A = A_1 + A_2$, y en los mínimos $A = |A_1 - A_2|$. Los máximos se observan en los puntos M que satisfacen la condición

$$k\Delta - (\alpha_2 - \alpha_1) = \pm 2m\pi,$$

donde $m = 0, 1, 2, \dots$, es el *orden del máximo de interferencia*.

La condición de los mínimos de interferencia tiene la forma

$$k\Delta - (\alpha_2 - \alpha_1) = \pm (2m - 1)\pi,$$

donde $m = 1, 2, 3, \dots$ es el *orden del mínimo de interferencia*.

Como el número de onda $k = 2\pi/\lambda$, siendo λ la longitud de onda en un medio dado, las condiciones de los máximos y mínimos de interferencia se pueden presentar de la forma

$$\Delta = \pm m\lambda + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} \lambda \quad \text{para los máximos,}$$

$$\Delta = \pm (2m - 1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} \lambda \quad \text{para los mínimos.}$$

Finalmente, si $\alpha_2 = \alpha_1$, estas condiciones tienen la forma $\Delta = \pm m\lambda$ (para los máximos) y $\Delta = \pm(2m - 1)\lambda/2$ (para los mínimos).

En la recta ab que pasa paralelamente a la línea que une los focos S_1S_2 y a la distancia L de ella (fig. IV.3.4), el máximo central de orden nulo se halla en el punto O equidistante de S_1 y S_2 . Si la distancia entre las fuentes $l \ll L$, para el punto M situado sobre la recta ab a la distancia $z \ll L$ del punto O , la diferencia de recorrido de las ondas será

$$\Delta = \frac{lz}{L}.$$

A los máximos de orden n -ésimo y $(m + 1)$ -ésimo les corresponden los valores

$$z_m = \frac{m\lambda L}{l} \quad \text{y} \quad z_{m+1} = \frac{(m+1)\lambda L}{l},$$

de modo que la distancia entre los máximos vecinos es igual a $\lambda L/l$.

3°. En la interferencia de ondas no existe la simple adición de sus energías. En los máximos de interferencia, la intensidad de la onda resultante es mayor que la suma de las intensidades de las ondas que se superponen, y en los mínimos de interferencia, menor que dicha suma. La interferencia de las ondas hace que se redistribuya la energía de las oscilaciones entre las regiones contiguas del medio. No obstante, para una región grande del espacio, la energía de la onda resultante es, por término medio, igual a la suma de las energías de las ondas que interfieren. Este resultado es consecuencia de la ley de conservación y transformación de la energía.

4°. Un caso particular de interferencia de ondas son las ondas estacionarias. Una *onda estacionaria* es la que se forma como resultado de la superposición de dos ondas sinusoidales móviles que se propagan la una al encuentro de la otra y que tienen la misma frecuencia y amplitud, y en caso de ser ondas transversales, igual polarización (IV.3.2.2°). Una onda estacionaria transversal se origina, por ejemplo, en un hilo elástico tenso, uno de cuyos extremos está fijo y el otro se pone en movimiento oscilatorio.

Si se superponen dos ondas planas coherentes móviles de la forma

$$s_1 = A \sin(\omega t - kx) \quad \text{y} \quad s_2 = A \sin(\omega t + kx + \alpha),$$

en las que α es la diferencia de fases de las ondas en los puntos $x = 0$, se origina una *onda plana estacionaria* definida por la ecuación

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos \left(kx + \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\alpha}{2} \right).$$

La amplitud de la onda estacionaria A_{est} , a diferencia de las amplitudes de las ondas móviles A , es función periódica de la coordenada x :

$$A_{\text{est}} = 2A \left| \cos \left(kx + \frac{\alpha}{2} \right) \right|.$$

5°. Los puntos en que la amplitud de la onda estacionaria $A_{\text{est}} = 0$ se llaman *nodos*, y los puntos en que la amplitud A_{est} es máxima ($A_{\text{est}} = 2A$), reciben el nombre de *vientres de la onda estacionaria*. La posición de los nodos y de los vientres se deduce de las condiciones siguientes:

$$kx + \frac{\alpha}{2} = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{para los nodos}),$$

$$kx + \frac{\alpha}{2} = m\pi \quad (\text{para los vientres}),$$

en las que $m = 0, 1, 2, \dots$

Las distancias entre dos nodos vecinos y entre dos vientres también vecinos, son las mismas e iguales a la mitad de longitud λ de las ondas móviles. Esta magnitud se llama *longitud de la onda estacionaria* $\lambda_{\text{est}} = \lambda/2$. La distancia entre un nodo y un vientre contiguos de una onda estacionaria es igual a $\lambda_{\text{est}}/2$.

6°. En una onda progresiva la fase de las oscilaciones depende de la coordenada x del punto considerado. En una onda estacionaria todos los puntos entre dos nodos oscilan con amplitudes distintas, pero en las *mismas* fases (cofásicamente), ya que el argumento del seno en la ecuación de la onda estacionaria (p. 4°) no depende de la coordenada x . Al pasar por un nodo, la fase de las oscilaciones cambia de un salto en π , puesto que entonces $\cos \left(kx + \frac{\alpha}{2} \right)$ cambia su signo por el contrario.

En la fig. IV.3.5 se muestra el carácter de movimiento de distintos puntos de un hilo elástico tenso, de longitud l , una vez que en él se establezca una onda estacionaria transversal. El extremo izquierdo O del hilo comienza a oscilar armónicamente mientras que el derecho N se mantiene fijo. En este caso, cuando

la onda se refleja en el punto de sujeción, su fase cambia en π , de manera que en dicho punto se origina un nodo de la onda estacionaria. La diferencia de fase entre la onda reflejada y la incidente en el punto O ($x = 0$) es $\alpha = -(2kl + \pi)$. En la fig.

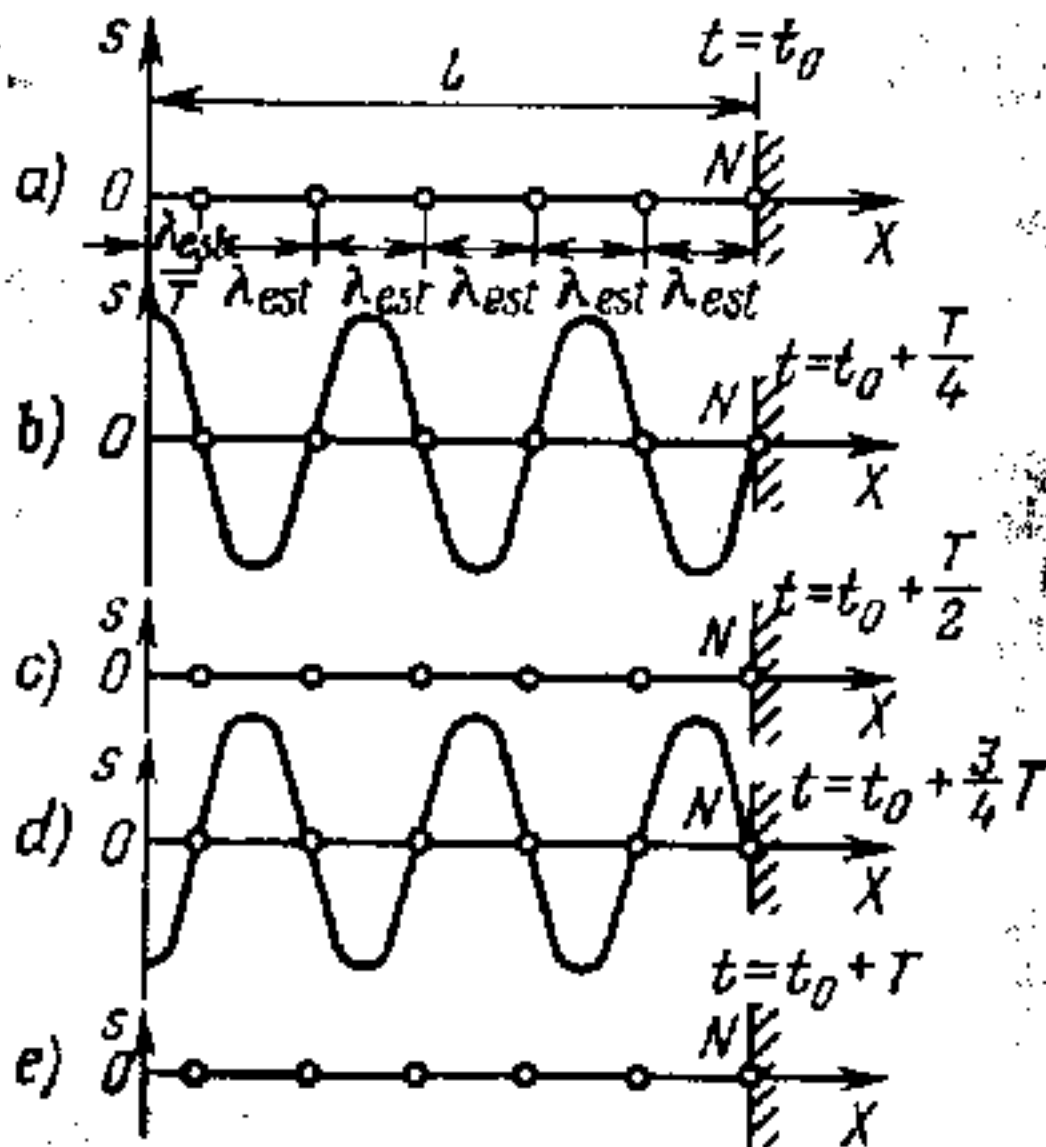


Fig. IV.3.5.

IV.3.5 se señalan (con circulitos) los nodos de la onda estacionaria, y el instante t_0 se ha elegido de tal modo que $\text{sen} \left(\omega t_0 + \frac{\alpha}{2} \right) = 0$.

7°. En una onda estacionaria (p. 4°), la velocidad del movimiento oscilatorio de las moléculas del medio es

$$v_1 = \frac{\partial s}{\partial t} = 2A\omega \cos \left(kx + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\alpha}{2} \right),$$

y la deformación relativa del medio constituye

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{\partial s}{\partial x} &= -2Ak \text{sen} \left(kx + \frac{\alpha}{2} \right) \text{sen} \left(\omega t + \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2Ak \text{sen} \left(kx + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, a diferencia de la onda móvil (IV.3.3.4°), en la onda estacionaria, ε adelanta en fase a v_1 en $\pi/2$, de manera que en los instantes en que v_1 alcanza el valor de la amplitud, ε se anula, y viceversa. Además, las amplitudes de v_1 y ε dependen de la coordenada x de un modo diferente: en los vientres de la onda estacionaria (p. 5°) se encuentran los vientres de la velocidad de las partículas y los nodos de la deformación del medio, y en los nodos de la onda estacionaria, los vientres de la deformación y los nodos de la velocidad.

En una onda estacionaria elástica, la energía potencial localizada principalmente en las cercanías de los vientres de la deformación, se transforma periódicamente, en energía cinética localizada principalmente cerca de los vientres de la velocidad, y viceversa. Por esto la energía migra periódicamente de los nodos de la onda estacionaria a sus vientres, y al contrario. Pero en los mismos nodos y vientres, la densidad del flujo de energía es idéntica a cero. El valor medio de la densidad del flujo de energía durante un período es nulo en cualquier punto de la onda estacionaria, ya que las dos ondas progresivas que originan esta última transportan, durante cada período, cantidades de energía iguales en sentidos directamente opuestos. En virtud de la peculiaridad indicada, las ondas estacionarias recibieron este nombre.

8°. En el caso de las oscilaciones libres de cuerdas, varillas y columnas de gas, en ellas se establecen ondas estacionarias cuyas frecuencias satisfacen determinadas condiciones, es decir, pueden tomar únicamente ciertos valores discretos llamados *frecuencias propias* (o *naturales*) de las oscilaciones del sistema oscilante correspondiente. En los extremos sujetos rígidamente de las cuerdas o varillas se sitúan nodos de desplazamiento (vientres de deformación), y en los extremos libres de las varillas, vientres de desplazamiento (nodos de deformación). En las oscilaciones de una columna cilíndrica de gas dentro de un tubo, junto al extremo cerrado del tubo se encuentra un vientre de presión, y en el extremo abierto, un nodo de presión.

Si l es la longitud de la cuerda, de la varilla o de la columna de gas; v , la velocidad de fase de la onda; y λ su longitud, entonces, para las cuerdas o varillas sujetas por ambos extremos, así como para las columnas de gas en tubos cerrados o abiertos por ambos extremos, en la longitud l cabe un número entero de longitudes de onda estacionaria $\lambda_{\text{est}} = \lambda/2$:

$$l = m\lambda_{\text{est}} = m\lambda/2, \quad \text{donde } m = 1, 2, 3, \dots$$

Las frecuencias propias de las oscilaciones de estos sistemas son

$$v = \frac{mv}{2l}$$

Para las varillas con un extremo sujeto y el otro libre, así como para los tubos cerrados por un extremo y abiertos por el otro,

$$l = (2m - 1) \frac{\lambda_{\text{est}}}{2} = (2m - 1) \frac{\lambda}{4},$$

las frecuencias propias de las oscilaciones,

$$v = \frac{(2m - 1)v}{4l}$$

§ IV.3.6. El efecto Doppler en la acústica

1°. Se llama *efecto Doppler* la variación de la frecuencia de las ondas, registrada por un receptor y debida al movimiento de la fuente de dichas ondas y del receptor. Por ejemplo, cuando un tren se aproxima a gran velocidad a un observador en reposo, el tono de su silbato es más alto, y cuando se aleja es más bajo que el tono de la señal que emite su locomotora cuando el tren está parado en una estación.

Supongamos que el receptor R de las ondas sonoras en un medio gaseoso (o líquido) permanece en reposo respecto de éste, y que la fuente F se aleja de él con velocidad v_1 a lo largo de la recta que los une (fig. IV.3.6, a). Durante un tiempo igual al período T_0 de sus oscilaciones, la fuente se desplazará a una distancia $v_1 T_0 = v_1 / \nu_0$, donde ν_0 es la frecuencia de las oscilaciones de la fuente. Por esto, cuando la fuente se mueve, la longitud de onda λ en el medio difiere de su valor λ_0 correspondiente a cuando la fuente está en reposo:

$$\lambda = \lambda_0 + v_1 T_0 = (\nu + v_1) T_0 = (\nu + v_1) / \nu_0,$$

siendo ν la velocidad de fase de la onda en el medio. La frecuencia de la onda registrada por el receptor constituirá

$$v = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_1}{\nu}}$$

Si la dirección del vector velocidad de la fuente v_1 forma un ángulo arbitrario ϑ_1 con el radio vector R que une el receptor fijo con la fuente (fig. IV.3.6, b), entonces

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_1 \cos \vartheta_1}{v}}$$

2°. Si la fuente no se mueve, y el receptor se aproxima a ella con velocidad v_2 a lo largo de la recta que los une

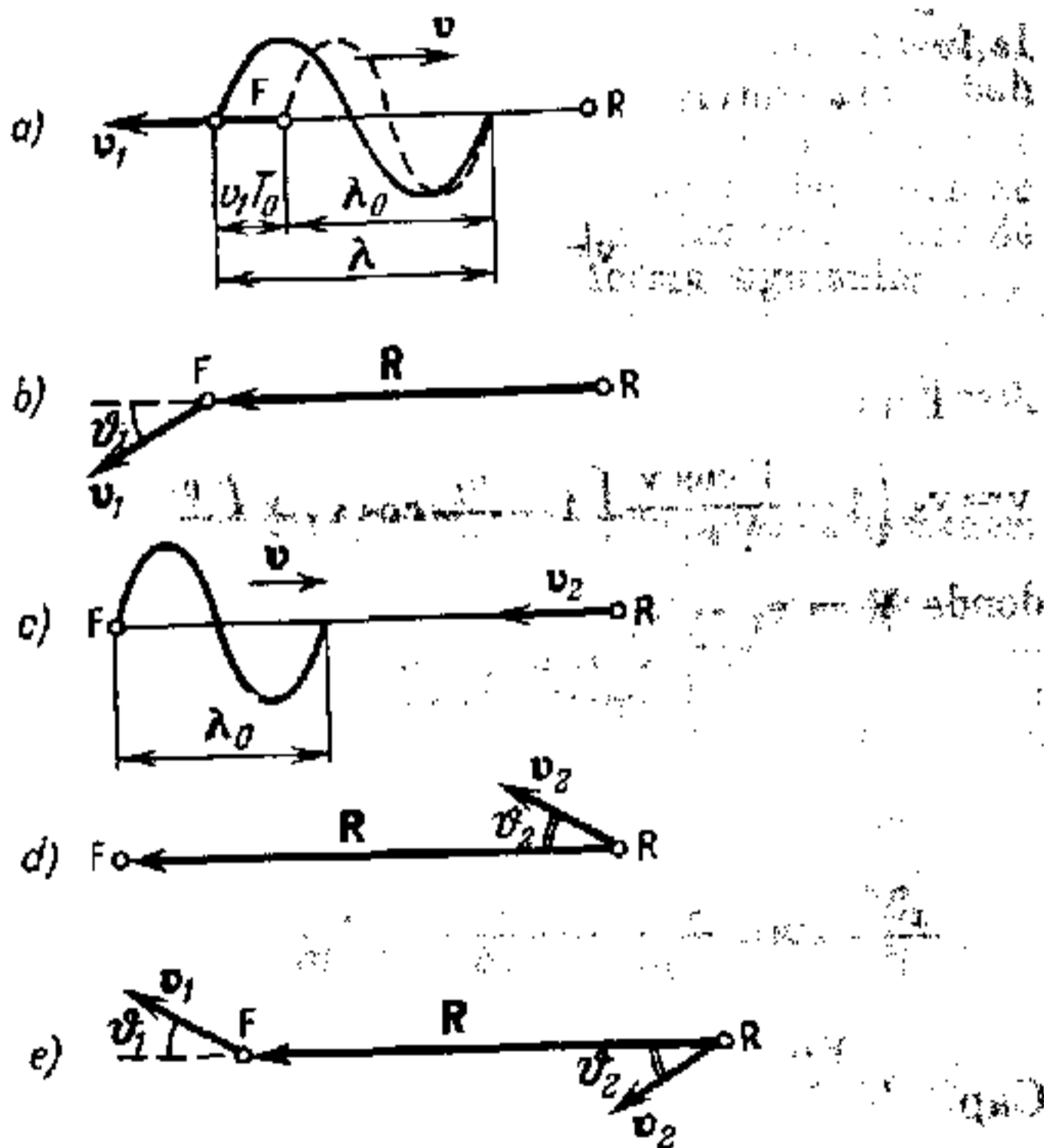


Fig. IV.3.6.

(fig. IV.3.6, c), la longitud de onda en el medio $\lambda = \lambda_0 = v/v_0$. Pero la velocidad de propagación de la onda con respecto al receptor es $v + v_2$, de manera que la frecuencia de la onda que

registra, el receptor constituye

en reposo la λ_0

$$v = \frac{v + v_2}{\lambda_0} = v_0 \left(1 + \frac{v_2}{v} \right).$$

En el caso en que la dirección de la velocidad v_2 forme un ángulo ϑ_2 arbitrario con el radio vector R que une el receptor móvil con la fuente fija (fig. IV.3.6, d),

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v_2}{v} \cos \vartheta_2 \right).$$

3°. En el caso más general, cuando tanto el receptor como la fuente de ondas se mueven con respecto al medio con velocidades arbitrarias (fig. IV.3.6, e),

$$v = v_0 \frac{1 + \frac{v_2}{v} \cos \vartheta_2}{1 + \frac{v_1}{v} \cos \vartheta_1}.$$

Esta fórmula se puede presentar también de la forma

$$v = v_0 \left\{ 1 - \frac{V \cos \vartheta}{v} \left[1 - \frac{v_1}{v} \cos \vartheta_1 + \left(\frac{v_1}{v} \cos \vartheta_1 \right)^2 - \dots \right] \right\},$$

donde $V = v_1 - v_2$ es la velocidad de la fuente de ondas respecto al receptor, y ϑ , el ángulo entre los vectores V y R . La magnitud $V \cos \vartheta$, igual a la proyección de V sobre la dirección de R , se llama *velocidad del rayo de la fuente*. Si $v_1 \ll v$, entonces

$$v \approx v_0 \left(1 - \frac{V \cos \vartheta}{v} \right).$$

Capítulo IV.4. Ondas electromagnéticas

§ IV.4.1. Propiedades de las ondas electromagnéticas

1°. Se llaman *ondas electromagnéticas* las perturbaciones del campo electromagnético (es decir, de un campo electromagnético alternativo) que se propagan en el espacio. La afirmación

de la existencia de las ondas electromagnéticas es una consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell (III.14.4.3°). Para un campo electromagnético lejos de las cargas eléctricas libres que lo originan (III.5.3.1°) y de corrientes macroscópicas (III.13.4.1°), estas ecuaciones tienen la forma*

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \quad \text{y} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

2°. Si el medio es un dieléctrico homogéneo e isótropo (IV.3.1.6°) exento de propiedades ferroeléctricas (III.5.4.1°) o ferromagnéticas (III.13.5.1°), $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$, donde ϵ y μ son magnitudes escalares constantes que no dependen de las coordenadas ni del tiempo. En este caso las ecuaciones de Maxwell (p. 1°) se pueden escribir de la forma siguiente:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 \quad \text{y} \quad \text{div } \mathbf{H} = 0,$$

o en las proyecciones sobre los ejes de las coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

3°. De las ecuaciones de Maxwell (p. 2°) se deduce que los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} de las intensidades del campo electromagnético alternativo y todas sus proyecciones sobre el eje de coordenadas cartesianas satisfacen (en el medio homogéneo, isótropo, no

* En el capítulo IV.4 todas las ecuaciones se dan en el SI.

conductor) la ecuación de onda (IV.3.2.9°):

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta E_x - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta E_y - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta E_z - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta H_x - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta H_y - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta H_z - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0.$$

Así, pues, el campo electromagnético alternativo se propaga efectivamente en el espacio en forma de ondas cuya *velocidad de fase* es

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad \text{donde } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

En el vacío $\varepsilon = \mu = 1$. Por lo tanto, c es la *velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío*.

4°. Las ondas electromagnéticas son *transversales*: los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} del campo de la onda se encuentran en un plano perpendicular a la dirección de propagación de esta última, es decir, al vector de su velocidad v en el punto considerado del campo. De esto podemos convencernos fácilmente examinando el ejemplo de una onda plana que se propaga a lo largo del sentido positivo del eje OX (IV.3.2.4°):

$$\mathbf{E} = f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} y sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas no dependen de y ni de z :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

De las ecuaciones de Maxwell (p. 2º) se deduce que, para el campo de una onda plana,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0,$$

o sea, E_x y H_x no dependen de las coordenadas ni del tiempo. Por esto, para el campo *alternativo* de la onda plana, $E_x = H_x = 0$ y los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda:

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k},$$

donde \mathbf{j} y \mathbf{k} son los versores de los ejes de coordenadas.

5º. Los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} del campo de una onda electromagnética son perpendiculares entre sí, de manera que \mathbf{v} , \mathbf{E} y \mathbf{H} forman una triada de vectores derecha (fig. IV.4.1). En efecto, para el campo de una onda plana (p. 4º),

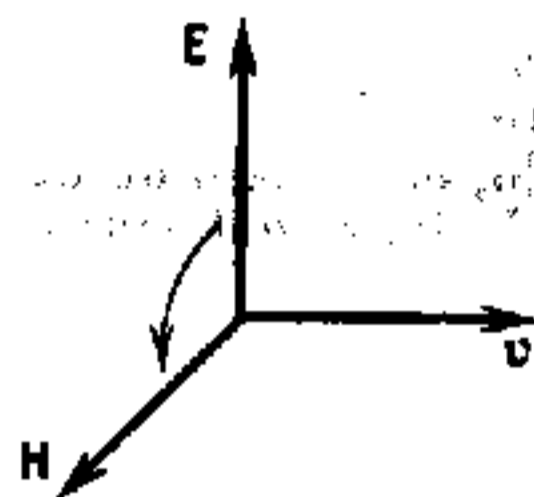


Fig. IV.4.1.

$$E_y = f_1 \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad E_z = f_2 \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

$$H_y = \varphi_1 \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad \text{y} \quad H_z = \varphi_2 \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

De las ecuaciones de Maxwell (p. 2º) se deduce que

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} \frac{dE_y}{d\xi} = \sqrt{\mu\mu_0} \frac{dH_z}{d\xi} \quad \text{y} \quad \sqrt{\epsilon\epsilon_0} \frac{dE_z}{d\xi} = -\sqrt{\mu\mu_0} \frac{dH_y}{d\xi},$$

siendo $\xi = t - \frac{x}{v}$. Por esto, para el campo *alternativo* de una onda plana,

$$H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_z, \quad H_z = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_y \quad \text{y} \quad (\mathbf{E}\mathbf{H}) = 0.$$

Los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} , perpendiculares entre sí, oscilan en fase, es decir, se anulan al mismo tiempo y alcanzan sus valores máximos también al mismo tiempo. Entre sus módulos existe la relación

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H,$$

que es correcta para cualquier onda electromagnética móvil (IV.3.2.1°) independientemente de la forma de sus superficies de onda (IV.3.2.3°).

6°. Se llama *onda monocromática* la onda electromagnética de una frecuencia ν determinada, es decir, una onda electromagnética sinusoidal. En cada punto del campo electromagnético de la onda monocromática, las proyecciones de los vectores E y H sobre los ejes de coordenadas de un sistema inercial de referencia, efectúan oscilaciones armónicas (IV.1.1.3°) de la misma frecuencia, igual a la frecuencia ν de la onda. Por ejemplo, en el caso de una *onda monocromática plana* que se propaga a lo largo del sentido positivo del eje OX ,

$$E_y = A_1 \text{sen}(\omega t - kx), \quad H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_z,$$

$$E_z = A_2 \text{sen}(\omega t - kx + \varphi), \quad H_z = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_y,$$

donde $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia cíclica (circular) de la onda; k , el número de onda (IV.3.2.6°); A_1 y A_2 , las amplitudes de E_y y E_z ; y φ , la diferencia de fases de las oscilaciones de E_z y E_y .

7°. Para un valor arbitrario de φ (p. 6°), la onda monocromática plana estará *polarizada elípticamente*, es decir, en cada punto del campo de la onda, los vectores E y H , permaneciendo perpendiculares entre sí, variarán con el tiempo de tal modo que sus extremos describirán elipses situadas en un plano perpendicular a la dirección en que se propaga la onda:

$$\frac{E_y^2}{A_1^2} + \frac{E_z^2}{A_2^2} - \frac{2E_y E_z}{A_1 A_2} \cos \varphi = \text{sen}^2 \varphi,$$

$$\frac{H_y^2}{A_2^2} + \frac{H_z^2}{A_1^2} + \frac{2H_y H_z}{A_1 A_2} \cos \varphi = \frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0} \text{sen}^2 \varphi.$$

En particular, si $A_1 = A_2$ y $\varphi = \pm(2m + 1)\pi/2$, siendo $m = 0, 1, 2, \dots$, las elipses se transformarán en circunferencias:

$$E_y^2 + E_z^2 = A_1^2 \quad \text{y} \quad H_y^2 + H_z^2 = \frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0} A_1^2.$$

Esta onda se dice que está *polarizada circularmente*.

Si $\varphi = \pm m\pi$, donde $m = 0, 1, 2, \dots$, las elipses degenerarán en rectas:

$$\frac{E_y}{A_1} \pm \frac{E_z}{A_2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{H_y}{A_2} \mp \frac{H_z}{A_1} = 0.$$

Esta onda se llama *polarizada rectilíneamente* (o *plana polarizada*). En la fig. IV.4.2 se muestran los valores de los vectores E y H del campo de una onda monocromática polarizada

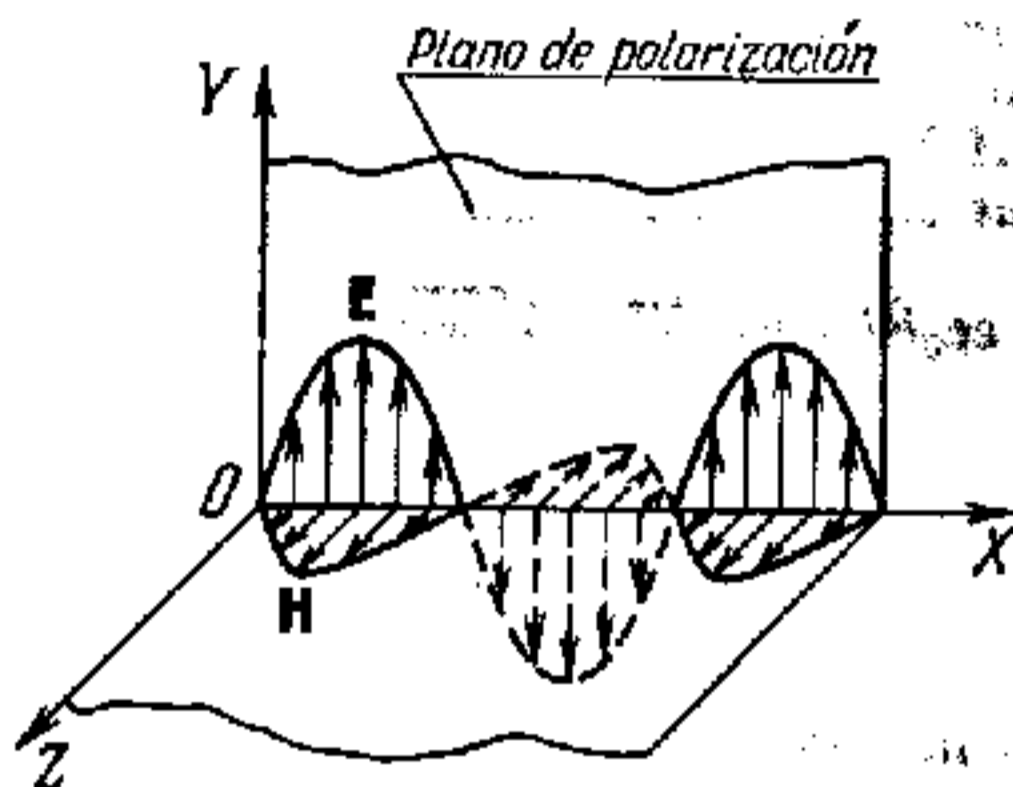


Fig. IV.4.2.

rectilíneamente plana, en distintos puntos del rayo (eje OX), tomados en un mismo instante. Los ejes OY y OZ han sido trazados respectivamente en las direcciones en que oscilan los vectores E y H , de modo que $E_z = H_y = 0$. De acuerdo con la nueva terminología, el plano que pasa por el vector eléctrico E y por el rayo se llama *plano de polarización* de la onda polarizada rectilíneamente. Antes este plano se denominaba *plano de las oscilaciones* de la onda, y por plano de polarización se entendía el que pasa por el vector magnético H y por el rayo (esta terminología aún suele encontrarse en algunos libros).

8°. Una onda monocromática plana arbitraria se puede representar en forma del conjunto de dos ondas monocromáticas planas de la misma frecuencia, polarizadas rectilíneamente en planos perpendiculares entre sí, que se propagan simultáneamente en una misma dirección. Por ejemplo, una onda monocromática plana que se propague a lo largo del eje OX (p. 6°) se puede considerar como el resultado de la superposición de una onda y ($E_1 = E_y$) y de una onda z ($E_2 = E_z$).

§ IV.4.2. Energía de las ondas electromagnéticas

1°. La densidad volumétrica de la energía de un campo electromagnético en un medio isótropo lineal (IV. 3.1.7°),

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2},$$

donde ϵ y μ son, respectivamente, la permitividad relativa y la permeabilidad magnética del medio. De la relación entre los módulos de los vectores E y H del campo de la onda electromagnética (IV.4.1.5°) se deduce que la densidad volumétrica de la energía de las ondas electromagnéticas

$$w = \epsilon\epsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c} EH,$$

donde c es la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío (IV.4.1.3°).

2°. En el caso de una onda monocromática plana polarizada rectilíneamente que se propague a lo largo del sentido positivo del eje OX , la intensidad del campo $E = A \sin(\omega t - kx)$. Respectivamente, la densidad volumétrica de la energía de esta onda será

$$w = \epsilon\epsilon_0 A^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

El valor de w en cada punto del campo oscila periódicamente, con frecuencia ω/π , entre los límites de 0 a $w_{\max} = \epsilon\epsilon_0 A^2$. El valor medio de w durante un período es proporcional al cuadrado de la amplitud de la intensidad del campo:

$$\langle w \rangle = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} w dt = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 A^2.$$

Si la onda monocromática plana está polarizada arbitrariamente (elípticamente) (IV.4.1.7°), de acuerdo con (IV.4.1.8°),

$$w = \epsilon\epsilon_0 [A_1^2 \sin^2(\omega t - kx) + A_2^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)]$$

y

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 (A_1^2 + A_2^2).$$

3°. El vector densidad de flujo de energía (IV.3.3.5°) de la onda electromagnética se llama vector de Umov — Poynting \mathbf{P}

(y a veces *vector de Poynting*). La velocidad de transporte de la energía por la onda monocromática móvil es igual a la velocidad de fase de dicha onda $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ (IV.3.3.5°). Por lo tanto, el vector de Umov — Poynting para esta onda será

$$P = wv = [EH].$$

En el caso de una onda plana monocromática polarizada rectilíneamente (p. 2°), el vector de Umov — Poynting estará dirigido hacia el lado en que se propaga la onda, y numéricamente será igual a

$$P = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} A^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

Si la onda monocromática plana es polarizada elípticamente (IV.4.1.7°),

$$P = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} [A_1^2 \sin^2(\omega t - kx) + A_2^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)].$$

4°. Recibe el nombre de *intensidad de una onda electromagnética* la magnitud física J numéricamente igual a la energía que transporta la onda en la unidad de tiempo a través de la unidad de área de una superficie situada perpendicularmente a la dirección en que se propaga la onda. La intensidad de la onda electromagnética es igual al módulo del valor medio del vector de Umov — Poynting durante el período de su oscilación completa:

$$J = | \langle P \rangle |.$$

La intensidad de una onda móvil monocromática

$$J = \langle w \rangle v,$$

donde v es la velocidad de fase de la onda, y $\langle w \rangle$, el valor medio de la densidad volumétrica de la energía del campo de la onda.

La intensidad de una onda móvil plana monocromática polarizada de manera rectilínea (p. 2°), es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud A de las oscilaciones del vector E del campo de la onda:

$$J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} A^2.$$

Si la onda monocromática plana es polarizada elípticamente (IV.4.1.7°), su intensidad es igual a la suma de las intensidades de la onda y y de la onda z que forman la onda considerada (IV.4.1.8°)

$$J = J_y + J_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} (A_1^2 + A_2^2).$$

Observación. Por *intensidad de la luz*, es decir, de las ondas electromagnéticas que se estudian en la óptica, se suele entender simplemente el cuadrado de la amplitud de las oscilaciones de la intensidad E del campo de la onda luminosa.

5°. La intensidad J de una onda monocromática esférica polarizada rectilíneamente está relacionada con la amplitud A de las oscilaciones del vector E lo mismo que en el caso de la onda plana (p. 4°). Pero la amplitud y la intensidad de la onda esférica decrecen a medida que aumenta la distancia r hacia el centro de la onda (IV.3.3.6°): $A = a_0/r$ y $I = i_0/r^2$.

6°. Las ondas electromagnéticas ejercen presión sobre los obstáculos que encuentran y que las absorben y reflejan. La *presión de las ondas electromagnéticas* se explica por el hecho de que, bajo la influencia del campo eléctrico de la onda, las partículas de la sustancia se ponen en movimiento ordenado y sufren la acción de las fuerzas de Lorentz por parte del campo magnético de ella misma (III.11.1.1°).

Según la teoría de Maxwell, la presión de las ondas electromagnéticas es

$$p = \frac{J}{v} (1 + R) \cos^2 i = \langle w \rangle (1 + R) \cos^2 i,$$

donde J es la intensidad de la onda que incide sobre el obstáculo; v , su velocidad; $\langle w \rangle$, el valor medio de la densidad volumétrica de la energía de la onda; i , el ángulo de incidencia (IV.4.5.2°); y R , el factor de reflexión (IV.4.5.6°).

§ IV.4.3. Emisión de ondas electromagnéticas

1°. El proceso de excitación de ondas electromagnéticas por cualquier sistema en el espacio circundante se llama *emisión de dichas ondas*, y el sistema que las excita, *sistema emisor*. El campo de las ondas electromagnéticas recibe el nombre de *campo de radiación*. De acuerdo con las suposiciones de la electrodinámica clásica, las ondas electromagnéticas son excitadas

por las cargas eléctricas que se mueven con aceleración (en particular, por un circuito eléctrico en el cual la corriente varía). En la substancia se puede producir también la radiación de Vavílov — Cherenkov (V.3.6.1°).

El sistema emisor más simple es un dipolo eléctrico (III.2.2.3°) cuyo momento p_e varía con el tiempo. Este dipolo «oscilante» se llama *oscilador* o *vibrador simple*. Los osciladores se utilizan mucho en la física para la simulación y cálculo de los campos de radiación de los sistemas reales. Si el sistema emisor es eléctricamente neutro y sus dimensiones son pequeñas en comparación con la longitud λ de las ondas emitidas, en la zona de onda del sistema, o sea, en los puntos que se hallan a distancias $r \gg \lambda$ del sistema, el campo de radiación se asemeja al de un oscilador que tenga el mismo momento eléctrico que todo el sistema emisor.

2°. Se llama *oscilador armónico lineal* el dipolo eléctrico cuyo momento p_e varía según la ley armónica

$$p_e = p_0 \text{ sen } \omega t, \text{ donde } p_0 = \text{const.}$$

En un punto M de la zona de onda de un oscilador armónico lineal que se encuentra en el vacío, los vectores E y H del campo de radiación en un instante t constituyen

$$E(t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r^3} [(p_0 r] r] \text{ sen } (\omega t - kr),$$

$$H(t) = -\frac{\omega^2}{4\pi cr^2} [p_0 r] \text{ sen } (\omega t - kr),$$

donde r es el radio vector trazado desde el punto O donde permanece el dipolo, hasta el punto M (fig. IV.4.3). Los vectores E y H son perpendiculares entre sí y se hallan en un plano perpendicular al radio vector r , de manera que E , H y r forman una triada derecha. El vector E es tangente al meridiano, y el H , al círculo de latitud trazado por el punto M sobre la esfera de radio r con centro en el punto O .

3°. El vector de Úmov — Poynting en el punto M de la zona de onda de un oscilador armónico lineal es

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 \text{ sen}^2 \vartheta}{16\pi^2 cr^3} r \text{ sen}^2 (\omega t - kr),$$

donde ϑ es el ángulo entre los vectores p_0 y r .

La intensidad de la onda electromagnética en el punto M constituye

$$J = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 \sin^2 \vartheta}{32\pi^2 cr^2}.$$

La variación de J en función de ϑ , cuando se fija el valor de r , representada en coordenadas polares (fig. IV.4.4), se llama *diagrama polar direccional de emisión del oscilador (dipolo)*.

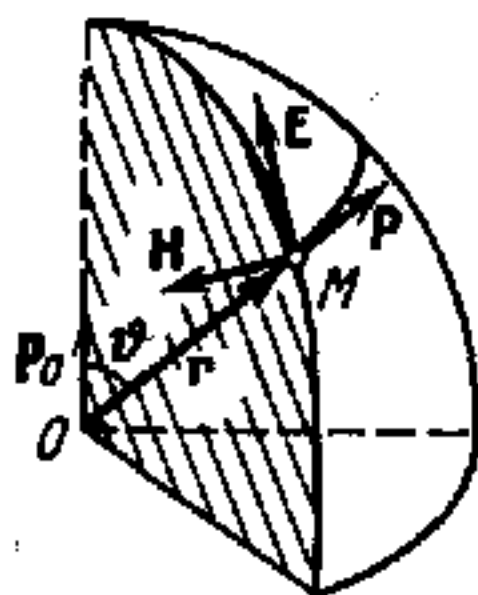


Fig. IV.4.3.

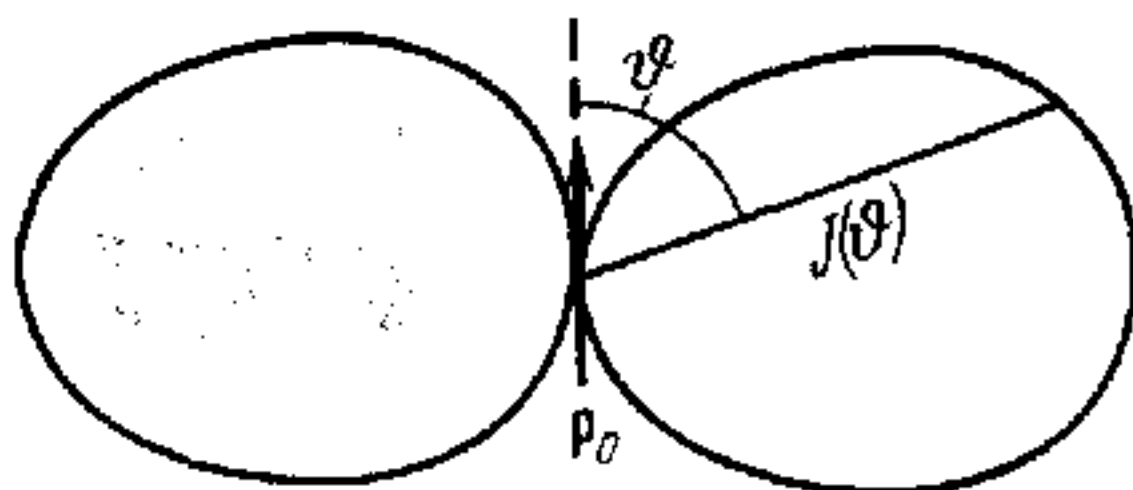


Fig. IV.4.4.

El dipolo emite más intensamente en las direcciones que forman con su eje un ángulo $\vartheta = \pi/2$, es decir, en el plano que pasa por un medio del dipolo y es perpendicular a su eje. A lo largo de este último ($\vartheta = 0$ y $\vartheta = \pi$), el dipolo no emite absolutamente nada.

La potencia media de emisión de un oscilador armónico lineal es

$$\langle N \rangle = 2\pi r^2 \int_0^\pi J \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}.$$

4°. La potencia instantánea de emisión de una carga q que se mueve con aceleración a constituye

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2.$$

Si la carga realiza oscilaciones armónicas de amplitud l_0 y frecuencia cíclica ω , la potencia media de su emisión será

$$\langle N \rangle = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 l_0^2}{12\pi c}.$$

Según la teoría clásica, la emisión de luz por los átomos se debe a las oscilaciones de los electrones en ellos. En virtud del gasto de energía en la radiación, estas oscilaciones se amortiguan paulatinamente, es decir, su amplitud varía de acuerdo con la ley (IV.2.1.3°): $l_0 = l_{00} \exp(-\beta t)$, donde l_{00} es la amplitud inicial, y β , el factor de amortiguamiento. La energía de las oscilaciones de un electrón (IV.1.2.2°) es $W = \frac{1}{2} m_e \omega^2 l_0^2$, siendo m_e la masa del electrón. Como $-dW = \langle N \rangle dt = 2\beta W dt$ y $q = -e$, el tiempo de relajación (IV.2.1.3°) de estas oscilaciones, llamado *tiempo medio de desexcitación del átomo*, es

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{12\pi c m_e}{\mu_0 e^2 \omega^2}$$

Para la luz visible, $\omega \sim 4 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ y $\tau \sim 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

§ IV.4.4. Escala de las ondas electromagnéticas

1°. En dependencia de la frecuencia ν (o de la longitud de onda en el vacío $\lambda = c/\nu$, donde c es la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío) y del procedimiento de emisión y de registro, se distinguen varios tipos de ondas electromagnéticas: ondas hertzianas o radioeléctricas, radiación óptica, radiación Roentgen o rayos X y rayos gamma.

Se llaman *hertzianas* las ondas electromagnéticas cuya longitud λ en el vacío es mayor que $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ (respectivamente, $\nu < 6 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$). Ateniéndose a las peculiaridades de propagación y generación, toda gama o banda de ondas radioeléctricas se divide en 9 subgamas o subbandas (tabla IV.4.1).

Tabla IV.4.1

Denominación de la banda	Longitud de onda, m	Frecuencia, Hz
Ondas ultralargas	más de 10^4	menos de $3 \cdot 10^4$
Ondas largas	$10^4 - 10^3$	$3 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^5$
Ondas medias	$10^3 - 10^2$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^6$
Ondas cortas	$10^2 - 10$	$3 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^7$
Ondas métricas	$10 - 1$	$3 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^8$
Ondas decimétricas	$1 - 0,1$	$3 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^9$
Ondas centimétricas	$0,1 - 0,01$	$3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{10}$
Ondas milimétricas	$10^{-2} - 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{10} - 3 \cdot 10^{11}$
Ondas inframilimétricas o submilimétricas	$10^{-3} - 5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{11} - 6 \cdot 10^{12}$

Figura 2°. La división de las radiofrecuencias en 12 bandas, según el reglamento internacional de radiocomunicación y la correspondiente división de las ondas radioeléctricas conforme a su longitud en el vacío, se da en la tabla IV.4.2.

Denominación de la banda de radiofrecuencias		Límites de las bandas
Término principal	Término paralelo	
1 ^a banda	Extremadamente bajas, FEB	3-30 Hz
2 ^a "	Ultrabajas, FUB	30-300 Hz
3 ^a "	Infrabajas, FIB	0,3-3 kHz
4 ^a "	Muy bajas, FMB	3-30 kHz
5 ^a "	Bajas, FB	30-300 kHz
6 ^a "	Medias, FM	0,3-3 MHz
7 ^a "	Altas, FA	3-30 MHz
8 ^a "	Muy altas, FMA	30-300 MHz
9 ^a "	Ultraaltas, FUA	0,3-3 GHz
10 ^a "	Superaltas, FSA	3-30 GHz
11 ^a "	Extremadamente altas, FEA	30-300 GHz
12 ^a "	Hiperaltas, FHA	0,3-3 THz

3°. Se da el nombre de *radiación óptica* o *luz* a las ondas electromagnéticas (radiación electromagnética) cuya longitud en el vacío se encuentra en la banda de 10 nm a 1 mm (límites convencionales). A la radiación óptica pertenece la radiación infrarroja, la visible y la ultravioleta*).

Se denomina *radiación infrarroja* (IR) la radiación electromagnética que emiten los cuerpos calientes cuyas longitudes de onda en el vacío se hallan dentro de los límites de 1 mm a 770 nm (1 nm = 10^{-9} m).

*) De acuerdo con las recomendaciones del Comité de Tecnología Científico-Técnica de la Academia de Ciencias de la URSS («Optica física» (terminología), Recopilación de términos recomendables, ed. 74, «Nauka», 1968), en la radiación óptica también se incluyen los rayos X y, respectivamente, la banda de longitudes de onda de la radiación óptica se fija desde 0,1 Å (10^{-11} m) hasta 1 cm.

Radiación visible o luz visible es la radiación electromagnética cuyas longitudes de onda en el vacío están comprendidas entre 770 y 380 nm, y la cual es capaz de producir directamente sensaciones visuales en el ojo humano.

Tabla IV.4.2

Denominación de la banda de ondas radioeléctricas		Límites de las bandas
Término principal	Término paralelo	
1 ^a banda	Decamegamétricas	100–10 Mm
2 ^a "	Megamétricas	10–1 Mm
3 ^a "	Hectokilométricas	1000–100 km
4 ^a "	Miriamétricas	100–10 km
5 ^a "	Kilométricas	10–1 km
6 ^a "	Hectométricas	1–0,1 km
7 ^a "	Decamétricas	100–10 m
8 ^a "	Métricas	10–1 m
9 ^a "	Decimétricas	1–0,1 m
10 ^a "	Centimétricas	10–1 cm
11 ^a "	Milimétricas	10–1 mm
12 ^a "	Decimilimétricas	1–0,1 mm

Es *ultravioleta (UV)* la radiación electromagnética de longitudes de onda en el vacío que van desde 380 hasta 10 nm.

4°. La *radiación Roentgen o rayos X* es una radiación electromagnética que se produce cuando las partículas con carga y los fotones (V.6.1.4°) interaccionan con los átomos de una sustancia, y se caracteriza por tener en el vacío longitudes de onda que abarcan una amplia banda, cuyos límites convencionales van desde 10–100 nm hasta 0,01–1 pm ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$).

Se conoce con el nombre de *radiación gamma o rayos gamma*, la radiación electromagnética con longitudes de onda en el vacío menores de 0,1 nm, que emiten los núcleos atómicos excitados durante las transformaciones radiactivas y las reacciones nucleares, así como al desintegrarse las partículas y al aniquilarse los pares «partícula—antipartícula» (VIII.2.5.5°), y en otros procesos.

§ IV.4.5. Reflexión y refracción de las ondas electromagnéticas en la superficie de separación de dos medios dieléctricos

1°. Se llama *índice de refracción* (*índice de refracción absoluto*) de un medio la magnitud n igual a la razón de la velocidad c de las ondas electromagnéticas en el vacío a su velocidad de fase v en dicho medio: $n = c/v$. De IV.4.1.3° se deduce que $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, donde ϵ y μ son, respectivamente, la permitividad relativa y la permeabilidad magnética del medio. Para un medio carente de propiedades ferromagnéticas, $\mu \approx 1$ y $n \approx \sqrt{\epsilon}$.

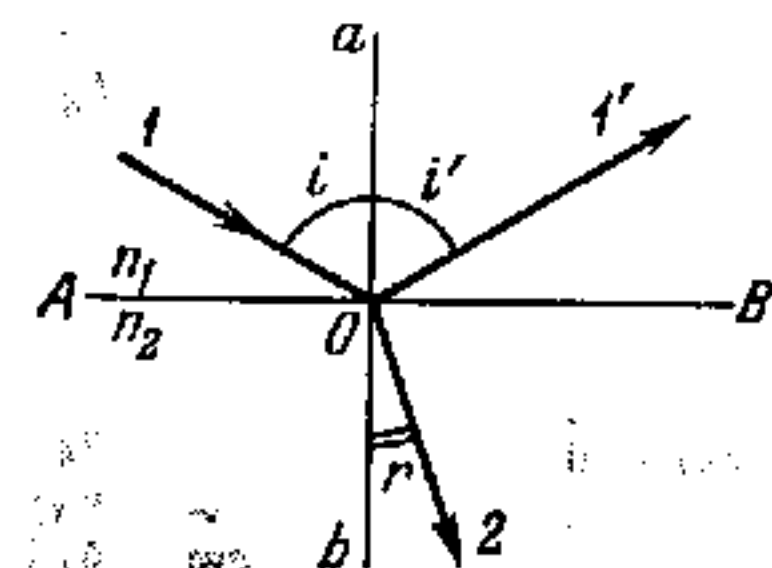


Fig. IV.4.5.

Se da el nombre de *índice de refracción relativo de dos medios* (del segundo respecto del primero) a la magnitud n_{21} igual a la relación entre los índices de refracción de ambos medios: $n_{21} = n_2/n_1$. Para los medios no ferromagnéticos, $n_{21} = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$.

2°. Cuando una onda electromagnética incide sobre la superficie de separación de dos medios, una parte de ella se refleja en dicha superficie y otra parte se refracta, pasando al segundo medio. En la fig. IV.4.5, la línea AB es la superficie plana de separación de dos medios. Los rayos 1, 1' y 2 caracterizan las direcciones en que se propagan las ondas planas incidente, reflejada y refractada. Estas direcciones reciben, respectivamente, los nombres de *rayos incidente*, *rayo reflejado* y *rayo refractado*, y los ángulos que forman con la perpendicular ab trazada por el punto de incidencia O a la superficie de separación, se denominan: i , *ángulo de incidencia*; i' , *ángulo de reflexión*, y r , *ángulo de refracción*.

Plano de incidencia es el que pasa por el rayo incidente y es perpendicular a la superficie de separación de los medios en el punto de incidencia.

3°. Las leyes de reflexión y refracción de las ondas electromagnéticas en la superficie de separación de dos medios dieléctricos, se pueden obtener partiendo de las condiciones de frontera para el campo electromagnético (III.14.4.4°). En el primer

medio, al campo de la onda incidente (E^0 , H^0) se superpone el campo de la onda reflejada (E^{refl} , H^{refl}). En el segundo medio sólo existe el campo de la onda refractada (que pasa a este medio) (E^{refr} , H^{refr}). Por esto (suponiendo que $\mu_2 = \mu_1 = 1$), las condiciones de frontera tienen la forma siguiente:

$$E_{\tau}^0 + E_{\tau}^{\text{refl}} = E_{\tau}^{\text{refr}}, \quad \epsilon_1 (E_n^0 + E_n^{\text{refl}}) = \epsilon_2 E_n^{\text{refr}},$$

$$H_{\tau}^0 + H_{\tau}^{\text{refl}} = H_{\tau}^{\text{refr}}, \quad H_n^0 + H_n^{\text{refl}} = H_n^{\text{refr}}.$$

Aquí E_{τ} , H_{τ} y E_n , H_n son las proyecciones de los vectores E y H , respectivamente, sobre los planos tangencial y normal a la superficie de separación de los medios. De estas relaciones se infiere que si sobre una superficie lisa de separación de dos medios incide una onda monocromática plana, se cumplen (independientemente del carácter que tenga la polarización de esta onda) las leyes siguientes:

a) las ondas reflejada y refractada también son monocromáticas y tienen la misma frecuencia que la incidente:

b) *la ley de reflexión*: el rayo reflejado se encuentra en el plano de incidencia, y el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia ($i' = i$);

c) *la ley de refracción*: el rayo refractado se halla en el plano de incidencia, y el ángulo de refracción está ligado al ángulo de incidencia según la relación

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \quad (\text{ley de Snell}).$$

4°. Valiéndose de las condiciones de frontera (p. 3°) también se pueden hallar las relaciones entre las fases, amplitudes e intensidades de las ondas monocromáticas incidente, reflejada y refractada. Para esto, de acuerdo con IV.4.1.8°, basta conocer las relaciones indicadas para las ondas polarizadas rectilíneamente de dos tipos: las ondas p cuyo vector $E = E_p$ se encuentra en el plano de incidencia y cuyo vector $H = H_p$ es perpendicular a él (fig. IV.4.6), y las ondas s que tienen el vector $E = E_s$ perpendicular al plano de incidencia y el vector $H = H_s$ en dicho plano (fig. IV.4.7).

Las relaciones entre las amplitudes de oscilación del vector E en las ondas incidente (A^0), reflejada (A^{refl}) y refractada (A^{refr}), en el caso de las ondas p y s se expresan por las fórmulas

de Fresnel:

$$A_p^{\text{refl}} = -A_p^0 \frac{\text{tg}(i-r)}{\text{tg}(i+r)}, \quad A_p^{\text{refr}} = A_p^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)},$$

$$A_s^{\text{refl}} = -A_s^0 \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad A_s^{\text{refr}} = A_s^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r)}.$$

En particular, cuando las ondas inciden normalmente sobre la superficie de separación de los medios ($i = r = 0$),

$$A_p^{\text{refl}} = -A_p^0 \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}, \quad A_p^{\text{refr}} = A_p^0 \frac{2}{n_{21} + 1},$$

$$A_s^{\text{refl}} = -A_s^0 \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}, \quad A_s^{\text{refr}} = A_s^0 \frac{2}{n_{21} + 1}.$$

En las fórmulas de Fresnel, A_p^0 y A_s^0 son magnitudes positivas, y A_p^{refr} y A_s^{refr} , cualesquiera que sean los valores del ángulo

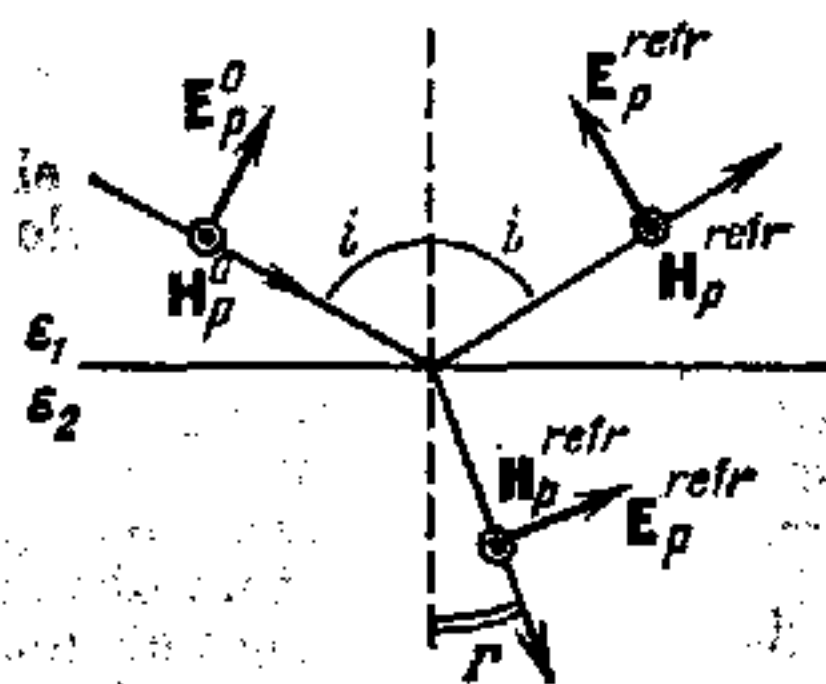


Fig. IV.4.6.

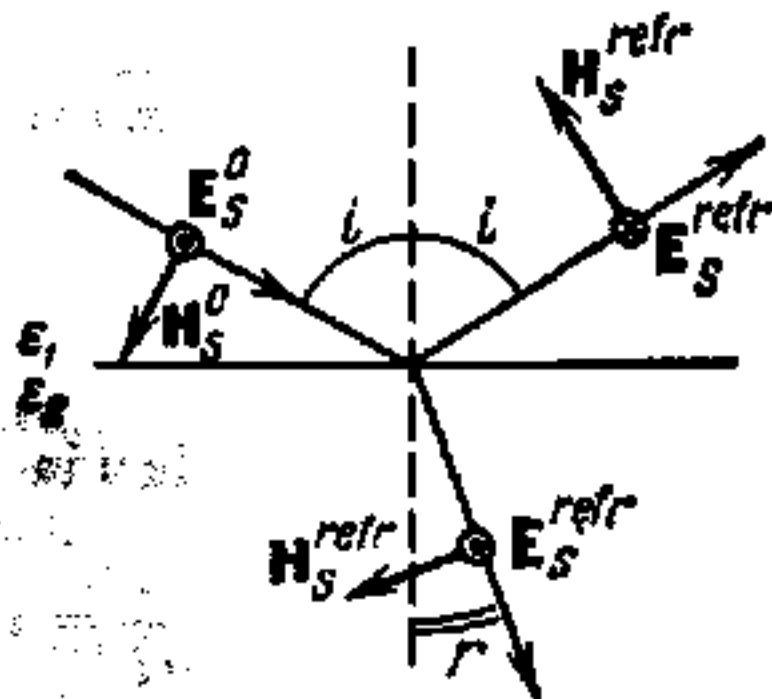


Fig. IV.4.7.

de incidencia y del ángulo de refracción, también son positivas, lo que pone de manifiesto la coincidencia de fase de las ondas refractada e incidente. Las magnitudes A_p^{refl} y A_s^{refl} pueden ser tanto negativas como positivas. En el primer caso, representado en las figs. IV.4.6 y IV.4.7, la fase de oscilación del vector E varía en π al producirse la reflexión (la fase de oscilación del vector H no varía al ocurrir esto). En el segundo caso la reflexión se efectúa sin que cambien de fase las oscilaciones del vector E (respectivamente, las oscilaciones del vector H experimentan un cambio de fase igual a π).

5°. Los valores del defasaje de las oscilaciones del vector E , cuando se reflejan ondas electromagnéticas de los tipos p y s , en dependencia de las condiciones (del ángulo de incidencia i y del índice de refracción relativo del medio n_{21}), se dan en la tabla IV.4.3.

Tabla IV.4.3

Condiciones Tipo de onda	$i + r < \pi/2$ ($i < i_{Br}$)		$i + r > \pi/2$ ($i > i_{Br}$)	
	$n_{21} > 1$ ($i > r$)	$n_{21} < 1$ ($i < r$)	$n_{21} > 1$ ($i > r$)	$n_{21} < 1$ ($i < r$)
Onda p	π	0	0	π
Onda s	π	0	π	0

El ángulo de incidencia i_{Br} con el cual los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí, se llama *ángulo de Brewster*. Si $i = i_{Br}$, entonces $i + r = \pi/2$ y de la ley de refracción de las ondas (p. 3°) se deduce que $\text{tg } i_{Br} = n_{21}$. A su vez, de la fórmula de Fresnel (p. 4°) se deduce que, cuando $i = i_{Br}$, la amplitud $A_p^{refl} = 0$, es decir, la onda p no se refleja en la superficie de separación de los medios y pasa totalmente del medio 1° al 2°.

6°. Se llama *factor de reflexión* R de una onda electromagnética en la superficie de separación de dos medios, la relación entre la intensidad (IV.4.2.4°) de la onda reflejada y la intensidad de la onda incidente:

$$R (J^{refl}/J^0) = (A^{refl}/A^0)^2.$$

Los factores de reflexión de las ondas p y s son

$$R_p = \frac{\text{tg}^2(i-r)}{\text{tg}^2(i+r)}, \quad R_s = \frac{\text{sen}^2(i-r)}{\text{sen}^2(i+r)}.$$

En particular, cuando las ondas inciden normalmente sobre la superficie de separación de los medios ($i = r = 0$),

$$R_p = R_s = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2.$$

Si la onda incidente está polarizada arbitrariamente, el factor de reflexión

$$R = \frac{J_p^{\text{refl}} + J_s^{\text{refl}}}{J_p^0 + J_s^0} = \frac{R_p J_p^0 + R_s J_s^0}{J_p^0 + J_s^0},$$

donde J_p^0 y J_s^0 son las intensidades de las componentes p y s de una onda incidente cuya intensidad $J^0 = J_p^0 + J_s^0$.

7°. Se da el nombre de *factor* o *coeficiente de transmisión* T a la relación entre la intensidad de la onda transmitida (refractada) y la intensidad de la onda incidente:

$$T = \frac{J^{\text{refr}}}{J^0} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \left(\frac{A^{\text{refr}}}{A^0} \right)^2 = n_{21} \left(\frac{A^{\text{refr}}}{A^0} \right)^2.$$

Los factores de transmisión para las ondas p y s , son

$$T_p = \frac{4 \cos^2 i \sin i \sin r}{\sin^2 (i+r) \cos^2 (i-r)}, \quad T_s = \frac{4 \cos^3 i \sin i \sin r}{\sin^2 (i+r)}.$$

En particular, cuando las ondas inciden normalmente sobre la superficie de separación de los medios ($i = r = 0$),

$$T_p = T_s = \frac{4n_{21}}{(n_{21} + 1)^2}.$$

8°. Si $n_{21} = (n_2/n_1) < 1$, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia: $\sin r = \sin i/n_{21}$ y $r > i$. El ángulo de incidencia con el cual el ángulo de refracción se hace igual a $\pi/2$ se llama *ángulo límite* (o *crítico*) i_{lim} . El ángulo $i_{\text{lim}} = \arcsen n_{21}$. Si $i \geq i_{\text{lim}}$, las intensidades de las ondas reflejada e incidente son iguales, o sea, la onda se refleja totalmente en la superficie de separación de los medios ($R = 1$). Este fenómeno se denomina *reflexión (total) interna*.

§ IV.4.6. Efecto Doppler

1°. Cuando la fuente y el receptor de ondas electromagnéticas se mueven uno respecto a otro, se observa el efecto Doppler (IV.3.6.1°). La ley de este fenómeno, para las ondas electromagnéticas se puede establecer basándose en la teoría especial de

la relatividad. Supongamos que el receptor P está en reposo con respecto a un sistema inercial de referencia K y que la fuente F se mueve (con respecto a K) a lo largo del sentido positivo del eje OX con velocidad V (fig. IV.4.8). La fuente F está en reposo en el sistema de referencia K' y se encuentra en su origen de coordenadas. Los ejes de coordenadas de los sistemas K' y K son paralelos dos a dos (el eje $O'X'$ coincide con el OX). En la fig. IV.4.8 se muestra la posición de la fuente F en el instante $t = t' = 0$ en que dicha fuente pasa por el origen de coordenadas del sistema de referencia K . De acuerdo con el principio de relatividad de Einstein (I.5.1.2°) las ecuaciones de la onda monocromática esférica (IV.3.2.8°) que emite la fuente en este instante, en dirección del receptor P , tienen, en los sistemas de referencia K y K' , formas idénticas:

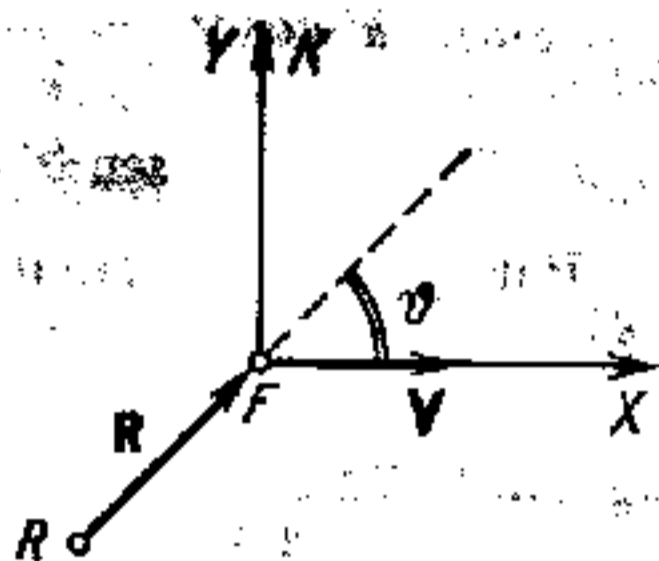


Fig. IV.4.8.

$$\tilde{s} = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t + kx \cos \vartheta + ky \sin \vartheta + \delta)} \tag{a}$$

$$\tilde{s}' = \frac{a'_0}{r'} e^{i(\omega' t' + k' x' \cos \vartheta' + k' y' \sin \vartheta' + \delta')} \tag{b}$$

Aquí $\omega' = \omega_0$ y ω son las frecuencias cíclicas de las oscilaciones de la fuente y el receptor; $k = \omega/c$ y $k' = \omega'/c$ son los números de onda (se supone que la onda se propaga en el vacío); y ϑ y ϑ' , los ángulos entre la dirección en que se hace la observación y la dirección de la velocidad V (eje OX), medidos con arreglo a los sistemas de referencia K del receptor, y K' de la fuente.

La expresión (b) se puede obtener de (a) sustituyendo las variables x, y, t por las x', y', t' de acuerdo con las transformaciones de Lorentz (I.5.3.2°):

$$\begin{aligned} \omega' t' + k' x' \cos \vartheta' + k' y' \sin \vartheta' + \delta' &\equiv \\ &\equiv \omega \left(\frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right) + k \left(\frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \right) \cos \vartheta + ky' \sin \vartheta + \delta. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \left(1 + \frac{V}{c} \cos \vartheta \right),$$

$$k' \cos \vartheta' = \frac{k}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \left(\cos \vartheta + \frac{V}{c} \right),$$

$$k' \sin \vartheta' = k \sin \vartheta \quad \text{y} \quad \delta' = \delta.$$

Por esto, las relaciones que definen el *efecto Doppler para las ondas electromagnéticas* en el vacío tienen la forma

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + \frac{V}{c} \cos \vartheta} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + \frac{V}{c} \cos \vartheta}.$$

2°. Cuando las velocidades del movimiento de la fuente de ondas con respecto al receptor son pequeñas ($V \ll c$), la fórmula relativista del efecto Doppler (p. 1°) coincide con la fórmula clásica (IV.3.6.3°):

$$\nu \approx \nu_0 \left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta \right).$$

Si la fuente se mueve con respecto al receptor siguiendo la recta que los une entre sí ($\vartheta = 0, \pi$), se observa el *efecto Doppler longitudinal*. En caso de que la fuente y el receptor se aproximen entre sí ($\vartheta = \pi$),

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} > \nu_0,$$

y en caso de que se alejen entre sí ($\vartheta = 0$),

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} < \nu_0.$$

3°. De la teoría relativista del efecto Doppler (p. 1°) se deduce la existencia de *efecto Doppler transversal*, el cual se observa cuando $\vartheta = \pi/2$ y $\vartheta = 3\pi/2$, es decir, en los casos cuando la fuente se mueve perpendicularmente a la línea de observación:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}.$$

El efecto Doppler transversal es mucho más débil que el longitudinal (en virtud de la pequeñez de V/c). Este efecto se

debe a la diferencia de la marcha del tiempo en los sistemas de referencia asociados al receptor y a la fuente de ondas. Por esto, el descubrimiento experimental del efecto Doppler transversal constituyó una de las confirmaciones más importantes de la teoría especial de la relatividad.

4°. El efecto Doppler debido al movimiento térmico de los átomos de gas que emiten luz, ocasiona el *ensanchamiento Doppler de las rayas espectrales*. El intervalo de frecuencias de la luz, que registra el receptor, se extiende desde $\nu_0 - \frac{\Delta\nu_D}{2}$ hasta $\nu_0 + \frac{\Delta\nu_D}{2}$, siendo ν_0 la frecuencia de radiación monocromática del átomo en reposo. La magnitud de ensanchamiento Doppler $\Delta\nu_D \sim \sqrt{T/m}$, donde T es la temperatura absoluta del gas, y m , la masa del átomo.

obscuro. En el caso de la luz blanca, los colores se separan al pasar por un prisma. La luz blanca es una mezcla de todos los colores del espectro visible. La luz blanca puede ser descompuesta en sus componentes de color por un prisma. La luz blanca es una mezcla de todos los colores del espectro visible. La luz blanca puede ser descompuesta en sus componentes de color por un prisma.

Capítulo V.1. Interferencia de la luz

§ V.1.1. Monocromatismo y coherencia de tiempo de la luz

1°. Se llama *óptica* la parte de la física que estudia la naturaleza de la luz (IV.4.4.3°) y las leyes de su emisión, propagación e interacción con la sustancia. En la *óptica ondulatoria* se estudian los fenómenos ópticos en los cuales se pone de manifiesto la naturaleza ondulatoria de la luz (por ejemplo, los fenómenos de interferencia, difracción, polarización y dispersión de la luz). Como la luz constituye una emisión de ondas electromagnéticas, los fundamentos de la óptica ondulatoria se basan en las ecuaciones de Maxwell (III.14.4.3°) y en las conclusiones que de ellas se deducen con arreglo a esas ondas (IV.4.1). En la óptica ondulatoria clásica se estudian los medios que por sus propiedades ópticas son lineales (IV.2.1.7°), es decir, aquellos cuya permitividad ϵ y permeabilidad magnética μ no dependen de la intensidad de la luz (IV.4.2.4°). Por esto, en la óptica ondulatoria es correcto el principio de superposición (IV.3.4.1°).

Los fenómenos que se observan cuando la luz se propaga en medios ópticamente no lineales, se estudian en la *óptica no lineal*. Los efectos ópticamente no lineales presentan importancia cuando son muy grandes las intensidades de la luz emitida por potentes láseres (VI.2.6.8°).

2°. Se ha establecido experimentalmente que la acción de la luz sobre una célula fotoeléctrica, una película fotográfica, una pantalla fluorescente y otros dispositivos (para su registro), viene determinada por el vector intensidad eléctrica E del campo electromagnético de la onda luminosa, que por esto se llama, a veces, *vector luz*. Eso mismo también se deduce de la teoría electrónica clásica, según la cual, los procesos que origina la luz en la sustancia se deben a la acción del campo de la onda lu-

minosa sobre las partículas con carga de dicha substancia, o sea, sobre los electrones y los iones. La frecuencia de la luz visible y de onda aún más corta es tan grande ($\nu \gtrsim 10^{16}$ Hz) que sólo los electrones pueden efectuar oscilaciones forzadas de amplitud algo considerable. La fuerza que ejerce sobre un electrón el campo electromagnético (III.1.5°) constituye

$$\mathbf{F} = -e \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v}_1 \mathbf{B}] \} = -e \{ \mathbf{E} + \mu\mu_0 [\mathbf{v}_1 \mathbf{H}] \}.$$

Aquí $-e$ y \mathbf{v}_1 son, respectivamente, la carga y la velocidad del electrón, y $\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}$, el vector inducción magnética. De (IV.4.1.5°) se deduce que la magnitud absoluta de la componente magnética de la fuerza \mathbf{F} es mucho menor que su componente eléctrica:

$$\mu\mu_0 |[\mathbf{v}_1 \mathbf{H}]| \leq \mu\mu_0 v_1 H = \frac{v_1}{v} E \ll E \quad \text{y} \quad F \approx -eE,$$

puesto que la velocidad de las ondas electromagnéticas $v \sim 10^8$ m/s y la velocidad del electrón en el átomo, cuando el mismo efectúa oscilaciones forzadas debidas a la acción de la luz, constituye $v_1 \sim 10^6$ m/s.

3°. Cuando se superponen las luces de dos focos que no sean láseres*) (por ejemplo, de dos tubos de descarga en gases), e incluso de partes distintas de una misma fuente, la interferencia (IV.3.5.2°) no se observa. Por consiguiente, los focos de luz independientes no son coherentes (IV.3.5.1°) y su radiación no es monocromática (IV.4.1.6°). Las causas de esto se hallan en el mismo mecanismo de emisión de luz por los átomos (moléculas, iones) de la fuente de luz. El átomo excitado emite durante un intervalo muy corto de tiempo de desexcitación $\tau \sim 10^{-8}$ s (IV.4.3.4°), después del cual, una vez gastada en la emisión su energía excedente, retorna a su estado normal (no excitado). Al cabo de cierto tiempo el átomo puede volver a excitarse recibiendo energía del exterior, y comenzar a emitir. Esta emisión intermitente de luz por los átomos, en forma de impulsos aislados de corta duración —*trenes de ondas*—, es característica de cualquier foco de luz, independientemente del tipo concreto de procesos que se desarrollen en él y provoquen la excitación de los átomos. Durante la emisión espontánea (VI.2.6.6°), los átomos emiten independientemente unos de otros con fases ini-

*) Se tienen en cuenta las fuentes de luz ordinarias (lámparas de incandescencia y de descarga en gases, arco eléctrico, etc.) basadas en el fenómeno de emisión espontánea (VI.2.6.6°).

ciales casuales que varían desordenadamente de un acto de emisión del átomo a otro. Por esto los átomos que emiten espontáneamente son fuentes de luz no coherentes.

En el caso de emisión forzada, que se produce en un medio en desequilibrio (activo) por la acción de un campo electromagnético alternativo (VI.2.6.1°), la cuestión tiene otro carácter. La emisión forzada de todas las partículas del sistema es coherente con la radiación monocromática que lo excita y tiene la misma frecuencia, polarización y dirección de propagación. Esta peculiaridad de la emisión forzada se aprovecha en los generadores cuánticos —láseres y máseres (VI.2.6.8°).

4°. Una onda real, emitida durante un intervalo de tiempo limitado y que abarca una región limitada del espacio, no es monocromática. El espectro de sus frecuencias cíclicas (IV.1.4.7°) tiene una anchura finita $\Delta\omega$, es decir, incluye frecuencias cíclicas desde $\omega - \Delta\omega/2$ hasta $\omega + \Delta\omega/2$. Esta onda se puede considerar, durante un intervalo de tiempo $\Delta t \ll \tau_{\text{coh}} = \pi/\Delta\omega$, como aproximadamente coherente con la frecuencia cíclica ω . La magnitud τ_{coh} se llama *tiempo de coherencia de la onda no monocromática*. Durante un intervalo de tiempo igual a τ_{coh} , la diferencia de fases de las oscilaciones correspondientes a las ondas de frecuencias $\omega + \Delta\omega/2$ y $\omega - \Delta\omega/2$ varía en π . La onda de frecuencia cíclica ω y velocidad de fase v se propaga, durante este tiempo, a la distancia $l_{\text{coh}} = v\tau_{\text{coh}} = \pi v/\Delta\omega$.

La magnitud l_{coh} se llama *longitud de coherencia* o *longitud del tren armónico* de la correspondiente onda no monocromática considerada. Cuanto más se aproxime una onda dada a ser monocromática, tanto menor será la anchura $\Delta\omega$ del espectro de sus frecuencias y tanto mayor será su tiempo y longitud de coherencia. Por ejemplo, para la luz solar visible, cuyo espectro continuo de frecuencias va desde $4 \cdot 10^{14}$ hasta $8 \cdot 10^{14}$ Hz, $\tau_{\text{coh}} \sim 10^{-14}$ s y $l_{\text{coh}} \sim 10^{-6}$ m. El tiempo de coherencia de la emisión forzada es mucho mayor que el tiempo de desexcitación del átomo (IV.4.3.4°). Por ejemplo, para los láseres de acción continua, τ_{coh} llega a 10^{-5} s, y $l_{\text{coh}} \sim 10^3$ m.

§ V.1.2. Interferencia de la luz. Coherencia espacial

1°. Para obtener ondas luminosas coherentes por medio de fuentes ordinarias (no de láseres) se utiliza el método de desdoblamiento de la luz de un foco en dos o varios sistemas de ondas.

En cada uno de estos sistemas estará representada la emisión de unos mismos átomos de la fuente, de manera que, en virtud de la comunidad de origen, estos sistemas de ondas serán coherentes entre sí e interferirán al superponerse. El desdoblamiento de la luz en sistemas de ondas coherentes se puede efectuar mediante su reflexión o refracción.

En la fig. V.1.1 se muestra, como ejemplo, el esquema llamado de los *espejos de Fresnel*. La luz del foco puntual S incide

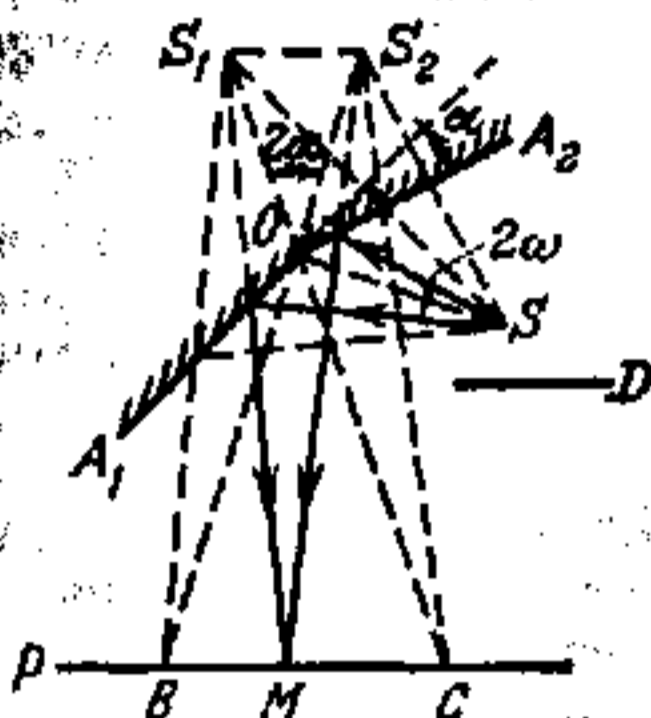


Fig. V.1.1.

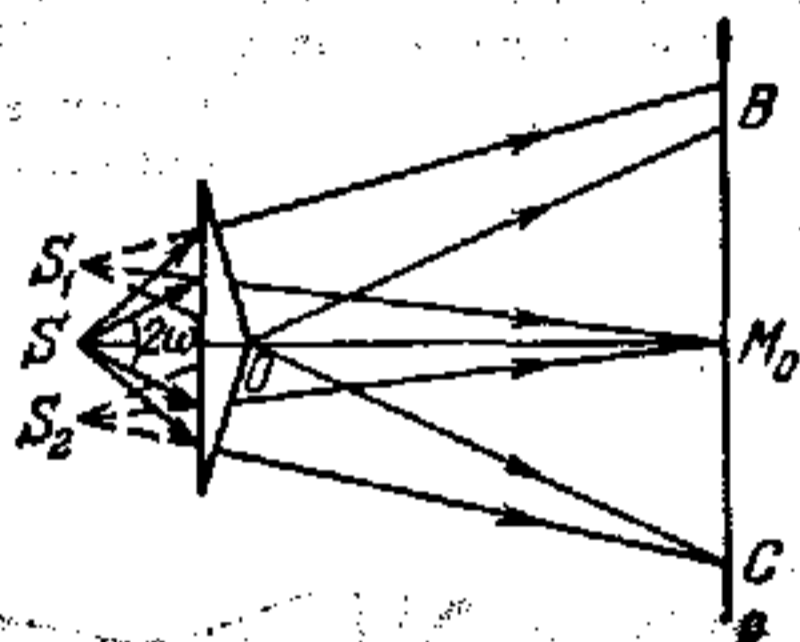


Fig. V.1.2.

sobre dos espejos planos A_1O y A_2O situados perpendicularmente al plano de la figura y unidos por la línea O . El ángulo α entre los espejos planos es muy pequeño. La luz del foco S se propaga, después de reflejarse en los espejos, en forma de dos haces con centros en los puntos S_1 y S_2 que son las imágenes virtuales del foco S en dichos espejos. Estos haces son coherentes y, al superponerse, producen en la pantalla P franjas de interferencia (la región BC se llama *campo de interferencias*). El resultado de la interferencia en un punto M determinado de la pantalla depende de la longitud de onda λ de la luz y de la diferencia entre las trayectorias recorridas por las ondas (IV.3.5.2°) desde los focos virtuales coherentes S_1 y S_2 hasta el punto M :

$$\Delta = r_2 - r_1 = MS_2 - MS_1.$$

Las fases iniciales de las oscilaciones de los focos S_1 y S_2 son iguales. Por lo tanto, las *condiciones de los máximos y mínimos*

de interferencia (IV.3.5.2°) tienen la forma siguiente:

$$r_2 - r_1 = \pm m\lambda \text{ es un máximo de } m\text{-ésimo orden} \\ (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$r_2 - r_1 = \pm(2m - 1) \frac{\lambda}{2} \text{ es un mínimo de } m\text{-ésimo orden} \\ (m = 1, 2, \dots).$$

El ángulo 2ω en el vértice S entre los dos rayos de luz que después de la reflexión en los espejos A_1O y A_2O convergen

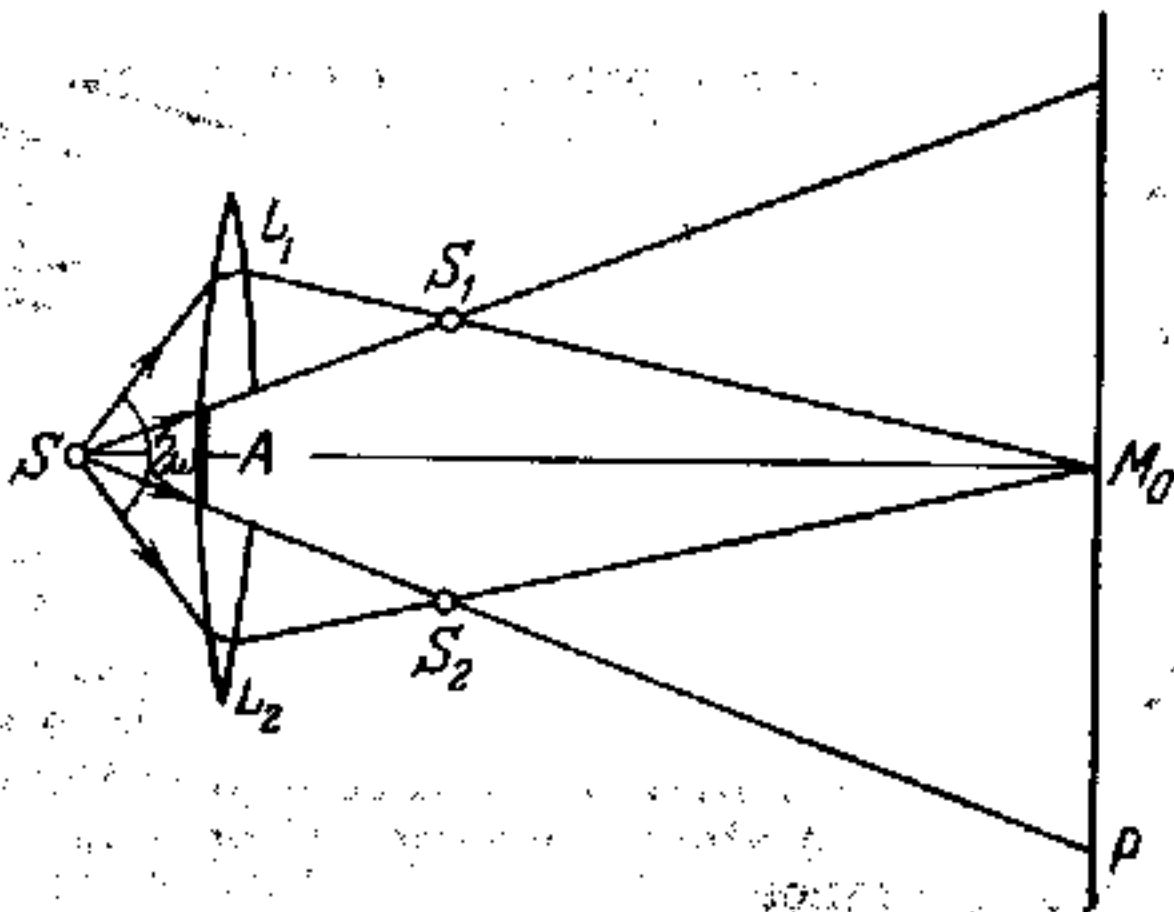


Fig. V.1.3.

en el punto M de la figura de interferencia, se llama *apertura de interferencia*. Este ángulo, por lo general, varía poco al variar la posición del punto M dentro de los límites del campo de interferencia.

2°. Los esquemas de observación de la interferencia de la luz por medio del *biprisma de Fresnel* (fig. V.1.2) y de la *semilente de Billet* (fig. V.1.3) son semejantes al esquema de los espejos. El biprisma consta de dos prismas trifacéticos iguales, unidos por sus bases y fabricados como si fueran uno solo. Los ángulos de refracción α en las aristas superior e inferior del biprisma son muy pequeños (del orden de fracciones de grado). La luz del foco S se refracta en el biprisma y se propaga por detrás de él en forma de dos sistemas de ondas, correspondientes a los focos luminosos coherentes virtuales S_1 y S_2 . La interfe-

rencia de estas ondas se observa en la región de su superposición en la pantalla P .

La semilente está formada por dos mitades L_1 y L_2 de una lente convergente cortada por su diámetro. Ambas mitades están ligeramente separadas, en virtud de lo cual dan dos imágenes reales S_1 y S_2 (que no coinciden entre sí) del foco puntual de luz S . La interferencia de la luz de estos focos coherentes secundarios se observa en la pantalla P . El intervalo entre las partes L_1 y L_2 de la semilente está cerrado por una pantalla opaca A .

En las figs. V.1.2 y V.1.3 se muestran los valores de la apertura de interferencia 2ω para el punto central M_0 de la figura de interferencia obtenida con el biprisma y con la semilente.

3°. Se denomina *anchura de una banda de interferencia* la distancia entre dos máximos (o mínimos) de interferencia adyacentes. En el caso de los espejos de Fresnel y de los esquemas de realización de interferencias semejantes a él (biprisma, semilente, etc.), la anchura de la banda de interferencia es igual a (IV.3.5.2°) $\lambda L/l$. Aquí l es la distancia entre los focos S_1 y S_2 , y L , la distancia desde ellos hasta la pantalla P . La longitud de onda de la luz visible es muy pequeña, ($\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$ m). Por esto, para obtener franjas de interferencia de una anchura que sea posible distinguir a simple vista, deberá cumplirse la condición $l \ll L$. Respectivamente, el ángulo α de los espejos y los ángulos de refracción α del biprisma deben ser muy pequeños.

La posibilidad de observar las franjas de interferencia depende también de su *contraste*, o sea, del grado de diferenciación entre la iluminación de la pantalla en los máximos y en los mínimos. La iluminación es proporcional a la intensidad J de luz incidente. De característica cuantitativa del contraste de una figura de interferencia sirve la magnitud adimensional llamada *nitidez (visibilidad) de las franjas*:

$$V = \frac{J_{\text{máx}} - J_{\text{mín}}}{J_{\text{máx}} + J_{\text{mín}}}$$

donde $J_{\text{máx}}$ y $J_{\text{mín}}$ son los valores de la intensidad de la luz de los máximos y mínimos en la pantalla. A simple vista se distinguen, con seguridad las franjas si su nitidez $V > 0,1$, es decir, si $J_{\text{mín}} < 0,82 J_{\text{máx}}$.

Cuando se superponen dos ondas monocromáticas coherentes, igualmente polarizadas, cuyas amplitudes e intensidades son, respectivamente, $A_1 J_1$ y $A_2 J_2$, la nitidez de las franjas de in-

interferencia

$$V = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2\sqrt{J_1J_2}}{J_1 + J_2}$$

La nitidez de las franjas es máxima ($V = 1$) si $A_1 = A_2$.

4°. En un esquema de interferencia del tipo de espejos de Fresnel, iluminado por un foco puntual S (fig. V.1.1), las ondas que se superponen nunca son en realidad perfectamente monocromáticas (V.1.1.3°). Por lo tanto, estas ondas sólo son *parcialmente coherentes*. Pueden interferir únicamente a condición de que las oscilaciones excitadas por ellas en el punto considerado M de la pantalla, correspondan a un mismo tren armónico de radiación del foco S (V.1.1.4°), o sea, si

$$|r_2 - r_1| < v\tau_{\text{coh}} \quad \text{o} \quad r_2 - r_1 < l_{\text{coh}}$$

Aquí $r_2 - r_1$ es la diferencia de marcha de las ondas que se superponen; v , su velocidad; y τ_{coh} y l_{coh} , respectivamente, el tiempo de coherencia y la longitud de coherencia de la luz del foco S (V.1.1.4°). En el punto M se efectúa la *composición de las oscilaciones parcialmente coherentes* excitadas por un mismo foco S en distintos instantes t y $t + \tau$, donde $\tau = |r_2 - r_1|/v$. Por esto la nitidez de la figura de interferencia en este tipo de dispositivos depende en gran medida de la *coherencia de tiempo de las oscilaciones*, la cual viene limitada por el grado de monocromaticidad de la luz del foco S , es decir, de su tiempo de coherencia τ_{coh} (V.1.1.4°). Cuando $\tau \ll \tau_{\text{coh}}$, las oscilaciones que se componen son en la práctica totalmente coherentes, y la nitidez de las franjas de interferencia $V \approx 1$ (si es igual la intensidad de las ondas que se superponen). Pero si $\tau \geq \tau_{\text{coh}}$, las oscilaciones que se componen no serán coherentes ni interferirán ($V = 0$).

Así, pues, para poder observar la interferencia de la luz cuando son grandes las diferencias de marcha $r_2 - r_1$ (y, respectivamente, para grandes valores de τ) es necesario que la luz posea una coherencia de tiempo bastante grande, es decir, que tenga un grado de monocromaticidad bastante alto.

5°. Las posiciones en la pantalla de todos los máximos de interferencia, excepto el de orden nulo, dependen de la longitud de onda de la luz. Para dos longitudes de onda λ_1 y λ_2 , los máximos de orden m -ésimo están desplazados entre sí tanto más cuanto mayor es m . Por esto, al crecer m empeora la nitidez de las franjas de interferencia que se obtienen cuando los espejos de Fresnel se iluminan con luz no monocromática: las franjas

correspondientes a una luz con diversos valores de λ se superponen unas a otras y la figura de interferencia se difumina.

Supongamos que las longitudes de onda de la luz están comprendidas entre los límites de λ a $\lambda + \Delta\lambda$, y las frecuencias cíclicas, entre ω y $\omega - \Delta\omega$, donde $\Delta\omega = 2\pi\nu\Delta\lambda/\lambda^2$. Entonces, de acuerdo con el *criterio Rayleigh*, la figura de interferencia se puede distinguir hasta el máximo de orden m_0 para la luz de longitud de onda $\lambda + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda > 0$) que se superpone en la pantalla al mínimo de interferencia más próximo a él de la luz con longitud de onda λ :

$$m_0(\lambda + \Delta\lambda) = (2m_0 + 1)\frac{\lambda}{2}, \text{ de donde } m_0 = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}.$$

Por lo tanto, la interferencia se puede observar con diferencias de marcha de las ondas que satisfacen la condición

$$|r_2 - r_1| \leq \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} = \frac{\pi\nu}{\Delta\omega} = \nu\tau_{\text{coh}}.$$

Este resultado concuerda con la valoración hecha en el p. 4° basándose en la representación de la coherencia de tiempo de las oscilaciones.

6°. Una luz parcialmente coherente, cuya intensidad total sea J , se puede considerar como el conjunto de dos componentes: una coherente de intensidad γJ , donde γ es el *grado de coherencia de la luz*, y otra no coherente de intensidad $(1 - \gamma) J$. Al superponer ondas parcialmente coherentes, sólo interfieren sus componentes coherentes. Las componentes no coherentes crean el fondo iluminado uniformemente de la figura de interferencia. Por esto, a medida que disminuye el grado de coherencia de la luz, disminuye también la nitidez V de las franjas de interferencia:

$$V = \frac{2\sqrt{J_1 J_2}}{J_1 + J_2} \gamma.$$

Si la intensidad de las ondas parcialmente coherentes es la misma, $V = \gamma$.

7°. Por lo general, los dispositivos de interferencia de espejos (o biprisma) no utilizan un foco puntual S de luz, sino una rendija estrecha, intensamente iluminada, paralela a la arista O de los espejos. En este caso las figuras de interferencia que se obtienen sobre la pantalla de distintas partes de la longitud de la rendija, están desplazadas unas respecto a otras a lo largo de la dirección de la rendija S . Respectivamente, sobre la

pantalla se observa un sistema de franjas de interferencia paralelas a la arista O de los espejos.

La nitidez de las franjas de interferencia disminuye a medida que aumenta la anchura de la rendija S . Esto es debido a que las franjas de interferencia que se obtienen sobre la pantalla, procedentes de las distintas rendijas más estrechas en que se puede dividir mentalmente la rendija S , están desplazadas unas

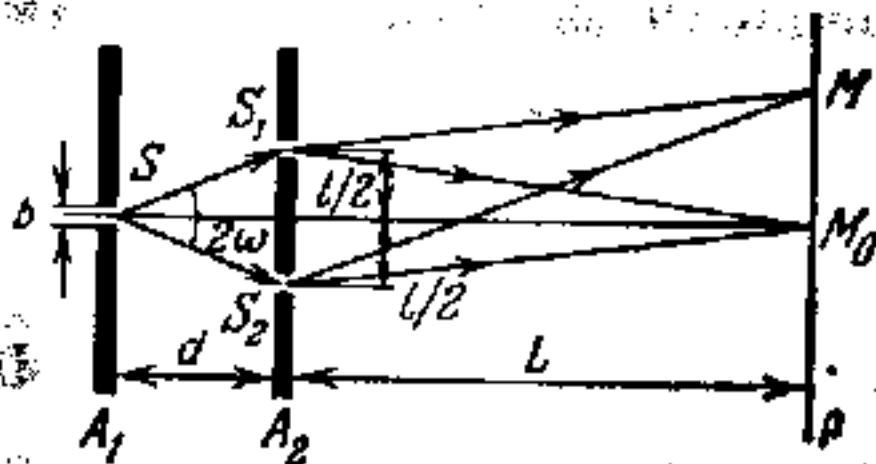


Fig. V.1.4.

respecto a otras. La figura de interferencia en luz monocromática de longitud de onda λ se obtiene claramente si se cumple la condición aproximada

$$b \operatorname{sen} \omega \leq \lambda/4,$$

donde b es la anchura de la rendija, y 2ω , la apertura de interferencia (p. 1°).

8°. En la fig. V.1.4 se muestra el esquema teórico de cómo se efectúa la interferencia de la luz por el *método de Young*. De fuente de luz sirve la rendija estrecha S intensamente iluminada en la pantalla A_1 . La luz procedente de ella incide sobre la segunda pantalla opaca A_2 , en la cual hay dos rendijas estrechas iguales S_1 y S_2 , paralelas a S . En el espacio que hay detrás de la pantalla A_2 se propagan dos sistemas de ondas cilíndricas cuya interferencia se observa en la pantalla P . La nitidez de las franjas de interferencia, cuando las diferencias de marcha son grandes, se determina principalmente por el grado de concordancia del transcurso de las oscilaciones en los puntos de las rendijas S_1 y S_2 , que se pueden considerar como «focos» de las ondas que interfieren sobre la pantalla.

9°. La coherencia de las oscilaciones que tienen lugar en un mismo instante en *diferentes* puntos del plano Q perpendicular a la dirección en que se propagan las ondas, se llama *coherencia espacial* (para diferenciarla de la coherencia de tiempo de

las oscilaciones que tienen lugar en el mismo punto, pero en distintos instantes).

La coherencia espacial depende de las condiciones de radiación y formación de las ondas luminosas. Por ejemplo, la onda luminosa emitida por un foco puntual posee coherencia espacial total. En el caso de una onda perfectamente plana, la amplitud y la fase de las oscilaciones son iguales en todos los puntos del plano Q , es decir, también existe coherencia espacial total. La coherencia espacial también se conserva en toda la sección transversal del haz de luz emitido por un láser.

En la onda real radiada por el conjunto de átomos independientes de una fuente de luz extensa, que no sea de láser, la diferencia de fase de las oscilaciones en los puntos K_1 y K_2 del plano Q es una función aleatoria del tiempo. Las variaciones aleatorias de esta diferencia de fase aumentan al crecer la distancia entre los puntos. Como *longitud de coherencia espacial* se toma la distancia l_k entre los puntos K_1 y K_2 , del plano Q , en los cuales las variaciones aleatorias de la diferencia de fase alcanzan valores iguales a π . Si en el esquema de Young la distancia l entre las rendijas S_1 y S_2 es mayor o igual a l_k , la nitidez de las franjas de interferencia es nula. Para conseguir la coherencia espacial de la iluminación de las rendijas S_1 y S_2 , la anchura b de la rendija de entrada S debe ser suficientemente pequeña:

$$b < \lambda d/l \quad \text{y} \quad \theta < \lambda/l,$$

donde d es la distancia entre las pantallas A_1 y A_2 , y $\theta = b/d$, la dimensión angular de la fuente de luz, o sea, de la rendija S .

La longitud de coherencia espacial $l_k = \lambda/\theta$ aumenta a medida que nos separamos de la fuente de luz. Por ejemplo, para una estrella de diámetro D que se encuentre a la distancia r , $\theta = D/r$ y $l_k = \lambda r/D$.

El área del círculo de radio l_k se denomina *área de coherencia espacial*, y el volumen del cilindro recto de esta misma base y de generatriz igual a la longitud del tren de ondas armónico (V.1.1.4°) $l_{\text{coh}} = v\tau_{\text{coh}}$, recibe el nombre de *volumen de coherencia*.

§ V.1.3. Interferencia de la luz en películas delgadas

1°. De ejemplo de interferencia de la luz, que se observa en condiciones naturales, puede servir la coloración irisada de las películas delgadas (pompas de jabón, películas de petróleo

o de aceite sobre la superficie del agua, películas transparentes de óxidos sobre las superficies de piezas metálicas templadas —colores de revenido—, etc.). La formación de ondas parcialmente coherentes que interfieren al superponerse, se produce en este caso a causa de la reflexión de la luz que incide sobre la película en las superficies superior e inferior de ésta. El resultado de la interferencia depende del desplazamiento de fase que adquieren las ondas que se superponen en la película, dependiente a su vez de la diferencia de marcha óptica.

2°. Se llama *longitud óptica del camino* s de la luz, el producto de la longitud geométrica del camino l que recorre la luz en un medio, por el índice de refracción n de este medio (IV.4.5.1°); $s = nl$. La magnitud s es igual al camino que recorre la luz en el vacío, al mismo tiempo que recorre el camino l en un medio dado.

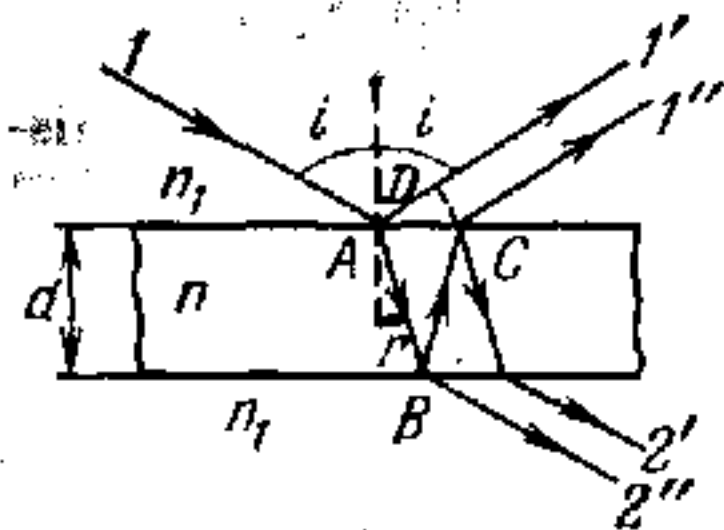


Fig. V.1.5.

La *diferencia de marcha óptica* de dos ondas es la diferencia entre las longitudes ópticas de los caminos recorridos por estas ondas: $\Delta s = s_2 - s_1$ (la diferencia de marcha óptica se designa frecuentemente por Δ o δ). A la diferencia de marcha óptica Δs

le corresponde la variación de la diferencia de fase de las ondas

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta s, \text{ en la que } \lambda_0 = n\lambda \text{ es la longitud de onda de la luz}$$

en el vacío, y λ , la longitud de onda en un medio con índice de refracción n .

Los caminos de propagación de las ondas cuyas longitudes ópticas son iguales se llaman *tautócronos* o *isócronos*. En recorrer estos caminos la luz tarda el mismo tiempo. Por ejemplo, en un sistema óptico (microscopio, telescopio u otro) todos los caminos posibles de la luz desde un punto cualquiera del objeto hasta el punto correspondiente a él de la imagen de dicho objeto son tautócronos.

3°. Supongamos que sobre una lámina planoparalela homogénea, isótropa y transparente a la luz, de espesor d (fig. V.1.5), incide bajo un ángulo i una onda luminosa plana monocromática 1. A expensas de la reflexión de la luz en las superficies superior e inferior de la lámina, en las direcciones de los rayos reflejados I' y I'' se propagan dos ondas planas cuya diferencia de

marcha óptica es

$$\Delta s = n(AB + BC) - n_1 \left(AD + \frac{\lambda_1}{2} \right) = 2dn \cos r - \frac{\lambda_0}{2},$$

donde n_1 y n son los índices de refracción del medio circundante y de la lámina; D , la base de la perpendicular bajada desde el punto C al rayo $1'$; el término $\lambda_1/2$ tiene en cuenta el desplazamiento de fase en π que sufre la luz al reflejarse en el punto A (IV.4.5.5°)*; r es el ángulo de refracción; y λ_0 , la longitud de onda de la luz en el vacío.

Las condiciones para los máximos de interferencia de las ondas reflejadas son

$$2dn \cos r = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad \text{ó} \quad 2d \cos r = (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

donde $m = 0, 1, 2, \dots$ es el orden del máximo de interferencia.

Las condiciones para los mínimos de interferencia de las ondas reflejadas son

$$2dn \cos r = m\lambda_0, \quad \text{ó} \quad 2d \cos r = m\lambda,$$

donde $m = 1, 2, \dots$ es el orden del mínimo de interferencia.

La diferencia de marcha óptica de las ondas que pasan a través de la lámina (rayos $2'$ y $2''$) $\Delta s = 2dn \cos r$, es decir, difiere de Δs , para la luz reflejada, en $\lambda_0/2$. Por esto, a los máximos de reflexión corresponden mínimos de transmisión de la luz y viceversa. Si la lámina se ilumina con luz blanca, la luz reflejada y transmitida adquirirá una coloración adicional.

El espesor máximo d de la lámina, con la cual aún se pueden observar las franjas de interferencia, está limitado por el tiempo de coherencia τ_{coh} (V.1.1.4°) de la luz:

$$2dn \cos r < c\tau_{\text{coh}}, \quad \text{ó} \quad 2d \cos r < l_{\text{coh}},$$

donde $l_{\text{coh}} = v\tau_{\text{coh}} = c\tau_{\text{coh}}/n$ es la longitud de coherencia.

4°. En los cálculos de la diferencia de marcha óptica de las ondas que interfieren en la lámina (p. 3°) sólo se tomaron en consideración dos ondas correspondientes a la primera reflexión en las superficies superior e inferior de dicha lámina, o sea, no se

* Se supone que $i < i_{\text{Br}}$ y $n > n_1$. Si $n < n_1$, el desplazamiento de fase en π se produce al reflejarse la luz en el punto B , y $\Delta s = 2dn \cos r + \lambda_0/2$, es decir, difiere del valor de Δs para el caso en que $n > n_1$ en λ_0 , lo que no influye en el resultado de la interferencia.

tuvo en cuenta la posibilidad de reflexión múltiple de la luz. Esta simplificación sólo es correcta a condición de que la intensidad J_2 de la onda correspondiente a la segunda reflexión en la superficie inferior de la lámina, sea mucho menor que la intensidad J_1 de la onda que surge en la primera reflexión. Si R es el coeficiente de reflexión de la luz (IV.4.5.6°) en las superficies superior e inferior de la lámina, entonces $J_2 = R^2 J_1$. Por lo general, $R^2 \ll 1$. Por ejemplo, para el límite aire — vidrio ($n_{21} = 1,5$) y ángulos de incidencia de la luz $i < 50^\circ$, el coeficiente de reflexión $R < 0,05$. En ciertos casos especiales, en los que J_2 es conmensurable con J_1 , es necesario tener en cuenta la interferencia de muchas ondas (V.1.4).

5°. Al estudiar la interferencia de la luz en películas delgadas, se distinguen franjas de interferencia de igual inclinación y de igual espesor. Las *franja de igual inclinación* se observan en aquellos casos en que sobre una película plano-paralela delgada incide, bajo diferentes ángulos i , un haz de luz divergente (o convergente). Estas son, por ejemplo, las condiciones en que se ilumina una película por una fuente extensa o por la luz solar difusa. Como d y n son iguales en todas partes, la diferencia de marcha óptica de las ondas que interfieren varía a lo largo de la superficie de la película a expensas de la variación del ángulo de incidencia i de la luz. Las condiciones de interferencia para todos los rayos que llegan a la superficie de la película y se reflejan en ella bajo un mismo ángulo, son las mismas. Respectivamente, la figura de interferencia se llama, en este caso, *franja de igual inclinación*. Las franjas de igual inclinación se observan en la pantalla P colocada en el plano focal de la lente convergente L (fig. V.1.6). En ausencia de la lente, la figura de interferencia sólo se podría observar en el infinito, es decir, en el punto de intersección de los pares de rayos paralelos $1'1''$, $2'2''$, etc. Por esto se dice que las franjas de igual inclinación están localizadas en el infinito. Para poderlas observar a simple vista hay que acomodar el ojo al infinito.

6°. Las *franja de igual espesor* se observan al reflejarse un haz paralelo o casi paralelo de rayos de luz ($i = \text{const}$) en una película delgada transparente cuyo espesor d no es igual en distintas partes. La diferencia de marcha óptica de las ondas que interfieren varía al pasar de unos puntos de la superficie de la película a otros de acuerdo con la variación del espesor d , ya que las condiciones de interferencia son las mismas en los puntos correspondientes a valores iguales de d . Por esto, la figura de interferencia que consideramos se llama *figura de franjas de igual espesor*. Dichas franjas están localizadas cerca de la super-

ficie de la película, o sea, para observarlas hay que acomodar la vista prácticamente sobre la superficie de la misma película.

Si la luz interfiere en una cuña transparente delgada, con pequeño ángulo α en la arista, las franjas de igual espesor tienen forma de franjas rectangulares paralelas a la arista de la cuña. Cuando una cuña se ilumina con luz monocromática de longitud

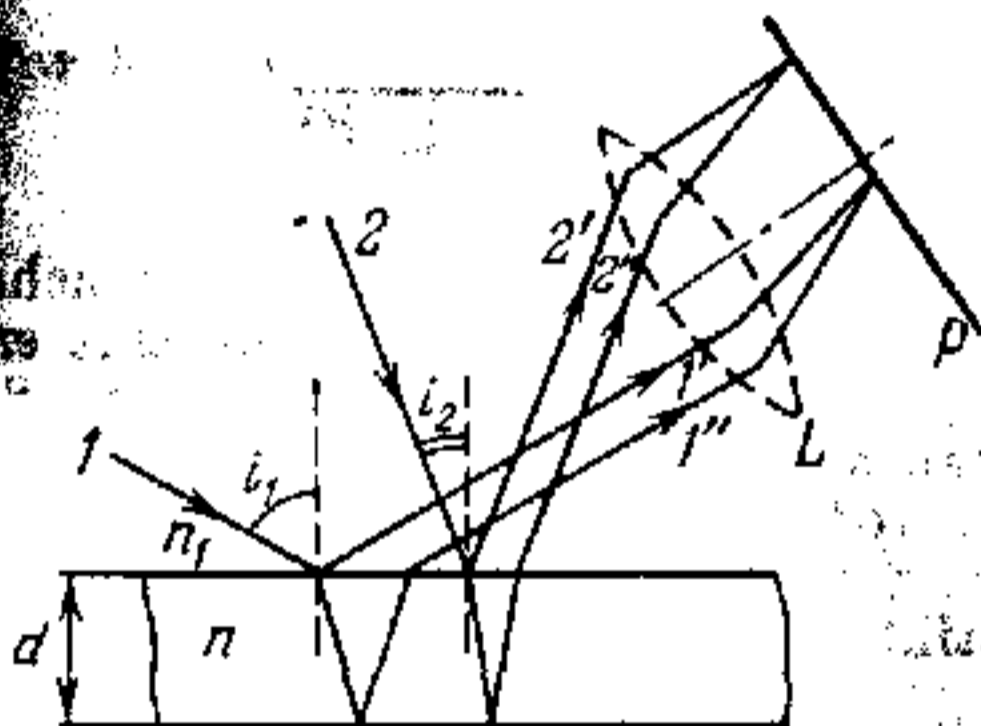


Fig. V.1.6.

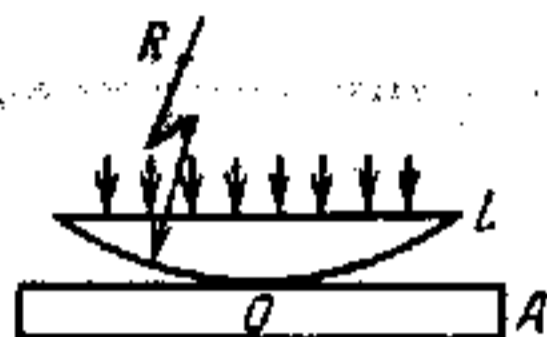


Fig. V.1.7.

de onda en el vacío λ_0 , que incide normalmente sobre su superficie ($i = 0$), la anchura de las franjas de interferencia (V.1.2.3°) es igual a $\lambda_0/2n\alpha$, donde n es el índice de refracción absoluto de la cuña.

7°. Las franjas de igual espesor, en forma de anillos concéntricos llamados *anillos de Newton*, se observan al interferir la luz en el delgado espacio aéreo que queda entre una lámina de vidrio plana A y una lente plano-convexa L apretada a ella (fig. V.1.7). La superficie plana de la lente es paralela a la superficie de la lámina, y la luz incide sobre ella normalmente. Los centros de los anillos de Newton coinciden con el punto O de contacto de la lente con la lámina. A una pequeña distancia r del punto O, la diferencia de marcha óptica de las ondas reflejadas en las superficies superior e inferior del espacio aéreo es

$$\Delta s \approx n \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2},$$

donde $n \approx 1$ (para el aire), y R es el radio de curvatura de la superficie convexa de la lente.

Observación. Cuando se calculan los anillos de Newton no hay que tener en cuenta la onda reflejada en la superficie superior (plana) de la lente, ya que la diferencia de marcha óptica entre esta onda y las reflejadas en los límites del espacio aéreo es mayor que la longitud de coherencia para una luz que no sea de láser (p. 3°).

En la luz monocromática reflejada, con longitud de onda en el aire $\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \approx \lambda_0$, los radios de los anillos de Newton oscuros y claros son

$$r_{\text{osc}} = \sqrt{mR\lambda} \quad \text{y} \quad r_{\text{clar}} = \sqrt{(2m+1)\frac{R\lambda}{2}}$$

donde $m = 0, 1, 2, \dots$. En el centro se encuentra una mancha oscura correspondiente a la variación de la fase de la onda en π al reflejarse ésta en la superficie inferior del espacio aéreo. Si sobre la lente incide luz blanca, en la luz reflejada se observará una mancha central oscura rodeada de un sistema de anillos de colores, correspondientes a los máximos de interferencia de la reflexión de luz con distintos valores de λ .

§ V.1.4. Interferencia de muchas ondas

1°. Para realizar la interferencia de muchas ondas luminosas de amplitudes próximas o iguales se utilizan dispositivos especiales de interferencia, como la red o rejilla de difracción (V.2.3.4°), el interferómetro de Fabry—Perot y otros. La amplitud A de las oscilaciones resultantes y su intensidad $J = A^2$ en un punto arbitrario M de la figura de interferencia se pueden hallar empleando el método de diagramas vectoriales para componer las oscilaciones de igual dirección (IV.1.4.2°).

2°. En la fig. V.1.8 se muestra el diagrama vectorial de

composición de las oscilaciones para la interferencia de N ondas que excitan, en el punto M considerado, oscilaciones coherentes de igual dirección, iguales amplitudes $A_2 = A_1$ y des-

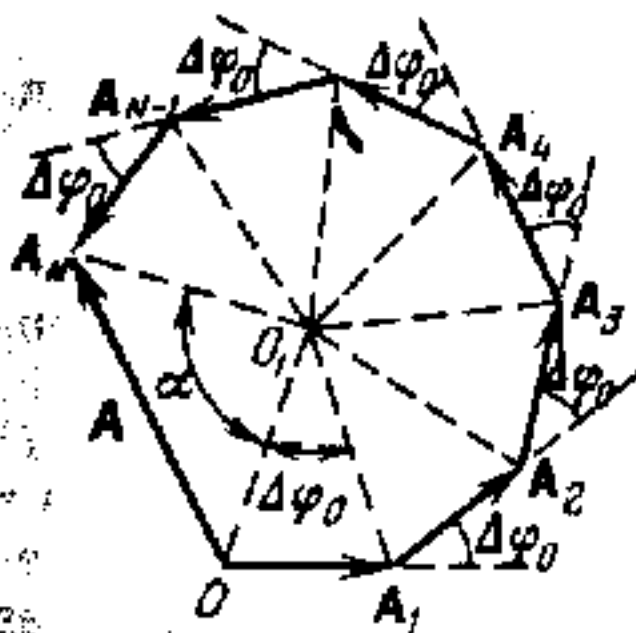


Fig. V.1.8.

plazamiento de fase independiente de i entre las oscilaciones $(i + 1)$ -ésima e i -ésima: $\Phi_{i+1}(t) - \Phi_i(t) = \Delta\varphi_0$. La amplitud de las oscilaciones resultantes:

$$A = 2 \cdot OO_1 \left| \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right|, \text{ donde } \alpha = 2\pi - N\Delta\varphi_0$$

$$\text{y } OO_1 = \frac{A_1}{2 \left| \operatorname{sen} \frac{\Delta\varphi_0}{2} \right|}.$$

Por lo que

$$A = A_1 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{N\Delta\varphi_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\Delta\varphi_0}{2}} \right| \text{ y } J = J_1 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{N\Delta\varphi_0}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\Delta\varphi_0}{2}},$$

donde $J_1 = A_1^2$ es la intensidad de las oscilaciones que excitan en el punto M cada una de las ondas N que interfieren.

3°. Los máximos principales de interferencia de las N ondas (p. 2°) se encuentran en los puntos M que satisfacen la condición $\Delta\varphi_0 = \pm 2n\pi$, en la que $n = 0, 1, 2, \dots$ es el orden del máximo principal. La amplitud y la intensidad de las oscilaciones en los máximos principales son

$$A_{\text{máx}} = NA_1 \text{ y } J_{\text{máx}} = N^2 J_1.$$

Los mínimos de interferencia ($A = 0$) satisfacen la condición $\Delta\varphi_0 = \pm \frac{2\pi p}{N}$, en la que p toma cualesquiera valores enteros positivos, excepto los múltiplos de N .

El carácter de dependencia de J/J_1 respecto de $\Delta\varphi_0$ (p. 2°) se muestra en la fig. V.1.9. Entre cada par de mínimos de interferencia adyacentes hay un máximo que puede ser principal o secundario. Cuando N es grande, la intensidad de los máximos secundarios es insignificante en comparación con la de los máximos principales.

A los dos mínimos que limitan un máximo principal de n -ésimo orden, corresponden los valores de $\Delta\varphi_0 = \pm \left(2\pi n \pm \frac{2\pi}{N} \right)$. Por esto, la «anchura» del máximo

principal, igual a $4\pi/N$, es inversamente proporcional al número N de ondas que interfieren, y su intensidad es proporcional a N^2 . Este carácter de variación de la figura de interferencia al cambiar N , está en completo acuerdo con la ley de conserva-

ción de la energía: la energía total de las oscilaciones en todos los puntos de la pantalla en que se observa la figura de interferencia es proporcional a N .

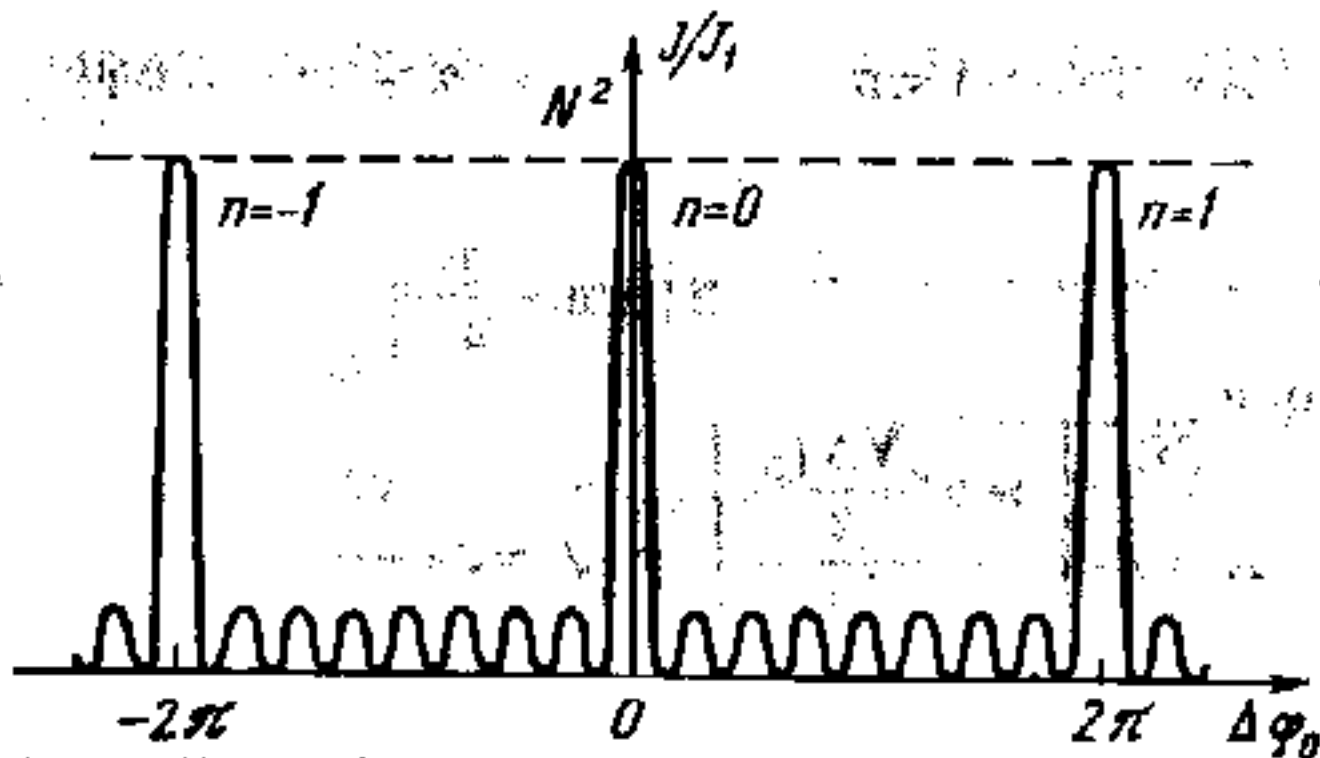


Fig. V.1.9.

4°. Si el número N de ondas que interfieren (p. 2°) aumenta ilimitadamente y sus amplitudes A_1 y desplazamientos de fase

$\Delta\varphi_0$ disminuyen respectivamente, de manera que NA_1 y $N\Delta\varphi_0$ sigan siendo magnitudes finitas e iguales a A_0 y $\Delta\varphi$, el diagrama vectorial (fig. V.1.8) toma en el límite la forma que se indica en la fig. V.1.10. El vector A de amplitud de las oscilaciones resultantes cierra el arco BC de la circunferencia. La longitud de este arco es igual a A_0 , y el ángulo central que le corresponde es $\angle BOC = \Delta\varphi$. Por esto, el radio de la circunferencia $OB = A_0/\Delta\varphi$, la amplitud

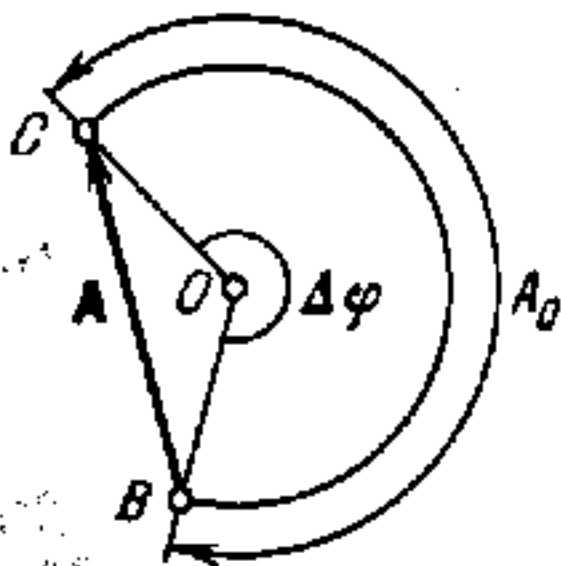


Fig. V.1.10.

A y la intensidad J de las oscilaciones resultantes constituyen

$$A = A_0 \left| \frac{\text{sen } \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right| \quad \text{y} \quad J = J_0 \frac{\text{sen}^2 \frac{\Delta\varphi}{2}}{\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^2},$$

donde $J_0 = A_0^2$.

Los mínimos de interferencia están en los puntos de la figura de interferencia, para los cuales

$$\Delta\varphi = \pm 2m\pi \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Los máximos de interferencia se encuentran en los puntos para los que $\Delta\varphi = \pm 2k_m\pi$, donde $m = 0, 1, 2, \dots$ es el orden del máximo. Los valores de los coeficientes k_m se determinan partiendo de la ecuación trascendente $\text{tg } k_m\pi = k_m\pi$. Para el

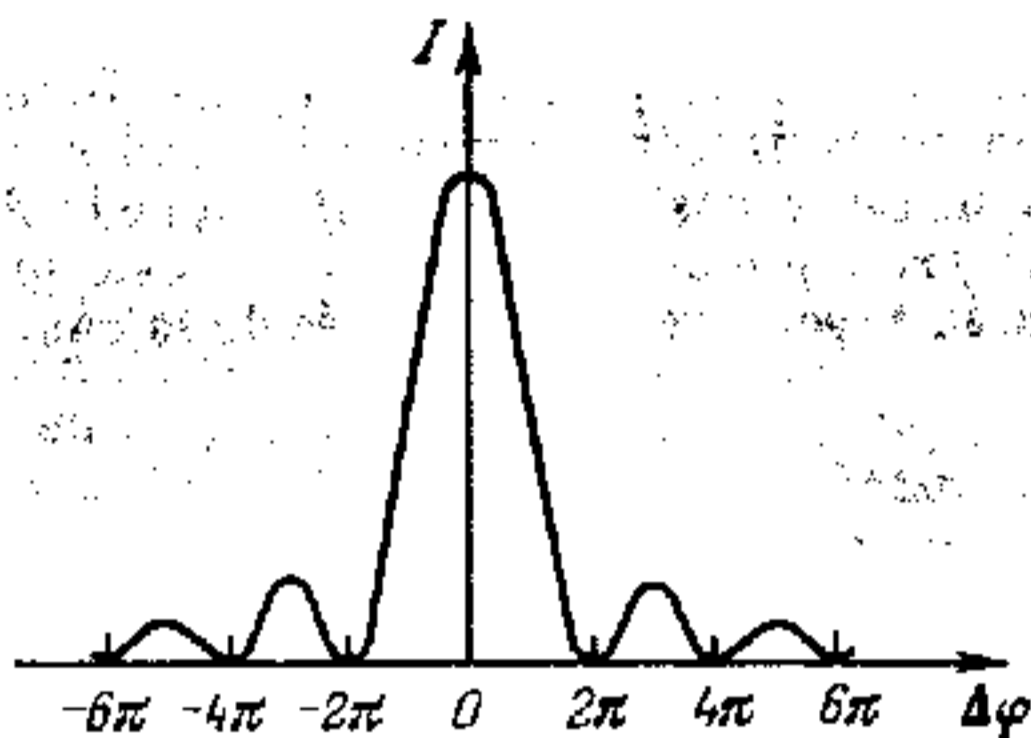


Fig. V.1.11.

máximo central de orden nulo $k_0 = 0$ y $\Delta\varphi = 0$. La amplitud y intensidad de las oscilaciones en el máximo de orden nulo son iguales a A_0 y J_0 . Para todos los demás máximos ($m \geq 1$) se puede considerar, aproximadamente, que

$$k_m = (2m + 1)/2 \text{ y } \Delta\varphi = \pm (2m + 1)\pi.$$

Respectivamente, la relación entre las intensidades de los máximos de orden m -ésimo y nulo es

$$\frac{J_m}{J_0} = \frac{4}{(5m + 1)^2 \pi^2}.$$

Esta relación disminuye rápidamente al crecer m (tabla V.1.1).

El carácter de variación de J en función de $\Delta\varphi$ se muestra en la fig. V.1.11.

Tabla V.1.1

Orden del máximo	0	1	2	3	4
J_m/J_0	1	0,045	0,016	0,008	0,005

Capítulo V.2. Difracción de la luz

§ V.2.1. Principio de Huygens—Fresnel

1°. Si se conoce la posición del frente de una onda (IV.3.2.3°) en cierto instante t y su velocidad v , la posición del frente en un instante posterior $t + \Delta t$ se puede determinar basándose en el *principio de Huygens*. Según este principio, todos los puntos de la superficie $S(t)$ a través de la cual pasa el frente

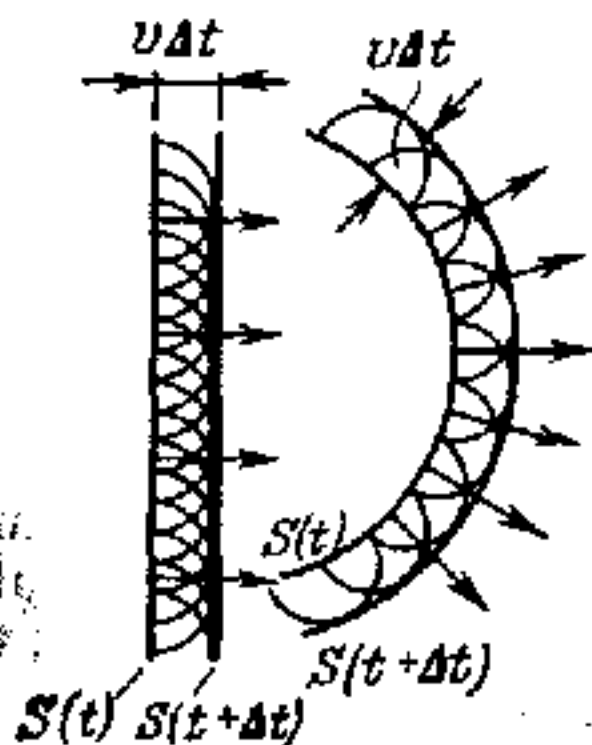


Fig. V.2.1.

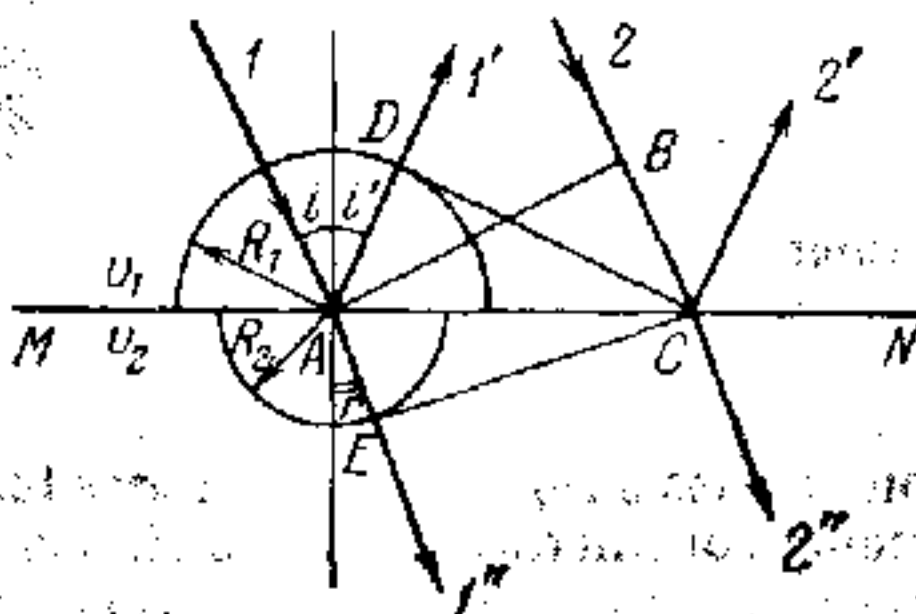


Fig. V.2.2.

de onda en el instante t , deben considerarse como fuentes de ondas secundarias, y la posición buscada $S(t + \Delta t)$ del frente en el instante $t + \Delta t$ coincide con la superficie envolvente de todas las ondas secundarias. Se considera que, en un medio homogéneo, las ondas secundarias se emiten solamente hacia delante, o sea, en direcciones que forman ángulos agudos con la normal exterior al frente de onda. En un medio homogéneo isotropo las ondas secundarias son esféricas (fig. V.2.1).

2°. Valiéndose del principio de Huygens se pueden deducir las leyes de reflexión y refracción de la luz en el límite de separación de dos medios. En la fig. V.2.2, MN representa la superficie plana de separación de dos medios en los cuales la velocidad de la luz es igual, respectivamente, a v_1 y v_2 . Sobre esta superficie incide, bajo el ángulo i , una onda plana (rayos 1 y 2). En el instante t , el frente de onda (plano AB) alcanza la super-

ficie de separación en el punto A . Este punto comienza a radiar ondas secundarias que se propagan tanto en el primer medio (onda reflejada) como en el segundo (onda transmitida). Durante el tiempo Δt en que la onda incidente recorre la distancia: BC ($\Delta t = BC/v_1$), el frente de la onda secundaria emitida por el punto A llega en el primer medio a los puntos de la semiesfera de radio $R_1 = v_1 \Delta t = BC$, y en el segundo medio, a los puntos de la semiesfera de radio $R_2 = v_2 \Delta t = \frac{v_2}{v_1} BC$. El frente de la onda reflejada (rayos $1'$ y $2'$) que se propaga bajo el ángulo de reflexión i' , es el plano DC tangente a la esfera de radio R_1 con centro en el punto A . Respectivamente, el frente de la onda transmitida (refractada) (rayos $1''$ y $2''$) que se propaga bajo el ángulo de refracción r , es el plano CE tangente a la esfera de radio R_2 con centro en el punto A . De la igualdad de $\triangle ACD$ y $\triangle ACB$ se deduce la *ley de reflexión de la luz*: $i' = i$. Y de los triángulos rectángulos ACB y ACE , que tienen común la hipotenusa, se deduce la *ley de refracción de la luz*:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{BC}{AE} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21},$$

donde n_{21} es el índice de refracción relativo del segundo medio con respecto al primero (IV.4.5.1°).

3°. El principio de Huygens es puramente geométrico. Este principio no indica el procedimiento para hacer el cálculo de la amplitud de la envolvente de las ondas secundarias. Por esto, el principio de Huygens es insuficiente para calcular las leyes de propagación de las ondas luminosas. Un método aproximado para resolver este problema, que consiste en el desarrollo del principio de Huygens basado en la idea propuesta por Fresnel, acerca de la coherencia de las ondas secundarias y de sus interferencias al superponerse, es el llamado *principio de Huygens—Fresnel*. Este principio se puede expresar en forma de la serie de postulados siguientes:

a) al hacer el cálculo de las amplitudes de las oscilaciones luminosas que excita una fuente S_0 en un punto cualquiera M , la fuente S_0 se puede sustituir por un sistema (equivalente a ella) de fuentes secundarias, o sea, de pequeñas porciones ds de una superficie cerrada auxiliar S cualquiera, trazada de tal modo que envuelva la fuente S_0 pero no el punto M considerado;

b) las fuentes secundarias son coherentes de S_0 y entre sí, por lo que las ondas secundarias que excitan, interfieren al superponerse; el cálculo de las interferencias es más simple

cuando S es la superficie de onda de la luz del foco S_0 , ya que entonces las fases de las oscilaciones de todos los focos secundarios son las mismas;

c) la amplitud dA de las oscilaciones excitadas en el punto M por los focos secundarios, es proporcional a la razón del área ds de la porción correspondiente de la superficie de onda S , a la distancia r que hay desde ella hasta el punto M , y depende del ángulo α entre la normal externa a la superficie de onda y la dirección que va desde el elemento ds al punto M :

$$dA = f(\alpha) \frac{a ds}{r},$$

donde a es una magnitud proporcional a la amplitud de la onda primaria en los puntos del elemento ds ; $f(\alpha)$ decrece monótonamente desde 1 cuando $\alpha = 0$, hasta 0 cuando $\alpha \geq \pi/2$ (los focos secundarios no emiten hacia atrás*);

d) si parte de la superficie S está ocupada por pantallas opacas, las fuentes secundarias correspondientes (tapadas por las pantallas) no emitirán, pero las demás lo hacen como si dichas pantallas no existieran**).

4°. Aplicando el principio de Huygens—Fresnel se puede fundamentar, desde el punto de vista ondulatorio, la ley de propagación rectilínea de la luz en un medio homogéneo. Sea S_0 un foco puntual de luz monocromática (fig. V.2.3) y M el punto de observación. Como superficie auxiliar S tomamos la superficie de onda de radio R , que elegimos de tal modo que la distancia L desde el punto M hasta esta esfera ($L = OM$) sea del orden de R . Dividimos la superficie S en zonas anulares de área pequeña (llamadas zonas de Fresnel), como se ve en la fig. V.2.3, en la que λ es la longitud de onda de la luz.

Las oscilaciones que excitan en el punto M dos zonas contiguas están en fases opuestas, ya que la diferencia de marcha desde los puntos homólogos de estas zonas hasta el punto M es igual a $\lambda/2$. Por consiguiente, la amplitud de las oscilaciones resultantes en el punto M es $A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$,

*) Kirchoff demostró que $f(\alpha) \sim (1 + \cos \alpha)$, es decir, que se anula solamente para $\alpha = \pi$; pero cuando los ángulos de difracción α son pequeños, esta precisión carece de importancia.

** En realidad el material de la pantalla influye sobre la radiación de los focos secundarios abiertos que se hallan cerca de sus bordes (a distancias del orden de la longitud de onda de la luz).

donde A_i es la amplitud de las oscilaciones excitadas en el punto M por los focos secundarios que se hallan dentro de los límites de una zona i -ésima. Cuando $i \ll L/\lambda$, las áreas de todas las zonas son iguales, $\sigma_i = \pi R L \lambda / (R + L)$ y muy pequeñas (si $R = L = 10$ cm y $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm, obtenemos que $\sigma_i \approx 8 \cdot 10^{-6}$ cm²). A medida que crece i aumenta la distancia r_i desde la zona hasta

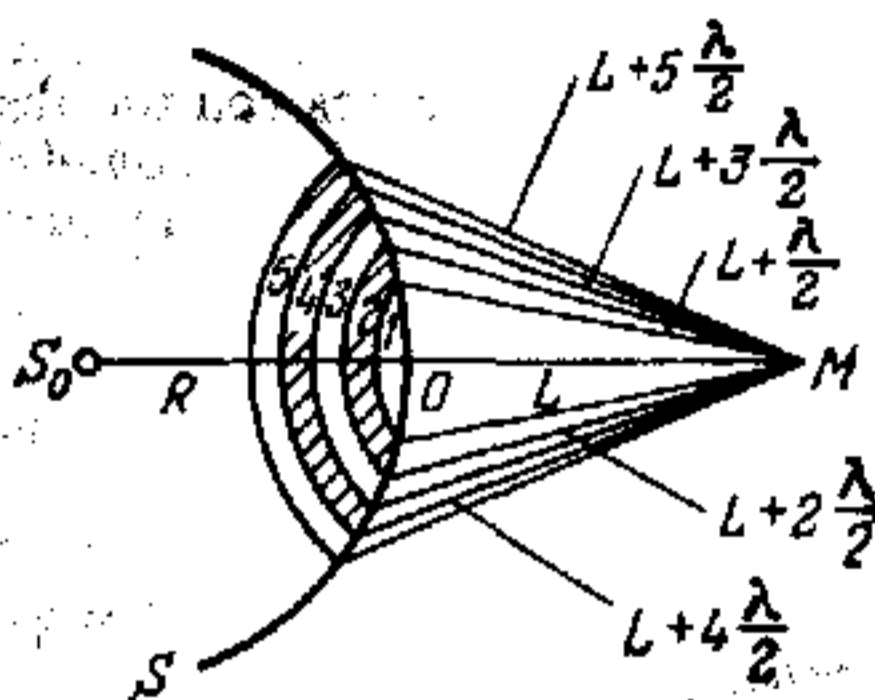


Fig. V.2.3.

el punto M y el ángulo α_i entre la normal a la superficie de la zona y la dirección al punto M . Por esto, de acuerdo con el principio de Huygens—Fresnel, $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$ y $A_i \approx \frac{1}{2} (A_{i-1} + A_{i+1})$. Por lo tanto, la amplitud de las oscilaciones en el punto M es $A \approx A_1/2$, es decir, la acción resultante de todo el frente de onda abierto es igual a la mitad de la acción de la primera zona (central) de Fresnel, cuyo radio es muy pequeño. De esta forma se puede considerar que la luz se propaga de S_0 a M rectilíneamente.

5°. Si en la trayectoria de la luz monocromática del foco S_0 se interpone una pantalla que tape, para el punto de observación M , todas las zonas de Fresnel excepto la primera, la amplitud y la intensidad de la luz en dicho punto M se duplica y cuatriplica, respectivamente, en comparación con sus valores en ausencia de la pantalla: $A = A_1$ y $J = A_1^2$. La luz se puede intensificar aún más en el punto M utilizando una *placa de zonas*, es decir, una lámina de vidrio con la superficie cubierta por unos anillos opacos que sólo tapan las zonas de Fresnel pares (o impares). La placa de zonas actúa sobre la luz de un modo semejante a una lente convergente.

§ V.2.2. Difracción de Fresnel

1°. Se llama *difracción de la luz* el conjunto de fenómenos, debidos a la naturaleza ondulatoria de la luz, que se observan cuando ésta se propaga en un medio de heterogeneidad óptica muy manifiesta (por ejemplo, al pasar a través de orificios en pantallas, cerca de los límites de cuerpos opacos, etc.). En un sentido más estrecho, por difracción se entiende, la desviación que sufre la luz cuando se encuentra con un obstáculo, o sea, la discrepancia con las leyes de la óptica geométrica.

Existen dos casos de difracción de la luz: la *de Fresnel* o *difracción de los rayos convergentes*, y la *de Fraunhofer* o *difracción*

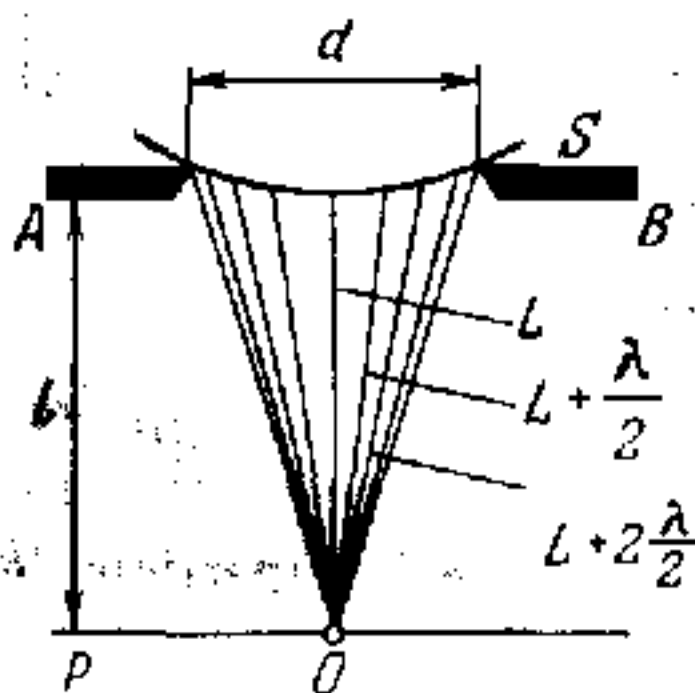


Fig. V.2.4.

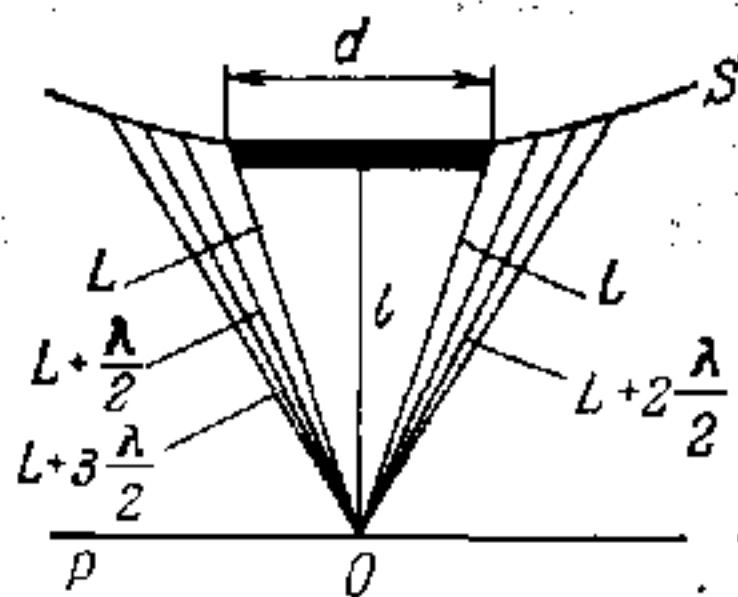


Fig. V.2.5.

de los rayos paralelos. En el primer caso, sobre el obstáculo incide una onda esférica o plana y la figura de difracción se observa en una pantalla que se encuentra detrás del obstáculo a una distancia finita de él. En el segundo caso incide sobre el obstáculo una onda plana y la figura de difracción se observa en una pantalla que está en el plano focal de una lente convergente colocada en la trayectoria de la luz que ya ha pasado el obstáculo. En la difracción de Fresnel se obtiene, sobre la pantalla, «la imagen de difracción» del obstáculo, y en la difracción de Fraunhofer, «la imagen de difracción» del lejano foco luminoso.

2°. En los problemas más simples de difracción de Fresnel, la forma de la figura de difracción se puede explicar valiéndose del método de las zonas de Fresnel (V.2.1.4°).

Ejemplo 1. *Difracción de Fresnel en un pequeño orificio redondo de una pantalla opaca AB* (fig. V.2.4). Cuando el orificio

se ilumina con luz monocromática de longitud de onda λ , en la pantalla P , paralela a AB , se observa un sistema de anillos de interferencia oscuros y claros, alternativos, con centro común en el punto O que se halla enfrente del centro del orificio. Si para el punto O el número de zonas de Fresnel que caben en el orificio es par, $2k$ ($k = 1, 2, \dots$), en dicho punto habrá una mancha oscura, es decir, la amplitud de la luz en el punto O será menor que en ausencia de la pantalla:

$$A \approx \frac{1}{2} (A_1 - A_{2k}) < A_1/2,$$

donde A_i es la amplitud correspondiente a una zona i -ésima. Si el número de zonas es impar, $(2k + 1)$, en el punto O se encontrará una mancha clara:

$$A \approx \frac{1}{2} (A_1 + A_{2k+1}) > A_1/2.$$

Si el orificio se ilumina con luz blanca, en la pantalla P se verá un sistema de anillos concéntricos coloreados.

El número de zonas de Fresnel que caben en el orificio y el contraste de la figura de interferencia dependen de la razón del diámetro d del orificio, a la distancia l entre las pantallas AB y P . A medida que aumenta d/l , la amplitud de la luz en el centro de la pantalla P se aproxima a $A_1/2$, y el contraste de los anillos de interferencia disminuye.

3°. Ejemplo 2. *Difracción de Fresnel en un disco pequeño* (pantalla redonda opaca). El procedimiento para construir las zonas abiertas de Fresnel en la superficie S de la onda monocromática esférica incidente, se muestra en la fig. V.2.5. La figura de interferencia que se recoge sobre la pantalla P tiene forma de anillos concéntricos claros y oscuros, con centro en el punto O , en el cual siempre se encuentra un máximo de interferencia (*mancha de Poisson*). La amplitud de la luz en el punto O es igual a la mitad de la amplitud A_1 , o sea, de la que tendría si sobre este punto actuara solamente la primera zona abierta de Fresnel: $A = A_1/2$. Si el disco se ilumina con luz blanca, en el centro de la pantalla P se observará una mancha blanca rodeada de un sistema de anillos concéntricos de colores.

A medida que aumenta la razón del diámetro del disco, a la distancia l entre éste y la pantalla P , el brillo de la mancha de Poisson va disminuyendo, y el anillo oscuro que la sigue va ensanchándose y formando una zona de sombra detrás del disco.

§ V.2.3. Difracción de Fraunhofer

1°. Ejemplo 1. *Difracción de la luz en una rendija estrecha y larga* de una pantalla opaca (fig. V.2.6). La anchura de la rendija $BC = b$ y su longitud, en dirección perpendicular al plano de la figura, $l \gg b$. La luz incide sobre la rendija normalmente a su superficie, de manera que en todos los puntos

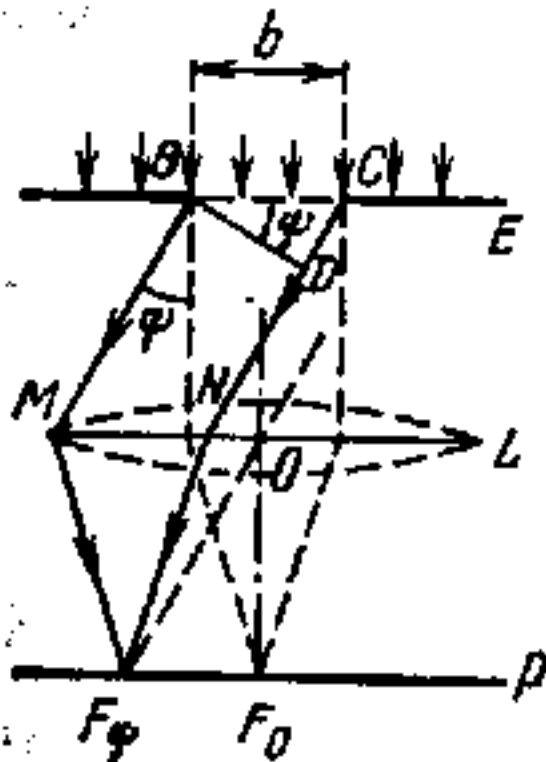


Fig. V.2.6.

de ésta, las oscilaciones se efectúan en la misma fase. La figura de difracción se observa en la pantalla P colocada en el plano focal de la lente convergente L . Los rayos paralelos BM y CN , que van desde los bordes de la rendija, formando el *ángulo de difracción* ψ con la dirección de los rayos de la luz incidente, son concentrados por la lente en su foco secundario F_ψ . Esa lente tiene la propiedad de que las trayectorias de los rayos de luz BMF_ψ y DNF_ψ , en las que D es la base de la perpendicular bajada desde el punto B al rayo CN , son tautócronas (isócronas) (V.1.3.2°). Por esto, el resultado de la interferencia en el

punto F_ψ de la pantalla depende de la diferencia de marcha $CD = b \sin \psi$ y de la longitud de onda λ de la luz.

a) *Solución aproximada.* La anchura de la rendija se puede dividir en zonas de Fresnel que tengan forma de franjas paralelas al borde B y cuya diferencia de marcha respecto a los bordes sea $\lambda/2$. El número de zonas de Fresnel que cabe en la rendija es igual a $2b |\sin \psi| / \lambda$. Todas las zonas emiten luz exactamente lo mismo en la dirección considerada, y las oscilaciones que excitan (en el punto F_ψ) dos zonas contiguas son iguales en amplitud y opuestas en fase. Por esto, si el número de zonas es par,

$$b \sin \psi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \text{ donde } m = 1, 2, \dots,$$

se observa un mínimo de difracción (oscuridad total). Si el número de zonas es impar,

$$b \sin \psi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ donde } m = 1, 2, \dots,$$

entonces se observa un máximo de difracción correspondiente a la acción de una zona de Fresnel. El máximo más brillante, el central, se observa en el foco principal F_0 de la lente ($\psi = 0$). A medida que crece m disminuye rápidamente la anchura de las zonas de Fresnel y la intensidad de los máximos.

b) **Solución exacta.** La rendija se divide en un número muy grande de franjas iguales, muy estrechas, paralelas al borde B . Las ondas secundarias que emiten estos elementos de la rendija excitan (en el punto F_ψ) oscilaciones que tienen la misma pequeña amplitud y cuyas fases iniciales llenan continuamente un intervalo de anchura $\Delta\varphi = (2\pi b \text{ sen } \psi)/\lambda$. De acuerdo con (V.1.4.4°), la amplitud y la intensidad de la luz en el punto F_ψ constituyen

$$A_\psi = A_0 \left| \frac{\text{sen } \frac{\pi b \text{ sen } \psi}{\lambda}}{\frac{\pi b \text{ sen } \psi}{\lambda}} \right| \quad \text{y} \quad J_\psi = J_0 \frac{\text{sen}^2 \frac{\pi b \text{ sen } \psi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \text{ sen } \psi}{\lambda} \right)^2},$$

donde A_0 y J_0 son, respectivamente, la amplitud y la intensidad del máximo central ($\psi = 0$).

La condición de los mínimos de difracción de la luz es la misma que en la solución aproximada: $b \text{ sen } \psi = \pm 2m \mid \frac{\lambda}{2}$, en la que $m = 1, 2, \dots$. La condición para los máximos de difracción tiene la forma

$$\text{tg } \frac{\pi b \text{ sen } \psi}{\lambda} = \frac{\pi b \text{ sen } \psi}{\lambda}$$

y difiere muy poco de la condición que se obtiene valiéndose del método de las zonas de Fresnel.

2°. Si la luz que incide sobre la rendija no es monocromática, sino blanca, el máximo central es blanco con bordes irisados. Todas las demás franjas de interferencia son de colores, ya que a los mínimos y a los máximos de los mismos órdenes m corresponden, en dependencia de la longitud de onda λ , diferentes ángulos ψ y distintos puntos F_ψ en la pantalla.

Según disminuye la anchura b de la rendija, aumenta la anchura del máximo central: crecen los ángulos $\psi_1 = \pm \text{arc sen } (\lambda/b)$ que corresponden a los mínimos de primer orden y que limitan el máximo central. Cuando $b \leq \lambda$, la iluminación de la pantalla decrece monótonamente desde el centro (punto F_0) hacia los extremos. Si la rendija es muy ancha ($b \gg \lambda$),

en la pantalla se observa una imagen clara y precisa de la fuente de luz, formada por la lente L según las reglas de la óptica geométrica.

3°. **Ejemplo 2. Difracción de la luz en un orificio redondo.** Una onda luminosa monocromática plana incide normalmente sobre el orificio, es decir, perpendicularmente a su plano.

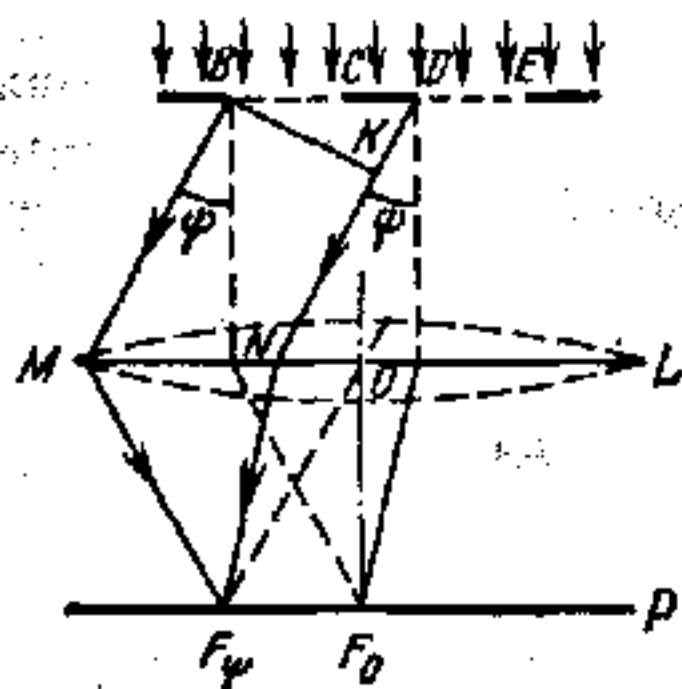


Fig. V.2.7.

La figura de difracción se observa en el plano focal de una lente convergente situada detrás del orificio, de tal forma que su eje óptico es perpendicular al plano de aquél. La figura de difracción tiene forma de una mancha clara brillante que se encuentra en el foco principal F_0 de la lente y unos anillos concéntricos alternativamente oscuros y claros. Las intensidades de los anillos claros son muy pequeñas comparadas con la intensidad J_0 del máximo central, y disminuyen a medida que aumentan sus radios. Por ejemplo, la intensidad del máximo de primer orden más

próximo al central es $J_1 < 0,02 J_0$. El ángulo de difracción ψ_1 correspondiente al primer anillo oscuro, que limita el máximo central, satisface la condición

$$\text{sen } \psi_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

donde D es el diámetro del orificio, y λ , la longitud de onda de la luz.

Si la luz incide sobre el orificio formando un pequeño ángulo α con la normal al plano de éste, el carácter de la figura de difracción no varía prácticamente, pero su centro se desplaza al foco secundario de la lente correspondiente al ángulo $\psi = \alpha$.

4°. **Ejemplo 3. Difracción de la luz en una red de difracción unidimensional.** Una red de difracción unidimensional es un sistema de gran número N de rendijas de igual anchura y paralelas entre sí, practicadas en una pantalla y separadas por intervalos opacos también de la misma anchura. En la fig. V.2.7 se ven solamente dos rendijas contiguas. La magnitud $d = a + b$, en la que $a = CD$ es la anchura del intervalo opaco, y $b = BC$, la anchura de la rendija, llamada *constante* o *período de la red de difracción*.

Al hacer el cálculo de la figura de difracción sobre la pantalla P colocada en el plano focal de la lente convergente L , debe tenerse en cuenta la interferencia de las ondas secundarias, tanto de las distintas partes de una rendija como de las diferentes rendijas de la red. Si una onda monocromática plana incide normalmente sobre la red, las oscilaciones en todos los puntos de las rendijas se efectúan en la misma fase.

Las oscilaciones que excitan cada una de las rendijas en un punto arbitrario F del plano focal de la lente L , coinciden en amplitud (A_1) y difieren en fase. Para cada par de rendijas contiguas el desfase $\Delta\varphi_0$ entre estas oscilaciones es el mismo. Dicho desfase depende de la longitud de onda λ y de la diferencia de marcha de los rayos procedentes de los puntos homólogos de las rendijas (por ejemplo, de los puntos B y D), o sea, de la magnitud $KD = d \operatorname{sen} \psi$, en la que K es la base de la perpendicular bajada desde el punto B al rayo DN :

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \psi.$$

Por esto, de acuerdo con (V.1.4.2°) y (V.2.3.1°), la amplitud y la intensidad de las oscilaciones resultantes en el punto F_ψ son

$$A = A_0 \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi b \operatorname{sen} \psi}{\lambda}}{\frac{\pi b \operatorname{sen} \psi}{\lambda}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi N d \operatorname{sen} \psi}{\lambda}}{\operatorname{sen} \frac{\pi d \operatorname{sen} \psi}{\lambda}} \right|,$$

$$J = J_0 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi b \operatorname{sen} \psi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \operatorname{sen} \psi}{\lambda} \right)^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi N d \operatorname{sen} \psi}{\lambda}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi d \operatorname{sen} \psi}{\lambda}},$$

donde A_0 y J_0 son, respectivamente, la amplitud y la intensidad de las oscilaciones en el punto F_0 (es decir, para $\psi = 0$) debidas a la acción de una rendija.

5°. *Los mínimos principales*, cuando la luz se difracta en una red, se observan bajo los ángulos de difracción ψ de los correspondientes mínimos de interferencia de la difracción en una rendija (p. 1°):

$$b \operatorname{sen} \psi = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, \dots).$$

En estas direcciones ninguna de las rendijas da luz (cada una «se apaga a sí misma»).

A los *máximos principales* (V.1.4.3°) corresponden ángulos de difracción ψ que satisfacen la condición

$$d \operatorname{sen} \psi = \pm n\lambda,$$

en la que $n = 0, 1, 2, \dots$ es el *orden del máximo principal*.

Observación. Si algunos valores de ψ satisfacen al mismo tiempo las condiciones de los máximos principales y de los mínimos principales, los máximos principales correspondientes a estos valores de ψ no se observarán. Por ejemplo, si $d = 2b$, todos los máximos principales pares ($n = 2, 4, 6$, etc.) estarán ausentes.

La intensidad del máximo principal de orden n -ésimo es

$$J_n = J_0 \left(\frac{Nd}{\pi nb} \right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi nb}{d}.$$

6°. Entre cada dos máximos principales se encuentran $N - 1$ *mínimos complementarios* que satisfacen la condición

$$d \operatorname{sen} \psi = \pm \frac{p\lambda}{N},$$

en la que p toma cualesquiera valores enteros positivos, excepto $N, 2N, 3N$, etc. Respectivamente se tienen $N - 2$ máximos complementarios, cuya intensidad es insignificante comparada con la de los máximos principales.

La «anchura» angular del máximo principal de n -ésimo orden, es decir, la diferencia entre los valores del ángulo ψ , correspondientes a los mínimos complementarios que limitan este máximo, constituye

$$\Delta\psi_n = \frac{2\lambda}{Nd \cos \psi_n} = \frac{2\lambda}{L \cos \psi_n},$$

donde $\psi_n = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (n\lambda/d)$; $L = Nd$ es la longitud de la red de difracción. Para los máximos principales de órdenes no demasiado altos, los ángulos ψ_n son pequeños y $\cos \psi_n \approx 1$, de manera que $\Delta\psi_n \approx 2\lambda/L$.

7°. En luz monocromática, la figura de difracción sobre la pantalla P situada en el plano focal de la lente L (fig. V.2.7) tiene, cuando son grandes las N , forma de máximos principales estrechos y brillantes separados por anchos intervalos prácticamente oscuros. Si la relación d/b es un número irracional, la intensidad de los máximos principales (p. 5°) disminuirá monótonamente al crecer su orden n .

Cuando la red se ilumina con luz blanca, en la pantalla se observa un máximo central de orden nulo, no coloreado, y a ambos lados de él, *espectros de difracción* de 1° , 2° , etc., órdenes. Estos espectros tienen forma de franjas irisadas en las que se observa el paso continuo de la coloración azul-violácea del borde interno del espectro, a la coloración roja del borde externo.

8°. Si la *luz incide oblicuamente* sobre la red de difracción (fig. V.2.8), la condición para los máximos principales tiene la forma

$$d (\sin \psi - \sin i) = \pm n\lambda$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots),$$

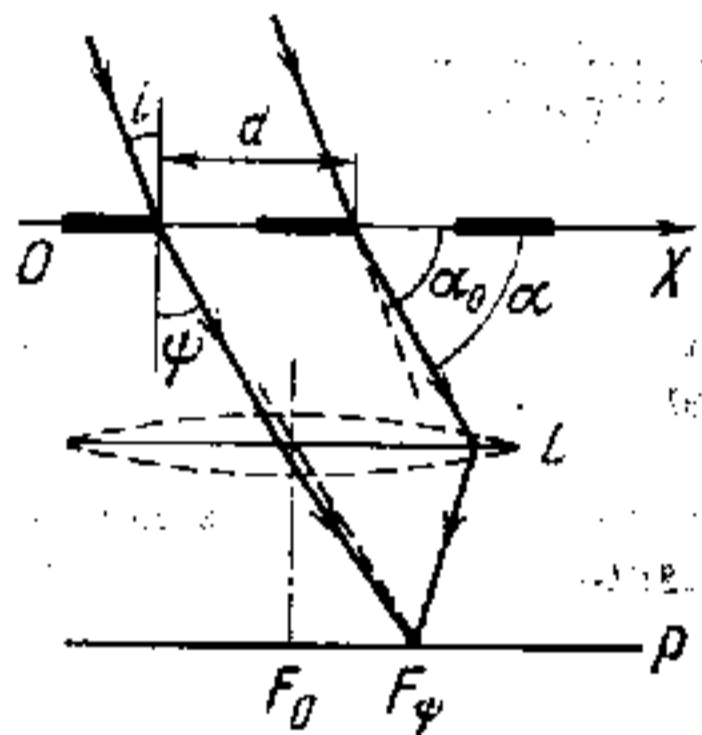


Fig. V.2.8.

donde i es el ángulo de incidencia de la luz sobre la superficie de la red. La dirección de los rayos de luz que inciden sobre la red y se difractan en ella, se caracteriza frecuentemente por medio de los ángulos α_0 y α entre estos rayos y el eje de coordenadas OX trazado en el plano de la red perpendicularmente a las rendijas. En este caso la condición para los máximos principales se puede escribir de la forma siguiente:

$$d (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \pm n\lambda.$$

9°. Dos pantallas se llaman *complementarias* si a los orificios de una de ellas les corresponden partes opacas, de forma, dimensiones y disposición mutua exactamente iguales en la otra, y viceversa. Este es el caso, por ejemplo, de una pantalla opaca en forma de círculo de radio R , y de otra pantalla también opaca, con un orificio circular del mismo radio R . Partiendo del principio de Huygens—Fresnel se puede demostrar el *teorema de Babinet (principio de Babinet)*: en la difracción de Fraunhofer sobre cualquier pantalla, la intensidad de la luz difractada en una dirección cualquiera, excepto en la de propagación de la onda plana que incide en la pantalla, debe ser la misma que si la difracción se efectuara en la pantalla complementaria.

10°. **Ejemplo 4. Difracción en un gran número de obstáculos iguales e igualmente orientados.** La intensidad de la luz J en un punto cualquiera M de la figura de difracción, lo mismo que cuando la difracción tiene lugar en una red unidimensional

(p. 4°), se puede representar en la forma de $J = fJ_1$. Aquí J_1 es la intensidad en el punto M cuando la difracción de la misma onda incidente se produce por *un solo* obstáculo. La función f sólo depende de la cantidad y la disposición mutua de los obstáculos.

Si los obstáculos están situados de un modo totalmente caótico entre sí, y su número N es grande, $f \approx N$. En este caso la distribución de la intensidad de la luz es la misma que cuando la difracción se produce en un solo obstáculo, pero la intensidad en cada punto de la figura de difracción es N veces mayor. Por ejemplo, si la luz se difracta en una lámina de vidrio cubierta por una capa de partículas esferoidales de diámetro d , se observará un sistema de anillos de interferencia concéntricos brillantes. Las dimensiones de estos anillos corresponden a la difracción de la luz en un disco opaco de diámetro d o, de acuerdo con el teorema de Babinet (p. 9°), en un orificio circular del mismo diámetro.

§ V.2.4. Difracción en una red espacial

1°. Se da el nombre de *red de difracción espacial* o *tridimensional* a un medio ópticamente heterogéneo cuya heterogeneidad se repite periódicamente al variar las tres coordenadas espaciales. De ejemplo de red de difracción espacial puede servir la red cristalina de un sólido. Las partículas que se hallan en los nudos de esta red (átomos, moléculas o iones) desempeñan el papel de centros ordenados que dispersan coherentemente la luz que sobre ellos incide. Sean d_1 , d_2 y d_3 los períodos de la red según tres ejes de coordenadas ξ , η , ζ , tomados a lo largo de tres aristas de la red que se corten en cualquiera de sus nudos. Entonces, en la difracción de Fraunhofer (V.2.2.1°), los máximos principales satisfarán las *condiciones de Laue*:

$$d_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = n_1 \lambda, \quad d_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) = n_2 \lambda,$$

$$d_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) = n_3 \lambda.$$

Aquí α_0 , β_0 , γ_0 y α , β , γ son los ángulos entre los ejes de coordenadas ξ , η , ζ y las direcciones en que se propagan: respectivamente, la luz incidente y la refractada; n_1 , n_2 y n_3 son los números enteros que determinan el orden del máximo; y λ , la longitud de onda de la luz. Las condiciones de Laue se deducen de las relaciones (V.2.3.8°) para los máximos de difracción

cuando la luz incide oblicuamente sobre una red de difracción unidimensional.

2°. De los tres ángulos α , β y γ (respectivamente α_0 , β_0 y γ_0) sólo dos son independientes, ya que deben satisfacer una relación geométrica cuya forma concreta depende de los ángulos entre las coordenadas ξ , η , ζ . Por ejemplo, si los ejes de coordenadas son perpendiculares entre sí, es decir, si la red es ortogonal, la relación geométrica entre α , β y γ tiene la forma

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Por esto, cuando se da una dirección arbitraria de incidencia de una luz monocromática (de longitud de onda λ determinada) sobre una red de difracción espacial, en general, no es posible hallar los valores de α , β y γ que satisfacen simultáneamente la relación geométrica y las tres condiciones de Laue. La única excepción es la del máximo de orden nulo ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$), para la cual $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ y $\gamma = \gamma_0$.

Para observar el máximo de difracción de orden (n_1, n_2, n_3) conociendo los valores de los ángulos α_0 , β_0 y γ_0 , es necesario que la longitud de onda de la luz incidente tenga un valor completamente determinado. Por ejemplo, en el caso de una red ortogonal, la longitud de onda deberá constituir

$$\lambda = -2 \frac{\frac{n_1}{d_1} \cos \alpha_0 + \frac{n_2}{d_2} \cos \beta_0 + \frac{n_3}{d_3} \cos \gamma_0}{\left(\frac{n_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{d_3}\right)^2}.$$

Si se fija el valor de la longitud de onda λ de la luz incidente, las condiciones de Laue y la relación geométrica entre los ángulos α , β y γ se pueden satisfacer al mismo tiempo eligiendo convenientemente la dirección de incidencia de la luz sobre la red de difracción, o sea, los ángulos α_0 , β_0 y γ_0 .

3°. De las condiciones de Laue se deduce que para $\lambda \geq 2d_{\text{máx}}$, donde $d_{\text{máx}}$ es el mayor de los valores de d_1 , d_2 y d_3 , deben estar ausentes todos los máximos de difracción excepto el de orden nulo ($n_1 = n_2 = n_3 = 0$). La luz con estas longitudes de onda se propaga en el medio «sin notar» su heterogeneidad, es decir, sin experimentar difracción. Por esto, la condición $\lambda \geq 2d_{\text{máx}}$ se llama *condición de homogeneidad óptica del medio*.

Las constantes de las redes cristalinas de los sólidos son mucho menores que las longitudes de onda de la luz visible

($d_1 \sim 5 \cdot 10^{-10}$ m y $\lambda_{\text{luz vis}} \sim 5 \cdot 10^{-7}$ m). Por lo tanto, para la luz visible, los cristales son un medio ópticamente homogéneo*). Sin embargo, para los rayos X (IV.4.4.4°) los cristales son redes de difracción naturales.

4°. La difracción de los rayos X en los cristales se puede interpretar como el resultado de la interferencia de la radiación X que se refleja especularmente en un sistema de planos paralelos que pasan por los nudos de la red cristalina. Estos planos se

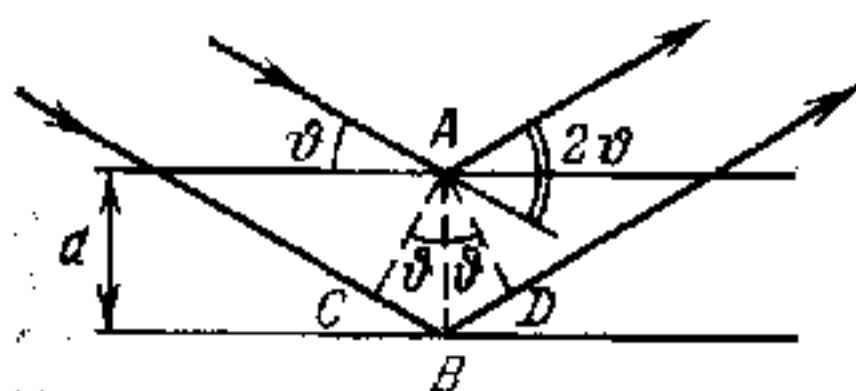


Fig. V.2.9.

llaman *planos reticulares* o *planos atómicos del cristal*. La distancia d entre dos planos reticulares consecutivos se denomina *distancia entre planos*, y el ángulo ϑ entre el rayo incidente y el plano reticular (fig. V.2.9), *ángulo de deslizamiento*. La diferencia de marcha de los rayos reflejados en dos planos reticulares consecutivos**) es $\Delta = BC + BD = 2d \sin \vartheta$. Por esto, de acuerdo con V.1.2.1°, la reflexión se observa solamente en las direcciones que corresponden a los máximos de difracción que satisfacen la *condición de Wulff y Bragg*:

$$2d \sin \vartheta = m\lambda,$$

donde $m = 1, 2, \dots$ es el orden del máximo de difracción.

5°. El método experimental de estudio de la estructura atómica de una sustancia, investigando las leyes de difracción de la radiación X al pasar a través de la muestra que se analiza, se llama *análisis estructural roentgenográfico* o *por rayos X*. Este método es el más eficaz para estudiar la estructura de

*) En los cristales es posible la difusión molecular de la luz visible (V.3.3.1°) debida a la infracción de su homogeneidad óptica motivada por las fluctuaciones de la densidad.

***) Los rayos X no se refractan en el cristal porque el valor del índice de refracción (IV.4.5.1°) de todos los cristales, para una radiación electromagnética de tan alta frecuencia, es prácticamente igual a la unidad.

los cuerpos cristalinos. La figura de difracción obtenida en la película fotográfica recibe el nombre de *roentgenograma de la muestra*. El roentgenograma que se obtiene al difractarse en un *monocristal* un haz «blanco» de rayos X (de espectro de frecuencias continuo), se llama *diagrama de Laue*. Este diagrama tiene aspecto de manchas de difracción discretas cuya posición se determina por las condiciones de Laue (p. 1°). Se denomina *diagrama de Debye* el roentgenograma que se obtiene al difractarse un haz monocromático de rayos X en una muestra *semicristalina* (por ejemplo, en polvo cristalino). Este diagrama tiene la forma de un sistema de anillos concéntricos de difracción. Los radios de esos anillos son $r = l \operatorname{tg} 2\theta$, donde l es la distancia desde la muestra hasta el plano del roentgenograma colocado perpendicularmente al rayo incidente, y los ángulos θ satisfacen la condición de Wulff—Bragg (p. 4°).

§ V.2.5. Poder resolutivo de los instrumentos ópticos

1°. La imagen del objeto en todo instrumento óptico (telescopio, microscopio, cámara fotográfica, etc.) se obtiene por medio del haz de luz limitado que deja entrar en el instrumento el llamado *diafragma de apertura*. El papel de este diafragma lo desempeña, por ejemplo, el diafragma de la cámara fotográfica, la montura del objetivo del telescopio, etc. La reducción del diámetro del diafragma de apertura facilita la disminución de diversas deformaciones de la imagen, debidas a la utilización de anchos haces de luz y a las denominadas *aberraciones geométricas del sistema óptico*. Pero a causa de la difracción de la luz en el instrumento, la imagen de un punto luminoso no tiene forma de punto, sino de una mancha clara rodeada de un sistema de anillos concéntricos de interferencia (oscuros y claros en el caso de la luz monocromática, o irisados en el de la luz blanca). Este fenómeno limita el *poder resolutivo* (*poder separador*) *del instrumento óptico*, o sea, su capacidad de proporcionar imágenes separadas de dos puntos del objeto próximos entre sí.

2°. Según el *criterio de Rayleigh*, las imágenes de dos focos puntuales de luz iguales se pueden distinguir aún separadamente si el máximo central de la figura de difracción de uno de ellos coincide con el primer mínimo de la figura de difracción del otro. De V.2.3.3° se deduce que, de acuerdo con el criterio de Rayleigh, dos estrellas próximas que se observen con un telescopio en luz monocromática de longitud de onda λ , se verán separadas si

la distancia angular entre ellas es

$$\Delta\varphi \geq 1,22\lambda/D,$$

donde D es el diámetro del objetivo. La magnitud $(\Delta\varphi)_0 = 1,22\lambda/D$ se llama *límite angular de resolución del telescopio*, y su magnitud inversa $1/(\Delta\varphi)_0$, *poder resolutivo del telescopio*. Este poder crece proporcionalmente al diámetro del objetivo. La condición de resolución para el anteojo y la cámara fotográfica, cuando se miran o fotografían objetos lejanos, coincide con la condición de resolución para el telescopio.

El límite angular de resolución del ojo humano viene determinado por la difracción de la luz en la pupila ($D \sim 2$ mm) y en la estructura granular de la retina. Este límite es igual, aproximadamente, a $1'$.

3°. El poder resolutivo de un microscopio se caracteriza por la magnitud $(\Delta l)_0$ de la distancia mínima entre dos puntos del objeto visibles separadamente en la imagen. En el caso de un objeto luminoso cuyos puntos puedan considerarse como focos no coherentes,

$$(\Delta l)_0 = \frac{0,61\lambda_0}{A},$$

donde λ_0 es la longitud de la onda de la luz en el vacío; $A = n \sin u$, la *apertura numérica del objetivo*; n , el índice de refracción del medio que hay entre el objeto y el objetivo; y u , la mitad del ángulo de abertura del haz de luz procedente del punto del objeto y que llega al objetivo del microscopio. Para los objetos iluminados, el valor de $(\Delta l)_0$ depende de las condiciones de iluminación. Sin embargo, también en este caso $(\Delta l)_0 \geq \lambda_0/A$.

El poder resolutivo del microscopio se puede aumentar disminuyendo la longitud de onda λ_0 o aumentando la apertura numérica A . El primer procedimiento se utiliza en las microscopías ultravioleta y electrónica, y el segundo, en el microscopio de inmersión, en el cual el espacio entre el objeto y el objetivo se llena con un líquido transparente de índice de refracción $n > 1$.

§ V.2.6. Holografía

1°. Se llama *holografía* el método de obtención de la imagen tridimensional de los objetos, basado en el fenómeno de interferencia de las ondas. En la holografía, a diferencia de

lo que ocurre en el método fotográfico ordinario, se registran, por medio de una emulsión fotosensible, no sólo las relaciones entre las amplitudes (o sus cuadrados, es decir, las intensidades) de las ondas luminosas difundidas por las distintas partes pequeñas de la superficie del objeto, sino también entre las fases de estas ondas. La esencia del método holográfico se explica en la fig. V.2.10. Valiéndose de una placa fotográfica F

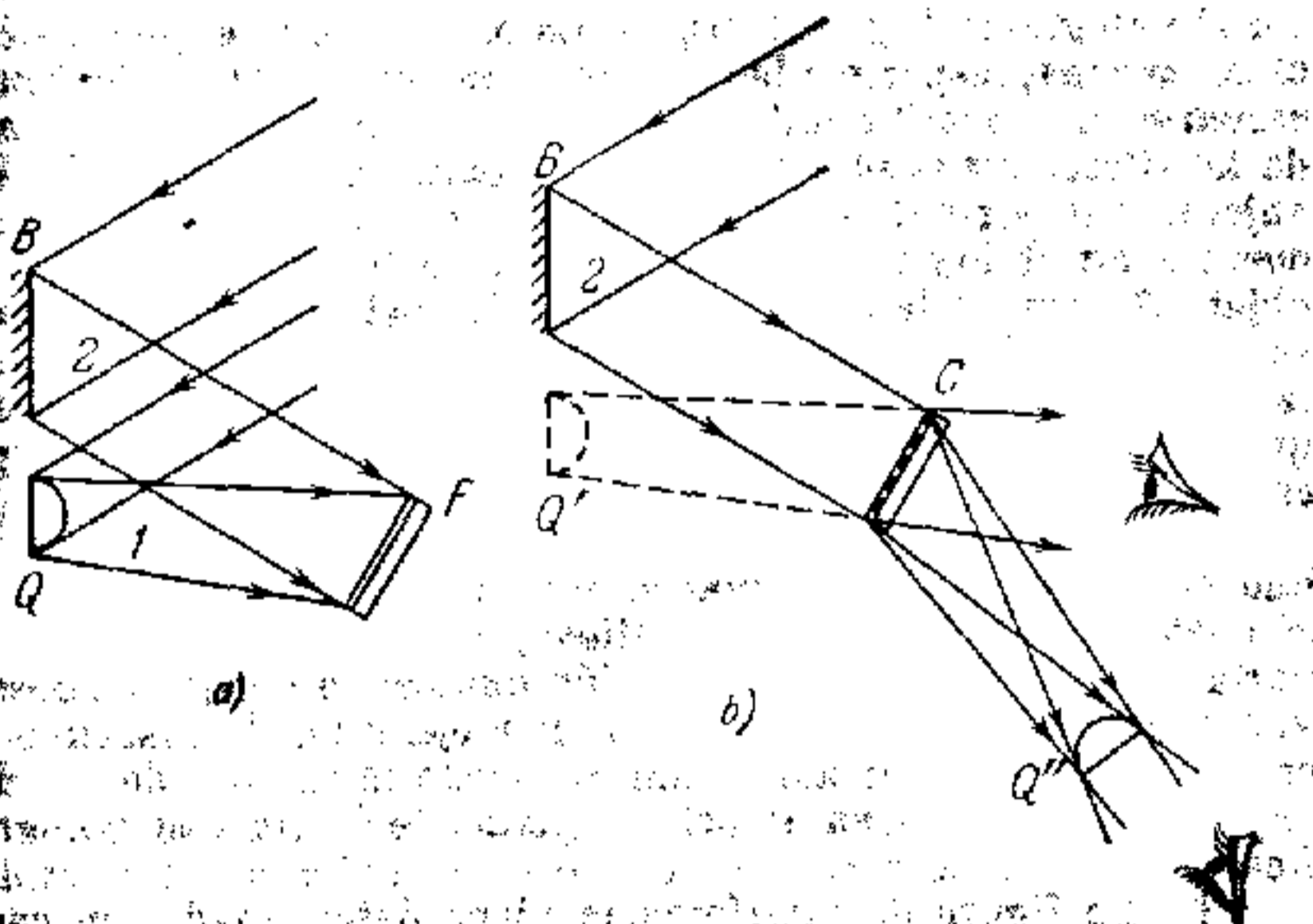


Fig. V.2.10

(fig. V.2.10, a) se fija la figura de interferencia que se produce al superponerse la onda 1 difundida por el objeto Q y llamada *onda señal* o *haz objeto*, y su coherente 2, cuya amplitud y fase tienen valores fijos. La onda 2, denominada *onda* o *haz de referencia*, la emite el mismo foco de luz que ilumina el objeto y, después de reflejarse en el espejo B , incide directamente sobre la placa fotográfica F . La figura de interferencia fijada en la placa fotográfica, después de revelada, recibe el nombre de *holograma del objeto* Q . Este holograma es una figura muy fina y complicada formada por máximos y mínimos alternativos de ennegrecimiento de la emulsión fotosensible y, a diferencia de la imagen fotográfica del objeto, no se parece en nada a él.

Para obtener los hologramas es necesario realizar la interferencia de la luz con grandes diferencias de marcha, es decir, se requiere un grado muy alto de coherencia de la luz (V.1.2.4°). Por esto, con este fin se utilizan, como fuentes de luz, los láseres (VI.2.6.8°)

2°. *La reconstrucción de la imagen del objeto* por su holograma C se lleva a cabo iluminándolo, como una transparencia, con la onda de referencia 2 del mismo láser que se utilizó al hacer el holograma (fig. V.2.10, b). La orientación de la placa con el holograma, respecto a la onda de referencia, también debe conservarse. La onda 2 se difracta en el holograma. Como resultado de la difracción se observan dos imágenes tridimensionales del objeto: una virtual y otra real. La imagen virtual Q' se encuentra en el lugar que, con respecto al holograma, ocupó el objeto Q durante la obtención de aquél. Esta imagen se ve mirando a través del holograma como por una ventanilla. La imagen real Q'' se encuentra al otro lado del holograma. Parece que está suspendida en el aire delante de éste y es una imagen especular del objeto.

Por lo general se utiliza la imagen holográfica virtual, que por su percepción visual es idéntica al objeto mismo. No sólo tiene la propiedad del relieve, sino que su perspectiva varía en dependencia de la posición que ocupe el ojo del observador con respecto al holograma. Por ejemplo, desplazando la cabeza a lo largo del holograma se puede mirar por detrás del objeto que se halla en el primer plano de la imagen holográfica.

3°. La figura de interferencia viene determinada, en cada punto del holograma, por la luz que se difunde en todos los puntos del objeto. Por esto, cualquier porción del holograma contiene información sobre todo el objeto y permite reconstruir la imagen entera de éste si el holograma se deteriora y sólo se conserva dicho trozo de él. Cuanto menor sea la parte del holograma que se conserva, tanto menor será la luz que en él se difracta al reconstruir la imagen. Respectivamente, disminuye el brillo y empeora la nitidez de la imagen holográfica del objeto. Así, pues, el holograma tiene ventajas importantes en cuanto a la seguridad de almacenamiento de la información, frente a la fotografía ordinaria (o su negativo), en la cual cada elemento sólo contiene información de la parte del objeto representado en ella.

La inscripción holográfica de información se distingue por su gran densidad de almacenamiento. Así, en una misma placa fotográfica se pueden inscribir muchos hologramas distintos.

Para esto basta, por ejemplo, tomar cada uno con un valor propio del ángulo de incidencia de la onda de referencia sobre la placa.

4°. La holografía permite obtener imágenes tridimensionales en colores de los objetos. Para hacer un holograma «en colores» se utiliza la luz monocromática de láser de tres colores fundamentales (por ejemplo, rojo, verde y azul). El registro de las figuras de interferencia correspondientes a la luz de las tres longitudes de onda, se hace simultánea o consecutivamente en la misma placa fotográfica. Para reconstruir la imagen tridimensional en colores del objeto hay que dirigir simultáneamente sobre el holograma, y bajo los ángulos respectivos, los tres haces de referencia de luz monocromática que se utilizaron para su registro.

5°. Tienen propiedades especiales los hologramas tridimensionales que se obtienen valiéndose de capas gruesas de emulsión fotosensible. En estos hologramas no se fija una figura de interferencia plana, sino la figura espacial que se produce al superponerse las ondas del objeto y las de referencia. Este holograma es semejante a una red espacial de difracción y es capaz de separar, de la luz blanca que incide en él, la luz monocromática de la longitud de onda que se utilizó para inscribir el holograma. Por esto, la reconstrucción de la imagen registrada en forma de holograma tridimensional se puede efectuar iluminando este último tanto con la correspondiente luz monocromática, como con luz blanca. Si el holograma tridimensional es «en colores», para reconstruir la imagen tridimensional en colores será suficiente iluminarlo con luz blanca.

Capítulo V.3.

Absorción, difusión y dispersión de la luz.

Radiación

de Vavílov—Cherenkov

§ V.3.1. Interacción de la luz con la sustancia

1°. De acuerdo con las representaciones de la teoría electrónica clásica, el campo electromagnético alternativo de la onda que se propaga en un medio dieléctrico, produce oscilacio-

nes forzadas de las cargas ligadas (electrones e iones) que entran en la composición de las moléculas de ese medio. Respectivamente, cada molécula de éste se puede considerar como un sistema de osciladores con distintas frecuencias cíclicas de las oscilaciones propias (IV.1.1.1°). Los iones tienen una masa mucho mayor que la de los electrones y sólo efectúan oscilaciones apreciables bajo la influencia de una radiación de baja frecuencia (infrarroja). En la región de frecuencias de la radiación visibles y ultravioleta, el papel definitivo lo desempeñan las oscilaciones forzadas de los electrones externos más débilmente ligados a los átomos y moléculas y llamados *electrones ópticos*

2°. Los electrones e iones, al efectuar oscilaciones forzadas por la acción de la luz, emiten ondas luminosas secundarias de la misma frecuencia. Las distancias medias entre las moléculas del medio son, por lo general, muchísimo menores que la longitud de coherencia de la luz (V.1.1.4°). Por esto, las ondas secundarias emitidas por el conjunto de moléculas vecinas, son coherentes e interfieren al superponerse.

Si el medio es homogéneo e isótropo (IV.3.1.6°), como resultado de la interferencia se origina una onda transmitida, cuya velocidad de fase depende de la frecuencia, y su dirección de propagación coincide con la de la onda primaria.

3°. En el caso de un medio heterogéneo, como resultado de la superposición de las ondas primaria y secundaria se produce la difusión de la luz (V.3.3.1°). Finalmente, cuando la luz incide sobre el límite de separación de dos medios distintos, como resultado de la interferencia surge no sólo la onda transmitida, sino también una onda reflejada. De este modo, en la formación de la onda reflejada participa una capa más o menos importante de partículas del medio adyacente a la superficie reflectora. Por esto, cuando se produce la reflexión total (IV.4.5.8°), el campo electromagnético de la onda luminosa no se interrumpe en el límite de separación con el medio ópticamente menos denso, sino que penetra en él parcialmente. Pero la intensidad E del campo en este medio disminuye muy rápidamente a medida que se aleja del límite de separación, según la ley

$$E \sim \exp \left| -\frac{2\pi z}{\lambda_2} \sqrt{(\sin^2 i/n_{21}^2) - 1} \right|, \quad (11.11)$$

donde z es la distancia desde el límite de separación; i , el ángulo de incidencia ($i > i_m$); λ_2 , la longitud de onda de la luz en el medio; y n_{21} , el índice de refracción relativo de éste.

§ V.3.2. Absorción de la luz

1°. Se da el nombre de *absorción de la luz* al fenómeno de la disminución de la energía de una onda luminosa cuando se propaga en un medio, debido a la transformación de la energía de la onda en energía intrínseca de la sustancia (II.2.1.2°) o en energía de radiación secundaria de otra composición espectral y otras direcciones de propagación (fotoluminiscencia (VI.2.5.B.5°)). La absorción de la luz puede producir en la sustancia su calentamiento, la excitación e ionización de los átomos o moléculas, reacciones fotoquímicas y otros procesos.

La absorción de la luz se define por la *ley de Bouguer—Lambert (ley de Bouguer)*, de acuerdo con la cual la intensidad J de una onda plana de luz monocromática disminuye a medida que pasa por el medio absorbente, según la ley exponencial

$$J = J_0 e^{-\alpha x}.$$

Aquí J_0 y J son los valores de la intensidad de la luz al entrar y al salir de una capa de espesor x del medio, y α , el *índice de absorción del medio (coeficiente lineal de absorción)*, que depende de la naturaleza química y del estado del medio absorbente y de la longitud de onda λ de la luz.

En una solución diluida de una sustancia absorbente en un solvente que no absorbe, se cumple la *ley de Berr*: $\alpha = bc$, donde c es la concentración de la solución, y b , un coeficiente de proporcionalidad independiente de c . En las soluciones concentradas se infringe la ley de Beer a causa de la influencia que ejerce la interacción de las moléculas de la sustancia absorbente próximas entre sí.

2°. De acuerdo con la ley de Bouguer—Lambert, la ecuación de una onda luminosa monocromática plana, polarizada linealmente, que se propaga en un medio absorbente a lo largo del sentido positivo del eje OX , tiene la forma

$$E = E_0 e^{-\frac{1}{2} \alpha x} \cos(\omega t - kx).$$

Aquí E es la intensidad del campo eléctrico de la onda en los puntos de la coordenada x ; E_0 , la amplitud de E en los puntos del plano $x = 0$; ω , la frecuencia cíclica de la luz; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} n$, el número de onda; λ , la longitud de onda de la luz.

en el medio; c , la velocidad de la luz en el vacío; y n , el índice de refracción del medio.

En forma exponencial, la ecuación de esta onda es (IV.3.2.7)

$$\tilde{E} = E_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha x} e^{i(\omega t - kx)} = E_0 e^{i\left(\omega t - \tilde{n} \frac{\omega x}{c}\right)},$$

donde

$$\tilde{n} = n \left(1 - i \frac{\alpha \lambda}{4}\right) = n(1 - i\kappa)$$

es el *índice complejo de refracción del medio* ($i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria), y

$$\kappa = \frac{\alpha}{2k} = \frac{\alpha \lambda}{4\pi},$$

el *coeficiente de extinción* que caracteriza el decrecimiento de la intensidad y de la amplitud de la onda plana a medida que ésta se propaga en el medio.

3°. La dependencia del índice de absorción, respecto de la longitud de onda λ de la luz, que caracteriza el *espectro de absorción de la luz* en este medio, está relacionada con el fenómeno de resonancia en las oscilaciones forzadas de los electrones en los átomos y de los átomos en las moléculas del dieléctrico. Los dieléctricos absorben la luz de un modo más o menos selectivo: la absorción es grande solamente en las regiones de frecuencias próximas a las de las oscilaciones propias de los electrones en los átomos y de los átomos en las moléculas. Donde este fenómeno de *absorción de la luz por resonancia* se manifiesta con mayor claridad es en los gases monoatómicos enrarecidos (por ejemplo, en los vapores de la mayoría de los metales), para los cuales es característico el *espectro de rayas de absorción de la luz*. Las frecuencias discretas de absorción intensa de la luz coinciden con las frecuencias de radiación propia de los átomos excitados de estos gases.

En los gases de moléculas poliatómicas se observan sistemas de rayas muy juntas que forman *bandas de absorción*. La estructura de las bandas de absorción viene determinada por la composición y la estructura de las moléculas. Los dieléctricos líquidos y sólidos tienen *espectros de absorción continuos*, constituidos por bandas de absorción relativamente anchas, dentro de cuyos límites el índice de absorción α alcanza una magnitud considerable y varía suavemente en dependencia de la longitud

de onda λ . Esta marcha de la dependencia de α respecto a λ en los medios condensados, se explica por la fuerte interacción entre las partículas del medio, que hace que aparezca un conjunto de frecuencias de resonancia adicionales.

4°. Cuando los valores de la intensidad de la luz son suficientemente grandes, la ley de Bouguer—Lambert (p. 1°) se infringe: el índice de absorción del medio dieléctrico empieza a depender de J y disminuye con su crecimiento. Este fenómeno, inexplicable dentro del marco de la teoría clásica de la absorción de la luz, se interpreta fácilmente en la teoría cuántica de la interacción de la luz con la sustancia. En la absorción de la luz, parte de las moléculas del medio pasan a un estado excitado. Las moléculas excitadas no podrán, en adelante, participar en la absorción de la luz hasta que sigan perdiendo su exceso de energía y hasta que no vuelvan a su estado no excitado («normal»). La parte de moléculas excitadas del medio será tanto mayor cuanto mayor sea la intensidad de la luz y la vida media (τ) de las moléculas en estado excitado. Si estas moléculas constituyen una parte insignificante, la absorción de la luz transcurrirá de acuerdo con la ley de Bouguer—Lambert. En el caso contrario, α disminuye al aumentar la intensidad de la luz.

Se puede conseguir un estado en desequilibrio del medio en el que la parte de moléculas excitadas sea tan grande, que el índice de absorción se haga negativo. Este fenómeno se utiliza en los generadores cuánticos de ondas radioeléctricas y de luz (VI.2.6.8°).

5°. Los metales que se encuentran en estado condensado contienen una enorme cantidad de electrones de conducción y, por esto, poseen alta conductibilidad eléctrica. Por la acción de la luz, los electrones de conducción efectúan un movimiento alterno y emiten ondas secundarias. Como resultado de la superposición de la onda primaria, que incide sobre la superficie del metal, y de las ondas secundarias, se origina una onda reflejada intensa y una onda relativamente débil, transmitida en el metal. El coeficiente de reflexión (IV.4.5.6°) puede alcanzar un 95% y aún más. Este coeficiente depende de la pureza de la superficie del metal, de su conductibilidad eléctrica y de la frecuencia de la luz. La onda refractada es absorbida muy rápidamente por el metal. Su energía se invierte en el calor de Joule que desprenden las corrientes de conducción producidas por la acción de la luz en una tenue capa del metal junto a su superficie. En la región de frecuencias de la radiación infrarroja, las propiedades ópticas de los metales las determinan principalmente los electrones de conducción. Pero en la región de la luz

visible, y especialmente de la radiación ultravioleta, empiezan a desempeñar un papel apreciable los electrones ligados que se hallan en los iones del metal. Esto ocasiona una disminución del coeficiente de reflexión y una dependencia sensible de este coeficiente respecto a la frecuencia.

§ V.3.3. Difusión de la luz

1°. Se llama *difusión de la luz* el fenómeno de transformación de ésta por la substancia, acompañado del cambio de dirección en que se propaga y que se manifiesta como una luminiscencia impropia de la substancia. Esta luminiscencia se debe a las oscilaciones forzadas de los electrones en los átomos del medio difusor sometido a la acción de la luz incidente. La difusión de la luz se produce en un medio ópticamente heterogéneo cuyo índice de refracción varía irregularmente de un punto a otro a causa de las fluctuaciones de la densidad del medio o por la presencia en él de pequeñas partículas extrañas. En el primer caso la difusión se llama *molecular* o difusión de Rayleigh, y en el segundo, *difusión de la luz por un medio turbio*. De ejemplos de medios turbios pueden servir los aerosoles (humo, niebla), las emulsiones, las soluciones coloidales y otros medios.

2°. La difusión de la luz en medios turbios, en partículas cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda λ , recibe el nombre de *efecto Tyndall*. El sistema de electrones que efectúa las oscilaciones forzadas en los átomos de una partícula eléctricamente isótropa de pequeña dimensión, $r_0 \sim (0,1 - 0,2) \lambda$, es equivalente a un dipolo eléctrico oscilante (oscilador lineal armónico). Este dipolo oscila con la frecuencia ν de la luz que incide en él, y la intensidad de la luz que él emite es proporcional a ν^4 (IV.4.3.3°). Por esto, para la luz difusa es correcta la *ley de Rayleigh*, según la cual la intensidad J de esa luz es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda: $J \sim \lambda^{-4}$. Cuando la luz blanca pasa a través de un medio turbio de pequeñas partículas difusoras, en la luz difusa prevalece la luz de onda corta (azul-celeste), y en la luz transmitida, la de onda larga (amarillo-rojo). Esto explica, por ejemplo, el color celeste del cielo y el amarillo-rojo del Sol poniente y naciente.

En el caso de difusión de la luz natural (V.4.1.1°), la variación de la intensidad de la luz difusa en función del ángulo de

difusión ϑ tiene la forma

$$J_{\vartheta} = J_{\pi/2} (1 + \cos^2 \vartheta).$$

Aquí J_{ϑ} y $J_{\pi/2}$ son las intensidades de la luz difusa bajo los ángulos ϑ y $\pi/2$ respecto de la dirección del haz primario de luz que incide sobre el medio turbio. La luz difusa bajo un ángulo ϑ arbitrario está polarizada parcialmente (V.4.1.1°), y la difusa bajo el ángulo $\vartheta = \pi/2$ está polarizada linealmente por completo (IV.4.1.7°): el vector E del campo de esta luz es perpendicular al plano que pasa por los rayos incidente y difuso.

3°. A medida que aumenta la dimensión r_0 de las heterogeneidades del medio turbio, varían las regularidades de difusión de la luz. Cuando $r_0 > \lambda$, la variación de J_{ϑ} en función de ϑ tiene una forma compleja, siendo la intensidad de difusión de la luz hacia adelante (en las direcciones $\vartheta < \pi/2$) mayor que hacia atrás. Este fenómeno se llama *efecto Mie*. La luz difusa bajo el ángulo $\vartheta = \pi/2$ sólo está polarizada parcialmente. La variación de la intensidad J de la luz difusa en función de la longitud de onda λ tiene la forma: $J \sim \lambda^{-p}$, donde $p < 4$ y disminuye al crecer r_0 . Si $r_0 \gg \lambda$, las composiciones espectrales de la luz difusa e incidente coinciden prácticamente. Esto explica, por ejemplo, el color blanco de las nubes.

4°. La difusión molecular de la luz en medios limpios, exentos de impurezas, está condicionada por las heterogeneidades que se producen durante el proceso del movimiento térmico desordenado de las partículas del medio. Estas heterogeneidades se deben a las fluctuaciones de la densidad (II.4.6.1°), y en los medios con moléculas anisótropas (polares), también a las fluctuaciones de la orientación de estas moléculas (fluctuaciones de la anisotropía). En las soluciones verdaderas, la difusión de la luz se puede producir en las fluctuaciones de la concentración. En las condiciones ordinarias, las dimensiones de las zonas del medio, correspondientes a las fluctuaciones algo importantes, son mucho menores que las longitudes de las ondas de la luz visible. Por esto, la variación de la intensidad de la luz difusa en función de la longitud de onda λ y del ángulo ϑ , así como el carácter de polarización de la luz en la difusión molecular, son análogos a las respectivas leyes para el efecto Tyndall. Pero, a diferencia de este último, la intensidad de difusión molecular de la luz también depende de la temperatura del medio y crece al elevarse ésta.

§ V.3.4. Dispersión normal y anómala de la luz

1°. Se denomina *dispersión de la luz* la variación de su velocidad de fase v en un medio, en función de su frecuencia ν . De acuerdo con IV.4.5.1°, $v = c/n$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, y n , el índice de refracción del medio. Pero como c es una constante universal, igual para las ondas electromagnéticas de cualquier frecuencia, la existencia de dispersión de la luz en un medio se debe a que su índice de refracción n

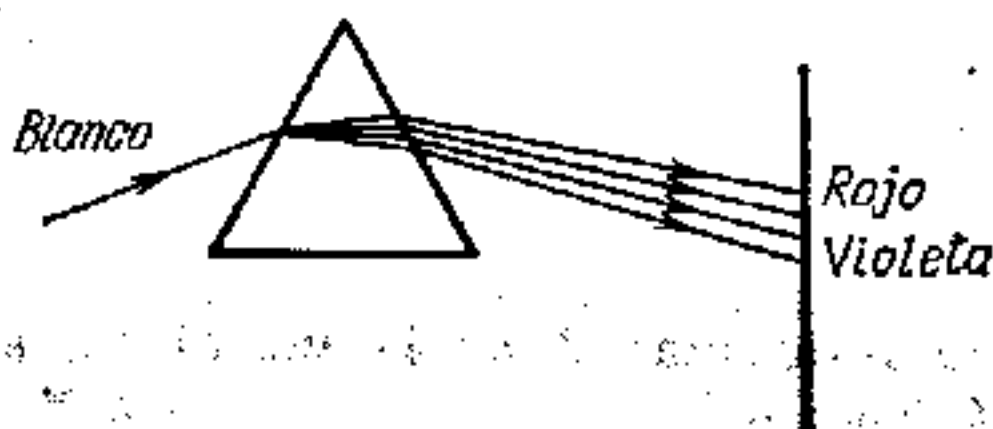


Fig. V.3.1.

depende de la frecuencia ν . Esta dependencia se manifiesta fácilmente, por ejemplo, cuando un haz de luz blanca pasa por un prisma de sustancia (medio) transparente. En una pantalla colocada detrás del prisma se observa una franja irisada (fig. V.3.1) llamada *espectro de dispersión*.

2°. La variación del índice de refracción del medio n en función de la frecuencia ν no es lineal ni monótona. Las regiones de los valores de ν , en las cuales $\frac{dn}{d\nu} > 0$, es decir, en que al crecer ν aumenta también n , corresponden a la *dispersión normal de la luz*. Tal dispersión se observa en las sustancias transparentes a la luz. Por ejemplo, el vidrio ordinario es transparente a la luz visible, y en esta región de frecuencias se observa la dispersión normal de la luz en el vidrio. En la fig. V.3.1 se muestra el caso de dispersión normal de la luz.

La dispersión de la luz se dice que es *anómala* si $\frac{dn}{d\nu} < 0$, o sea, si con el crecimiento de ν disminuye el índice de refracción del medio. La dispersión anómala se observa en las regiones de frecuencias correspondientes a las franjas de absorción intensa de la luz por un medio dado (V.3.2.1°). Por ejemplo, en

el vidrio ordinario estas bandas se encuentran en las partes infrarroja y ultravioleta del espectro.

3°. En dependencia del carácter de dispersión, la velocidad de grupo u de la luz en la sustancia puede ser tanto mayor cuanto menor es la velocidad de fase v . De acuerdo con IV.3.4.3°, entre la velocidad de grupo, la frecuencia cíclica ω de la onda y su número de onda k , existe la relación $u = d\omega/dk$. Y como

$\omega = 2\pi\nu$ y $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n\nu}{c}$, tenemos que

$$u = \frac{c}{n + \nu \frac{dn}{d\nu}} = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}}$$

En la dispersión normal, la velocidad de grupo es menor que la de fase ($u < v$). En el caso de dispersión anómala $u > v$ y, en particular, si $n + \nu \frac{dn}{d\nu} < 1$, $u > c$. Este resultado no contradice la afirmación de la teoría especial de la relatividad, que establece que la velocidad de transmisión de cualquier señal (incluso luminosa) no puede ser mayor que c (I.5.1.3°). El concepto de velocidad de grupo describe correctamente sólo la propagación de una señal cuya «forma», es decir, la distribución de la amplitud y de la energía por su «longitud» no varíe al trasladarse la señal por el medio. Pero en el caso de la luz, esta condición sólo se cumple aproximadamente y con tanta mayor exactitud, cuanto más estrecho es el espectro de frecuencias de la señal y cuanto menor es la dispersión en el medio. En las regiones de frecuencias correspondientes a la dispersión anómala, la velocidad de grupo no coincide con la velocidad de la señal, ya que, debido a la considerable dispersión de la luz, la «forma» de la señal varía rápidamente a medida que ésta se propaga por el medio.

§ V.3.5. Teoría electrónica clásica de la dispersión de la luz

1°. Los medios ópticamente transparentes no son magnéticos ($\mu \approx 1$), de manera que su índice de refracción (IV.4.5.1°)

$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 + \kappa_e}$, donde ϵ y κ_e son, respectivamente, la permitividad relativa y la susceptibilidad dieléctrica del medio (III.5.3.4°). Por esto, la dispersión de la luz se puede con-

siderar como consecuencia de la variación de ϵ y κ_e en función de la frecuencia ν del campo electromagnético alternativo de la luz, producido por la polarización electrónica (III.5.2.2°) del medio. Si cada átomo (o molécula) del medio tiene un electrón óptico (V.3.1.1°), el vector polarización del medio (III.5.2.3°) $\mathbf{P}_e = -en_0\mathbf{r}$, siendo $-e$ la carga del electrón; \mathbf{r} , su desplazamiento de la posición de equilibrio; y n_0 , la concentración de átomos (o moléculas) en el medio. Por otra parte (III.5.2.4°), $\mathbf{P}_e = \epsilon_0\kappa_e\mathbf{E}$, donde ϵ_0 es la constante dieléctrica (III.1.2.7°), y \mathbf{E} , la intensidad del campo eléctrico de la luz.

2°. El electrón óptico efectúa oscilaciones forzadas bajo la acción de las fuerzas siguientes:

a) la fuerza restitutoria cuasielástica (VII.1.3.5°) $\mathbf{F}_{\text{rest}} = -m\omega_0^2\mathbf{r}$, en la que m y ω_0 son, respectivamente, la masa del electrón y la frecuencia cíclica de sus oscilaciones libres no amortiguadas;

b) la fuerza de resistencia $\mathbf{F}_{\text{res}} = -2\beta m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, donde β es el coeficiente de amortiguación de las oscilaciones libres del electrón;

c) la fuerza impulsante $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ que ejerce sobre el electrón el campo alternativo de intensidad \mathbf{E} .

La ecuación de las oscilaciones forzadas es

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{m}.$$

En el caso de luz monocromática linealmente polarizada con frecuencia cíclica ω , la intensidad del campo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$, donde $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ es el vector amplitud. Si además, el medio no absorbe luz, $\beta = 0$ y las oscilaciones forzadas estables del electrón óptico se efectúan de acuerdo con la ley

$$\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

En este caso el vector polarización del medio,

$$\mathbf{P}_e = \frac{n_0 e^2 \mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{y} \quad \kappa_e = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

La variación del índice de refracción del medio en función de ω tiene la forma

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

3°. Cuando los valores de ω se aproximan a ω_0 , no se puede despreciar la absorción de la luz por el medio y considerar $\beta = 0$. En un medio absorbente (o sea, cuando $\beta \neq 0$), las oscilaciones del electrón óptico y del vector \mathbf{P}_e están desfasadas con relación a las oscilaciones de la intensidad del campo \mathbf{E} (IV.2.2.2°):

$$\mathbf{r} = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

donde

$$A = \frac{eE_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \text{y} \quad \text{tg } \varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Respectivamente,

$$\mathbf{P}_e = \frac{n_0 e^2 E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Para describir las propiedades del medio absorbente de la luz se introduce, además del índice de refracción complejo (V.3.2.2°) $\tilde{n} = n(1 - i\kappa)$, la susceptibilidad dieléctrica compleja $\tilde{\kappa}_e$ y la permitividad compleja $\tilde{\epsilon}$:

$$\tilde{\kappa}_e = \frac{\tilde{P}_e}{\epsilon_0 \tilde{E}} \quad \text{y} \quad \tilde{\epsilon} = 1 + \tilde{\kappa}_e, \quad \text{siendo} \quad \tilde{n}^2 = 1 + \tilde{\kappa}_e.$$

Aquí \tilde{P}_e y \tilde{E} son, respectivamente, los valores complejos de la polarización y de la intensidad del campo:

$$\tilde{P}_e = \frac{n_0 e^2 E_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \text{y} \quad \tilde{E} = E_0 e^{i\omega t},$$

de manera que

$$\tilde{n}^2 = n^2 (1 - i\kappa)^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{i\varphi_0},$$

$$n^2 (1 - \kappa^2) = 1 + \frac{n_0 e^2 \cos \varphi_0}{\epsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} =$$

$$= 1 + \frac{n_0 e^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{\epsilon_0 m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]},$$

$$2n^2\kappa = \frac{n_0 e^2 \text{sen } \varphi_0}{\epsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{2n_0 e^2 \beta \omega}{\epsilon_0 m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

4°. En la teoría electrónica clásica de la dispersión de la luz en los gases, cada molécula de éstos se considera como un sistema de q osciladores lineales. Si ω_{0j} y β_j son, respectivamente, la frecuencia cíclica propia y el coeficiente de amortiguación del j -ésimo oscilador, entonces

$$n^2(1 - \kappa^2) = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \sum_{j=1}^q \frac{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_j^2 \omega^2}$$

y

$$n^2 \kappa = \frac{n_0 e^2 \omega}{\epsilon_0 m} \sum_{j=1}^q \frac{\beta_j f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_j^2 \omega^2}.$$

El factor adimensional f_j caracteriza la aportación del j -ésimo oscilador a la dispersión y absorción de la luz y se deno-

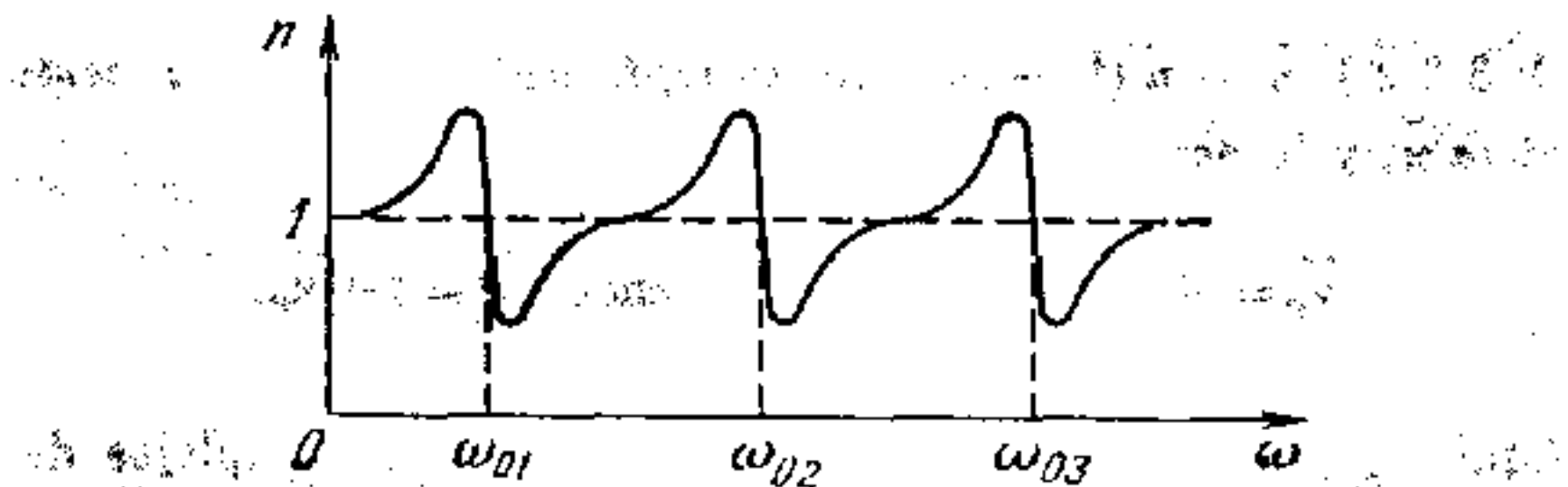


Fig. V.3.2.

mina fuerza del oscilador. En la teoría clásica de dispersión, los valores de ω_{0j} y f_j se consideran conocidos por determinación experimental.

En los gases $\kappa \ll 1$, y n difiere poco de 1, de modo que $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1) \approx 2(n - 1)$. Por esto, la variación de n en función de ω tiene la forma

$$n = 1 + \frac{n_0 e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_{j=1}^q \frac{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_j^2 \omega^2}.$$

La gráfica de esta variación se da en la fig. V.3.2.

En las proximidades de cada una de las frecuencias ω_{0j} se observa la dispersión anómala.

§ V.3.6. Radiación de Vavílov—Cherenkov

1°. Se llama *radiación* (o *efecto*) *Vavílov—Cherenkov* la emisión de luz, distinta de la luminiscencia (VI.2.5.B.1°), que se produce cuando las partículas con carga se mueven en un medio con velocidades V mayores que la velocidad de fase v de la luz en este medio. La condición de existencia de esta radiación

es $\frac{c}{n} < V < c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, y

$n > 1$ es el índice de refracción de la substancia.

Durante el proceso de radiación de Vavílov—Cherenkov, la energía y la velocidad de la partícula libre emisora disminuyen, es decir, esa partícula se retarda. Pero a diferencia de la radiación de frenado ordinaria de las partículas con carga que se mueven lentamente (IV.4.3.4°) y que se debe a la *variación de su velocidad*, la disminución de la velocidad de las partículas en la radiación de Vavílov—Cherenkov es consecuencia de dicha radiación. En otras palabras, si la pérdida de energía de la partícula en la radiación de Vavílov—Cherenkov se consiguiera reponer por algún procedimiento, y la partícula se moviera en la substancia con velocidad «superlumínica» constante ($V > v$), la radiación de Vavílov—Cherenkov se seguiría observando, mientras que la radiación de frenado no existiría en este caso.

2°. La partícula con carga ocasiona una efímera polarización de la substancia (III.5.2.2°) en las proximidades de los puntos por donde pasa durante su movimiento. Por esto, las moléculas del medio que se encuentran en la trayectoria de la partícula se convierten por poco tiempo en fuentes coherentes (IV.3.5.1°) activas de ondas electromagnéticas elementales que interfieren al superponerse.

Si $V < v = c/n$, las ondas elementales se amortiguan entre sí. Supongamos que una partícula con carga se mueve con velocidad V ($V < v$) a lo largo del eje OX (fig. V.3.3) y que en los instantes t y $t + \Delta t$ se halla, respectivamente, en los puntos A y B , la distancia entre los cuales constituye $l = V\Delta t$. La diferencia de marcha de las ondas elementales radiadas desde los puntos A y B en una dirección cualquiera n que forme un ángulo α con el vector V , será

$$\Delta = DF = (v - V \cos \alpha) \Delta t = l \left(\frac{v}{V} - \cos \alpha \right).$$

Para cada valor λ de la longitud de onda de radiación se puede hallar un valor de $l = l_{\alpha\lambda}$ tal, que con él sea $\Delta = \lambda/2$, de manera que las ondas elementales se amortiguan entre sí:

$$l_{\alpha\lambda} = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{v}{V} - \cos \alpha \right)}$$

Cuando $l = l_{\alpha\lambda}$ la radiación, en dirección n , desde cualquier punto M del segmento AB de la trayectoria de la partícula con carga, se amortigua al interferir con la radiación emitida en esta misma dirección desde el punto homólogo a él N del tramo

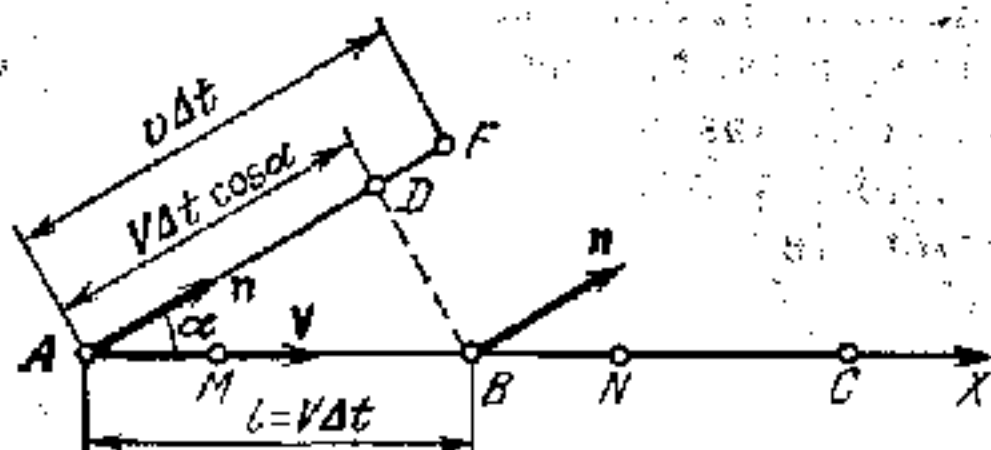


Fig. V.3.3.

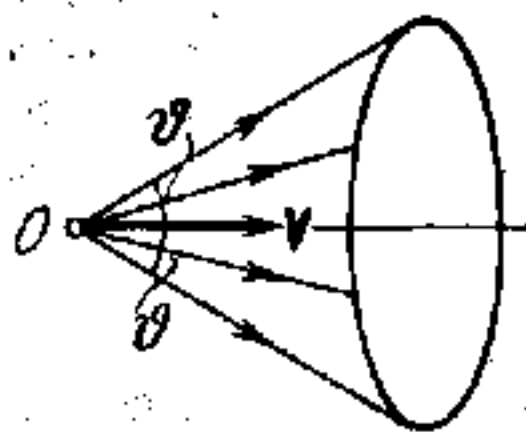


Fig. V.3.4.

contiguo $BC = AB = l_{\alpha\lambda}$ que se encuentra de M a la distancia $MN = l_{\alpha\lambda}$. Por esto, si el movimiento de la partícula en la substancia es rectilíneo y uniforme con velocidad «infralumínica», la partícula no emitirá.

3°. Si la partícula se mueve en la substancia con velocidad «superlumínica» $V > v = c/n$, el valor de $l_{\alpha\lambda}$ que satisface la condición de amortiguamiento de las ondas elementales,

$$l_{\alpha\lambda} = \frac{\lambda}{2 \left| \frac{v}{V} - \cos \alpha \right|}$$

se puede hallar para todos los valores del ángulo α , excepto para el valor

$$\vartheta = \arccos \frac{v}{V} = \arccos \frac{c}{nV}$$

Para la dirección $\alpha = \vartheta$, la diferencia de marcha de las ondas elementales emitidas por dos puntos cualesquiera A y B de la trayectoria de la partícula con carga (fig. V.3.3) es nula:

$$\Delta = DF = (v - V \cos \vartheta) \Delta t = 0.$$

Por consiguiente, las ondas elementales que se propagan en dirección $\alpha = \theta$, se refuerzan entre sí al interferir, originando una radiación resultante en esta dirección, la radiación de Vavílov—Cherenkov. La luz que aparece en cada trozo pequeño de la trayectoria de la partícula con carga, se propaga a lo largo de las generatrices de un cono con vértice O (fig. V.3.4) en dicho trozo, eje coincidente con la trayectoria de la partícula y generatrices que forman con el eje un ángulo $\theta = \arccos(c/nV)$. La luz está polarizada de tal forma que el vector E está dirigido según la normal a la superficie del cono, y el vector H , según la tangente a él.

Capítulo V.4. Polarización de la luz

§ V.4.1. Polarización de la luz al reflejarse y refractarse en el límite de separación de dos medios dieléctricos

1°. La luz emitida por fuentes ordinarias (no de láser) es un conjunto de numerosos trenes de ondas planas polarizadas (V.1.1.3°), cuyos vectores eléctricos E oscilan a lo largo de todas las posibles direcciones perpendiculares al rayo (IV.3.2.1°). La luz se llama *natural* o *no polarizada* si en ella no predomina ninguna de las direcciones indicadas de las oscilaciones. En la luz natural, la intensidad resultante E efectúa en cada punto del campo oscilaciones cuya dirección varía rápida y desordenadamente en el plano perpendicular al rayo.

Se dice que la luz está *parcialmente polarizada* si en ella existe una dirección predominante de las oscilaciones del vector E . La luz parcialmente polarizada se puede considerar como un conjunto («mezcla») de luz natural y luz linealmente polarizada (IV.4.1.7°) que se propagan simultáneamente en una misma dirección.

2°. Se llama *polarización de la luz* la separación de la luz linealmente polarizada de la luz natural o polarizada parcialmente. Para este fin se utilizan dispositivos especiales llamados *polarizadores*. Su acción se basa en la polarización de la luz al reflejarse y refractarse en el límite de separación de dos medios dieléctricos o en los fenómenos de birrefringencia (V.4.2.1°)

y de dichroísmo (V.4.2.10°). Estos mismos dispositivos se pueden utilizar como *analizadores*, es decir, para determinar el carácter y el grado de polarización de la luz.

Supongamos que en un analizador incide, perpendicularmente al plano de la fig. V.4.1, una luz linealmente polarizada, cuyo vector eléctrico E_p está dirigido a lo largo de la línea

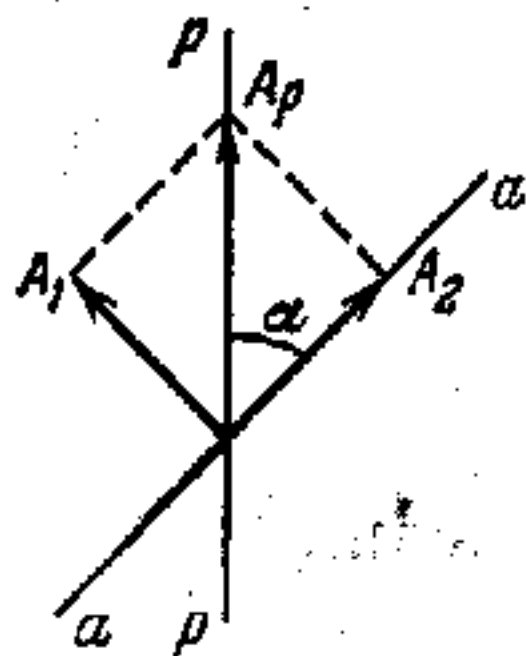


Fig. V.4.1.

$p - p$ y oscila con una amplitud A_p . Supongamos también que el vector E_a de luz que pasa por el analizador está dirigido a lo largo de la recta $a - a$ que forma con la $p - p$ un ángulo α . La luz incidente se puede representar en forma de dos ondas linealmente polarizadas en planos perpendiculares entre sí (IV.4.1.8°). La onda cuyo vector eléctrico E_1 oscila a lo largo de la dirección perpendicular a $a - a$ con amplitud $A_1 = A_p \sin \alpha$, no puede pasar por el analizador. En cambio, la segunda onda, cuyo vector eléctrico E_2 oscila a lo largo de la dirección $a - a$ con amplitud $A_2 = A_p \cos \alpha$,

pasa totalmente por el analizador. Por consiguiente, la amplitud de la luz que sale del analizador constituye

$$A_a = A_2 = A_p \cos \alpha.$$

Respectivamente, las intensidades J_a y J_p de la luz polarizada linealmente que pasa por el analizador, y de la luz que incide en él, están relacionadas entre sí por la *ley de Malus*:

$$J_a = J_p \cos^2 \alpha.$$

Se llama *plano principal del polarizador* (o *analizador*) el plano de polarización (o plano de oscilaciones según la terminología antigua (IV.4.1.7°)) de la luz que pasa por el polarizador (o analizador).

3°. Cuando se estudian las leyes de polarización de la luz como resultado de la reflexión y refracción de la luz natural, conviene considerar esta última como un conjunto de ondas linealmente polarizadas, iguales por su intensidad, de dos tipos: ondas s y ondas p (IV.4.5.4°). El coeficiente de reflexión (IV.4.5.6°) de las ondas s (R_s) es siempre mayor que el de las ondas p (R_p). Por esto, a diferencia de la luz incidente natural, la luz reflejada y la luz transmitida están parcialmente polarizadas. En la luz reflejada predominan las oscilaciones del vector E de intensidad del campo eléctrico de tipo s (perpendi-

cular al plano de incidencia), y en la transmitida, las oscilaciones de tipo p (en el plano de incidencia).

Ley de Brewster: la luz reflejada está totalmente polarizada linealmente cuando el ángulo de incidencia $i = i_{Br}$ satisface la condición $\text{tg } i_{Br} = n_{21}$, donde n_{21} es el índice de refracción relativo del medio que refleja la luz.

El ángulo i_{Br} se llama *ángulo de Brewster*. Cuando $i = i_{Br}$, el rayo reflejado y el refractado son perpendiculares entre sí, y el coeficiente de reflexión de la onda p es $R_p = 0$ (IV.4.5.6°). Por esto se reflejan solamente las ondas de tipo s . Pero su coeficiente de reflexión es mucho menor que 1 (cerca de 0,15 para el vidrio). Por lo tanto, la luz transmitida sólo está polarizada parcialmente.

4°. El grado de polarización de la luz transmitida se puede elevar someténdola a una serie de reflexiones y refracciones sucesivas. Esto se consigue con una pila compuesta por varias láminas (iguales y paralelas entre sí) de un dieléctrico transparente (por ejemplo, de vidrio), colocadas de manera que formen con el haz de luz incidente un ángulo de Brewster. Si el número de láminas de la pila es suficientemente grande, la luz que pasa a través de ella resultará linealmente polarizada (tipo p). En ausencia de absorción de luz en la pila, las intensidades J_s y J_p de la luz linealmente polarizada reflejada y transmitida son iguales entre sí y equivalen a la mitad de la intensidad J_0 de la luz natural incidente:

$$J_s = J_p = \frac{1}{2} J_0.$$

5°. De acuerdo con las representaciones de la teoría electrónica clásica, la formación de la onda reflejada se debe a las ondas secundarias que emiten las moléculas — osciladores del medio que refleja la luz (V.3.1.3°). A la onda de tipo s corresponden los osciladores (dipolos eléctricos oscilantes) cuyos ejes son perpendiculares al plano de incidencia. Estos osciladores se indican en la fig. V.4.2 por medio de puntos marcados sobre el rayo refractado. Del diagrama polar de directividad de radiación del dipolo (fig. IV.4.4) se deduce que estos osciladores deben radiar intensamente en todas las direcciones que se encuentran

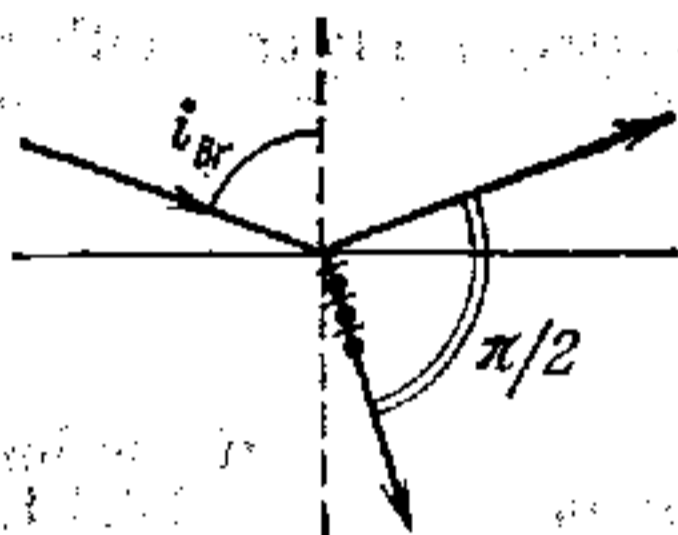


Fig. V.4.2.

en el plano de incidencia, es decir, participar tanto en la formación de la onda s reflejada, como en la refractada.

A la onda de tipo p le corresponden los osciladores cuyos ejes se encuentran en el plano de incidencia y que son perpendiculares al rayo refractado (en la fig. V.4.2 se muestran en forma de rayitas transversales). Los osciladores no emiten a lo largo de su eje (fig. IV. 4.4), y cuando $i = i_{B_r}$, el rayo reflejado es perpendicular al refractado y, por consiguiente, paralelo a los ejes de dichos osciladores. Por esto, si $i = i_{B_r}$, los osciladores indicados no emiten en la dirección del rayo reflejado y no hacen aportación a la onda reflejada. Por lo tanto, la luz reflejada está totalmente polarizada linealmente (onda de tipo s).

§ V.4.2. Doble refracción

1°. La mayoría de los cristales son ópticamente anisótropos (no isótropos, IV.3.1.6°). Su permitividad relativa y su índice de refracción dependen de la dirección del vector eléctrico E de la onda luminosa. En los cristales ópticamente anisótropos se observa el fenómeno de *doble refracción* o *birrefringencia*, que consiste en que el rayo de luz que incide sobre la superficie del cristal se desdobra en él en dos rayos refractados. En la fig. V.4.3 se muestra la doble refracción de la luz en un cristal de espato de Islandia (CaCO_3).

2°. Se denomina *eje óptico de un cristal* la dirección a lo largo de la cual se propaga la luz en el cristal anisótropo sin experimentar doble refracción. Conviene subrayar que el eje óptico del cristal no es ninguna recta particular de éste, semejante, por ejemplo, al eje de simetría de un cuerpo. El eje óptico sólo caracteriza una dirección privilegiada del cristal y se puede trazar por cualquier punto del mismo.

Los cristales ópticamente anisótropos, atendiendo a su tipo de simetría, pueden ser *uniáxicos* o *biáxicos*, es decir, pueden tener uno o dos ejes ópticos. Un ejemplo de cristal uniáxico es el espato de Islandia, cuyo eje óptico coincide (en dirección) con su diagonal M_0N_0 (fig. 4.3).

Recibe el nombre de *plano principal* o *sección principal* de un cristal uniáxico para un rayo cualquiera, el plano que pasa por este rayo y corta su eje óptico.

3°. En el cristal uniáxico, uno de los rayos que se forman en la doble refracción se subordina a las leyes ordinarias de la refracción de la luz (IV.4.5.3°). El mismo se encuentra en

el plano de incidencia y satisface la ley de Snellius (o Snell). Por esto se llama *rayo ordinario* y se designa con la letra *o*. El segundo rayo se designa con la letra *e* y se llama *rayo extraordinario*, porque no se encuentra en el plano de incidencia ni cumple la ley de Snellius. Por ejemplo, incluso en el caso de incidencia normal de la luz sobre la superficie de una lámina cortada de un cristal uniáxico, el rayo extraordinario se refracta (fig. V.4.4).

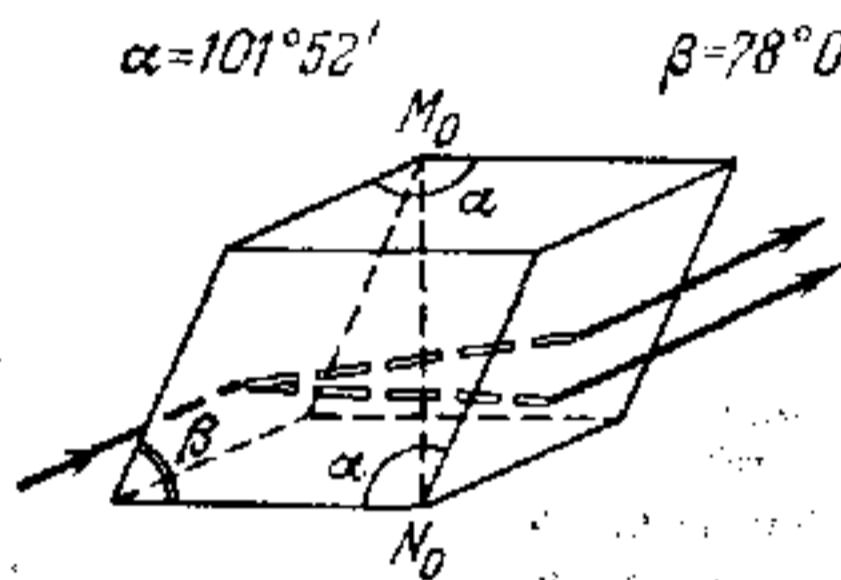


Fig. V.4.3.

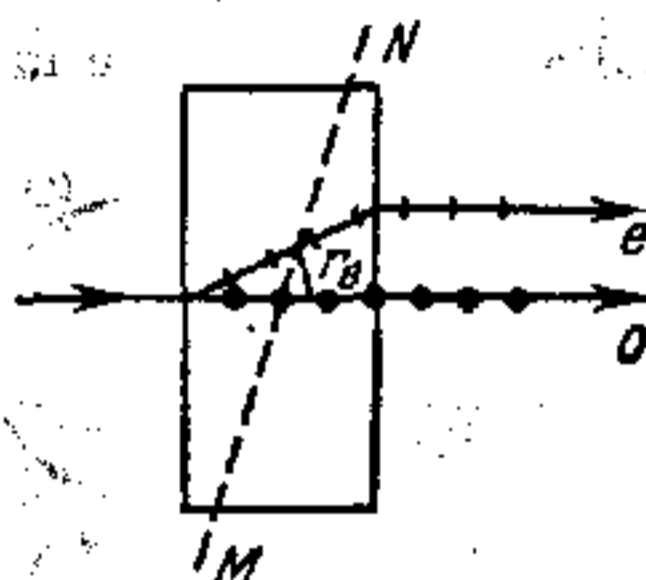


Fig. V.4.4.

Su ángulo de refracción r_e depende de cómo está orientada la superficie de la lámina con respecto al eje óptico del cristal. Este ángulo es igual a cero únicamente en dos casos: a) si la superficie de la lámina es perpendicular al eje óptico (la luz se propaga en la lámina a lo largo del eje óptico sin experimentar doble refracción), y b) si la superficie de la lámina es paralela al eje óptico (la luz se propaga en la lámina perpendicularmente al eje óptico).

En un cristal biáxico ambos rayos refractados se comportan como extraordinarios.

4°. La doble refracción pone de manifiesto que la onda luminosa que incide sobre el cristal ópticamente anisótropo excita dos ondas que, en general, se propagan en el cristal en distintas direcciones. En un cristal uniáxico, estas ondas se llaman *ordinaria* y *extraordinaria*. Los rayos ordinario y extraordinario indican las direcciones de los vectores de Úmov—Poynting (IV.4.2.3°) de las correspondientes ondas en el cristal, es decir, las direcciones del transporte de energía por estas ondas.

Las ondas ordinaria y extraordinaria están polarizadas linealmente (IV.4.1.7°)*. En la onda ordinaria, el vector *E* está

* Suele hablarse de polarización lineal de los rayos ordinario y extraordinario entendiéndose por esto la polarización de sus ondas respectivas.

dirigido perpendicularmente al plano principal del cristal para el rayo ordinario. El vector eléctrico E de la onda extraordinaria se encuentra en el plano principal del cristal para el rayo extraordinario. Las direcciones de los vectores E en las ondas ordinaria y extraordinaria se indican convencionalmente en la fig. V.4.4 por medio de puntos en el rayo ordinario, y de rayitas transversales en el rayo extraordinario (se supone que ambos rayos y el eje óptico MN del cristal, que las corta, se hallan en el plano de la figura).

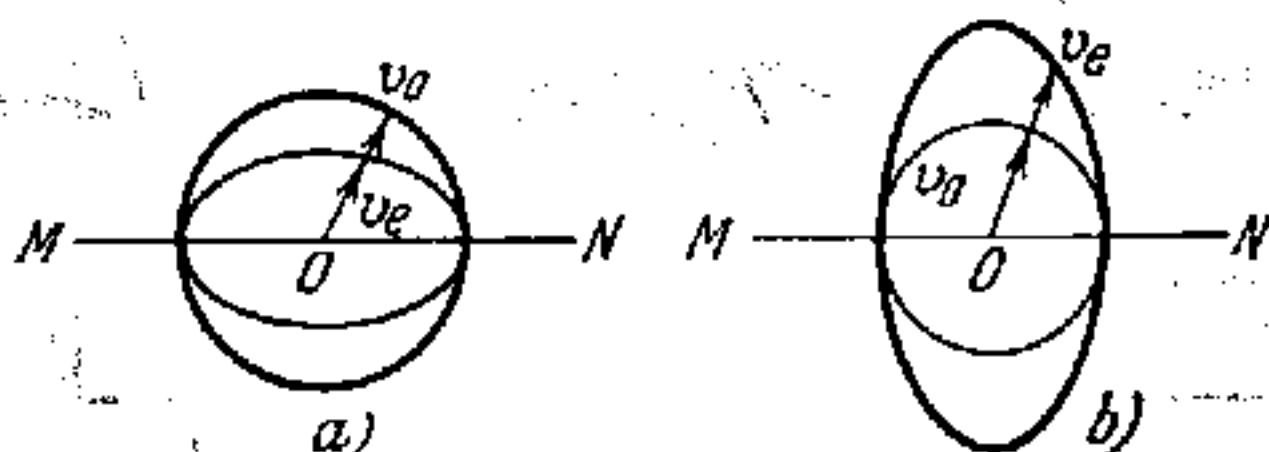


Fig. V.4.5.

5°. Se llama *velocidad radial de la onda* o *velocidad del rayo* en un cristal ópticamente anisótropo, la velocidad v de transporte de energía por la onda. En un cristal uniaxial, la *velocidad del rayo ordinario* v_o es numéricamente igual en todas las direcciones: $v_o = c/n_o$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, y $n_o = \text{const}$ es el *índice de refracción del cristal para el rayo ordinario*. Respectivamente, la *velocidad del rayo extraordinario* v_e es igual numéricamente a $v_e = c/n_e$, siendo n_e el *índice de refracción del cristal para el rayo extraordinario*. Los valores de n_e y v_e dependen de la dirección del rayo extraordinario con respecto al eje óptico del cristal. Para un rayo que se propague a lo largo del eje óptico, $n_e = n_o$ y $v_e = v_o$. La diferencia mayor entre el valor de n_e y el de n_o corresponde a la dirección perpendicular al eje óptico: $n_e = n_{e0}$.

6°. Se da el nombre de *superficie radial de onda en un cristal*, al lugar geométrico de los extremos de los vectores v de velocidad radial de la onda, trazados desde cierto punto O del cristal en todas las direcciones posibles. En un cristal uniaxial, la superficie radial de la onda ordinaria tiene forma de esfera, y la de la onda extraordinaria, de elipsoide de revolución alrededor del eje óptico MN trazado por el punto O . El elipsoide y la esfera son tangentes entre sí en los puntos de intersección con el eje óptico MN . Si $n_e \geq n_o$, el elipsoide estará inscrito en la esfera (fig. V.4.5, a), y si $n_e \leq n_o$, el elipsoide estará circunscrito a la

esfera (fig. V.4.5, b). En el primer caso el cristal se dice que es *ópticamente positivo*; en el segundo, que es *ópticamente negativo*.

7°. Para explicar la doble refracción en un cristal uniáxico y hallar las direcciones de los rayos ordinario y extraordinario, se puede utilizar el método gráfico de Huygens. Supongamos que sobre la superficie plana ab de un cristal uniáxico ópticamente negativo (o de una lámina cortada de él) incide, formando el ángulo i , una onda luminosa plana no polarizada (fig. V.4.6). El eje óptico del cristal, MN , trazado por el punto A de la superficie ab , se encuentra en el plano de la figura y forma con ab el ángulo γ . En el instante t que consideramos, el frente AD de la onda incidente ha llegado al punto A de la superficie del cristal, el cual se transforma en fuente de dos ondas elementales, polarizadas linealmente, la ordinaria y la extraordinaria. En el instante $t + \Delta t$, donde Δt es el tiempo que tarda la luz incidente en recorrer la distancia DK , la excitación que se propaga desde el punto A en forma de onda elemental ordinaria, llega a los puntos de la superficie de una esfera de radio $v_o \Delta t$ con centro en A . La excitación que se propaga desde el punto A en forma de onda elemental extraordinaria, llega en este mismo tiempo a los puntos de la superficie de un elipsoide tangente a la esfera de radio $v_o \Delta t$ en el punto L de intersección de ésta con el eje óptico MN . Este elipsoide es semejante geoméricamente a la superficie radial de la onda extraordinaria en el cristal (p. 5°).

Los planos KC_o y KC_e , perpendiculares al plano de la figura y tangentes, respectivamente, a la esfera y al elipsoide, indican, de acuerdo con el principio de Huygens (V.2.1.1°), las posiciones que ocupan en el instante $t + \Delta t$ las ondas ordinaria y extraordinaria que se propagan realmente en el cristal uniáxico. Las rectas trazadas desde el punto A a los puntos de tangencia B y F , señalan las direcciones de los rayos ordinario y extraordinario. Ambos rayos se encuentran en el plano de incidencia, pero el rayo extraordinario no es ortogonal a la superficie de onda KC_e . Las ondas ordinaria y extraordinaria están polarizadas linealmente en planos perpendiculares entre sí. Las direcciones de

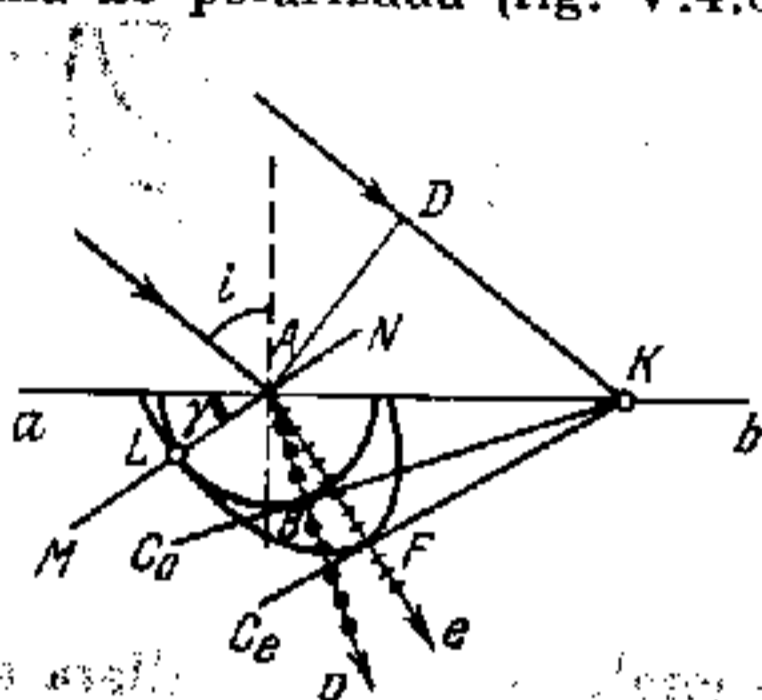


Fig. V.4.6.

los vectores eléctricos E_o y E_e de las ondas ordinaria y extraordinaria se indican en la fig. V.4.6 por medio de rayitas y puntos marcados sobre los respectivos rayos.

Observación. Si el eje óptico MN del cristal no se encuentra en el plano de incidencia de la luz, el rayo extraordinario, en

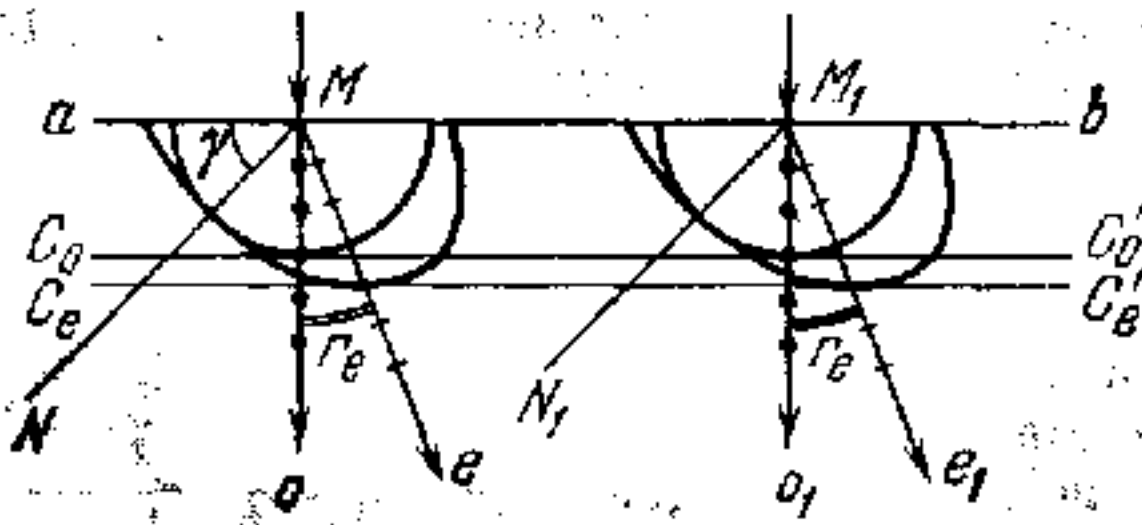


Fig. V.4.7.

general, tampoco se hallará en dicho plano. Respectivamente, el ángulo entre los planos de polarización de las ondas ordinaria y extraordinaria diferirá ligeramente del recto.

8°. La construcción de los rayos ordinario y extraordinario en caso de que la luz incida normalmente sobre la superficie del cristal uniaxial ópticamente negativo, se da en la fig. V.4.7. Aquí ab es la posición del frente de la onda incidente en el instante t ; $C_o C'_o$ y $C_e C'_e$ son las posiciones que ocupan en el instante $t + \Delta t$ los frentes de las ondas ordinaria y extraordinaria en el cristal.

Se supone que el eje óptico MN se encuentra en el plano de incidencia y forma con la superficie refractora ab un ángulo γ distinto de 0 y de $\pi/2$. En la fig. V.4.7 se ve que el rayo ordinario es continuación del incidente, mientras que el extraordinario se refracta formando el ángulo $r_e \neq 0$.

En la fig. V.4.8 se analiza el caso en que la luz incide normalmente sobre la superficie plana ab de un cristal uniaxial ópticamente negativo, cuyo eje óptico MN es paralelo a ab . El plano de la figura se ha elegido de forma que el eje óptico MN se encuentre en él. En este caso, como puede observarse en la figura, el rayo extraordinario no se refracta en la superficie ab , y su dirección coincide con la de los rayos ordinario e incidente. Pero las velocidades de los rayos ordinario y extraordinario son distintas en esta dirección y respectivamente iguales (V.4.2.5°) a: $v_o = c/n_o$ y $v_e = c/n_{e0}$. Por esto, cuando ambos

rayos (ondas) recorren en el cristal una misma distancia d , entre ellos existe la diferencia de marcha óptica (V.1.3.2°)

$$\Delta s = d (n_o - n_{e0}).$$

9°. En la fig. V.4.9 se muestra la marcha de los rayos en un *prisma polarizador* hecho de cristal de espato de Islandia y cortado de tal forma que sus caras AB y CD son paralelas al eje óptico MN . El prisma está cortado, a su vez, diagonalmente

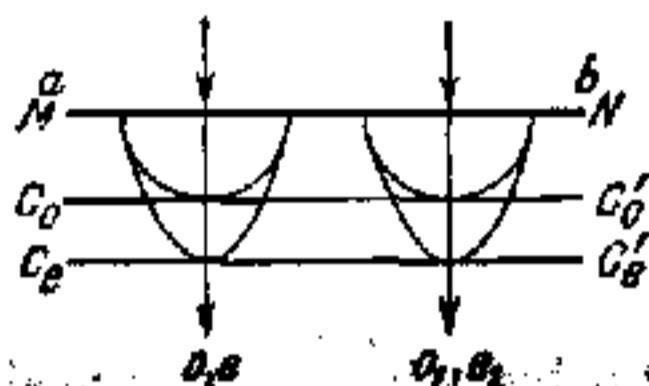


Fig. V.4.8.

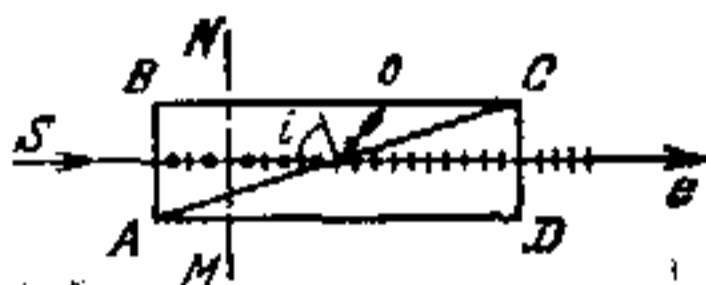


Fig. V.4.9.

por el plano AC y pegado por esta superficie con una capa delgada de una sustancia transparente, ópticamente isótropa, llamada bálamo del Canadá. El cristal de espato de Islandia es uniaxial y ópticamente negativo; los valores de sus índices de refracción (p. 5°) son $n_o = 1,658$ y $n_{e0} = 1,486$. El índice de refracción del bálamo del Canadá $n_{b.c.} = 1,550$, es decir, el bálamo es un medio ópticamente menos denso que el material del prisma para el rayo ordinario, y un medio ópticamente más denso para el rayo extraordinario. La luz incide en el prisma normalmente a su cara AB (rayo S de la fig. V.4.9). Los rayos ordinario y extraordinario se propagan en el prisma sin refractarse hasta llegar a la capa de bálamo del Canadá AC . Las dimensiones del prisma se eligen de tal modo que el ángulo de incidencia i del rayo ordinario sobre la superficie AC sea mayor que el ángulo límite de reflexión interna total (IV.4.5.8°). Por esto, la onda ordinaria se refleja totalmente en la capa de bálamo (rayo o en la fig. V.4.9). La onda extraordinaria pasa libremente a través del bálamo y de la segunda mitad del prisma de polarización. De este modo, el prisma de polarización se puede utilizar como polarizador (V.4.1.2°).

10°. Todos los cristales birrefringentes absorben luz en mayor o menor grado. Esta absorción es anisótropa: el índice

de absorción (V.3.2.1°) depende de la orientación del vector eléctrico de la onda luminosa y de la dirección en que se propaga la luz en el cristal, así como de la longitud de onda. Este fenómeno se llama *dicroísmo* o *pleocroísmo*, porque se manifiesta en que los cristales presentan diversas coloraciones en distintas direcciones. Un ejemplo de cristal fuertemente dicroico es la turmalina, cristal uniáxico que absorbe mucho más intensamente el rayo ordinario que el extraordinario. El dicroísmo se manifiesta más claramente todavía en los cristales de heptapatita, que se emplean para hacer las películas delgadas que transforman la luz natural en luz linealmente polarizada, llamadas *polaroides*.

§ V.4.3. Interferencia de la luz polarizada

1°. Los trenes de ondas, con todas las orientaciones posibles respecto al rayo de sus planos de polarización, que componen la luz natural, no son coherentes, ya que corresponden a la radiación de distintos átomos *independientes* de la fuente de luz. Todos estos trenes participan en la formación de ondas ordinarias y extraordinarias que se propagan en el cristal uniáxico cuando incide sobre él la luz natural. Pero la aportación de cada tren por separado a estas dos ondas, en general, no es la misma. Es mayor a la onda cuyo plano de polarización forma un ángulo α menor con el plano de polarización del tren. En otras palabras, las ondas ordinaria y extraordinaria son engendradas, en lo fundamental, por *distintos* trenes componentes de la luz natural. Por consiguiente, las ondas ordinaria y extraordinaria que se propagan en un cristal uniáxico cuando incide sobre él una luz natural, no son coherentes.

2°. Las ondas ordinaria y extraordinaria que se propagan en un cristal uniáxico cuando incide sobre él una luz polarizada linealmente (obtenida de la natural, por ejemplo, valiéndose de un prisma de polarización (V.4.2.9°) o de cualquier otro polarizador), son coherentes entre sí. Esto se debe a que en todos los trenes de ondas que entran en la composición de la luz incidente, los planos de polarización tienen la misma orientación.

Supongamos que un haz de luz paralelo, que ha pasado por el polarizador Π (fig. V.4.10), incide normalmente en la superficie ab de la lámina plana paralela B cortada de un cristal uniáxico paralelamente a su eje óptico MN (el eje MN es paralelo al plano ab). En la fig. V.4.11 se muestra el vector A_i de

amplitud del i -ésimo tren de ondas, que se ha tomado a lo largo de la recta $p - p$, correspondiente a la dirección de las oscilaciones del vector eléctrico en la luz que sale del polarizador. Las aportaciones del i -ésimo tren a las ondas ordinaria y extraordinaria se caracterizan por las amplitudes $A_{io} = A_i \sin \alpha$ y $A_{ie} = A_i \cos \alpha$, cuya relación $(A_{io}/A_{ie}) = \operatorname{tg} \alpha$ es igual para todos los trenes. En particular, si $\alpha = \pi/4$, entonces $A_{io} = A_{ie}$, de manera que los trenes coherentes dos a dos, polarizados en planos perpendiculares entre sí, tienen la misma intensidad.

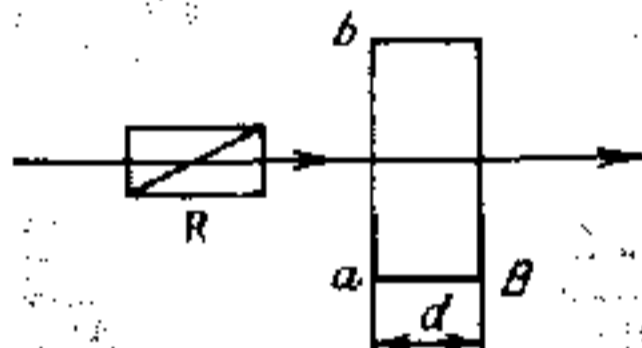


Fig. V.4.11.

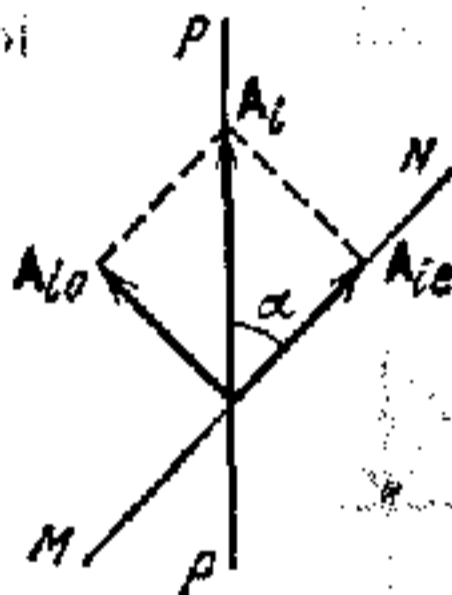


Fig. V.4.10.

3°. A la entrada de la lámina de cristal B (p. 2°), los vectores eléctricos E_o y E_e de las ondas ordinaria y extraordinaria oscilan en fase y su suma geométrica es igual al vector eléctrico E_p de la luz incidente monocromática linealmente polarizada: $E_p = E_o + E_e$. En la lámina, las ondas ordinaria y extraordinaria se propagan con velocidades distintas (V.4.2.8°). Por esto, al salir de ella, cuyo grosor es d , los vectores eléctricos perpendiculares entre sí, E'_o y E'_e , de las ordinaria y extraordinaria, oscilan con una diferencia de fase

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda_0} = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_o - n_{eo}),$$

donde Δs es la diferencia de marcha óptica de estas ondas (V.4.2.8°), y λ_0 , la longitud de onda de la luz en el vacío. Por consiguiente, como resultado de su paso a través de la lámina, la luz queda, en el caso general, elípticamente polarizada (IV.4.1.7°): el extremo del vector $E' = E'_o + E'_e$ describe una elipse que se encuentra en un plano perpendicular al rayo. Si α es el ángulo entre la dirección de las oscilaciones del vector

E_p y el eje óptico MN de la lámina, las amplitudes A_o y A_e de los vectores E_o y E_e son $A_o = A_p \sin \alpha$ y $A_e = A_p \cos \alpha$, donde A_p es la amplitud del vector E_p . En ausencia de absorción de luz en la lámina, las amplitudes de los vectores E'_o y E'_e también son iguales a A_o y A_e .

4°. En dependencia del espesor d de la lámina, pueden ocurrir varios casos particulares.

a) *La lámina cuarto de onda*, cuyo grosor satisface la relación $d(n_o - n_{e0}) = \pm \left(m + \frac{1}{4}\right) \lambda_0$, en la que $m = 0, 1, 2, \dots$; el signo más corresponde al cristal ópticamente negativo, y

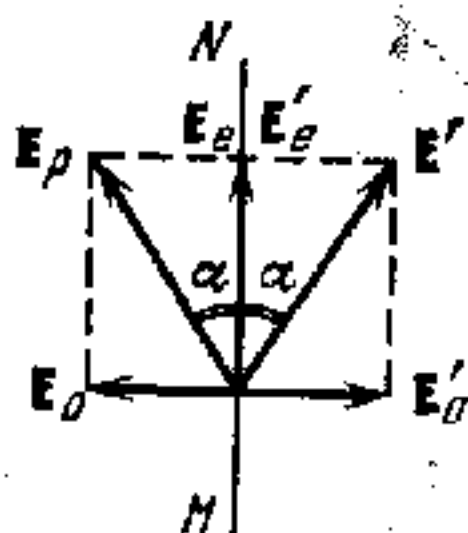


Fig. V.4.12.

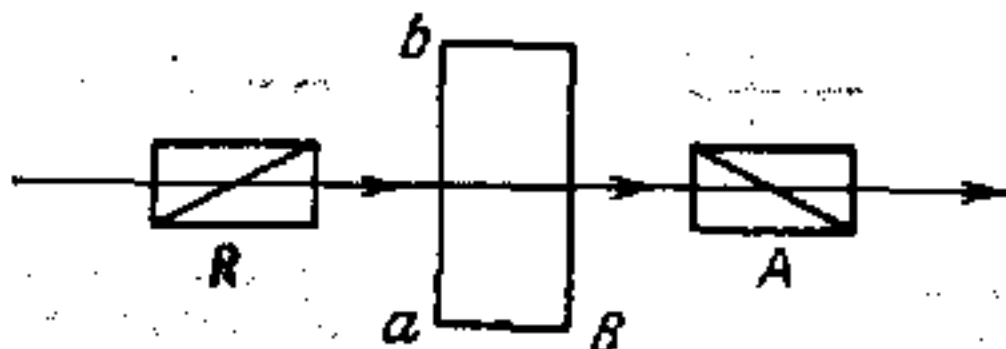


Fig. V.4.13.

el signo menos, al ópticamente positivo (V.4.2.6°). Al salir de esta lámina, la diferencia de fase entre las oscilaciones de los vectores E'_o y E'_e es $\pi/2$. Si además, $\alpha = \pi/4$, la luz que emerge de la lámina estará polarizada circularmente (IV.4.1.7°).

b) *La lámina semionda*: $d(n_o - n_{e0}) = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0$. Al salir de esta lámina, el desfase de las oscilaciones de los vectores E'_o y E'_e es igual a π . La luz que emerge de la lámina sigue estando polarizada linealmente. Pero las direcciones en que oscilan los vectores E_p y E' de la luz incidente y de la transmitida son simétricos con respecto al plano principal de la lámina (fig. V.4.12).

c) *La lámina onda*: $d(n_o - n_{e0}) = \pm m \lambda_0$. Como resultado de su paso a través de la lámina, la luz sigue estando polarizada linealmente en el mismo plano que la incidente.

5°. Las ondas coherentes que salen de la lámina de cristal B (fig. V.4.10) no pueden interferir porque están polarizadas en

planos perpendiculares entre sí. Por esto, detrás de la lámina B se coloca otro prisma de polarización, el analizador A (fig. V.4.13). Este analizador separa de las ondas coherentes que inciden en él, las componentes polarizadas en el mismo plano y, de este modo, crea las condiciones necesarias para que se efectúe la interferencia de dichas ondas. El resultado de la interferencia depende de la diferencia de fase $\Delta\varphi$ que adquieren las ondas ordinaria y extraordinaria en la lámina, de la relación entre las amplitudes de estas ondas y del ángulo β entre los planos principales del analizador y el polarizador (V.4.1.2°).

Por ejemplo, si el ángulo entre el plano principal del polarizador y el eje óptico MN de la lámina es $\alpha = \pi/4$, las amplitudes e intensidades de las ondas ordinaria y extraordinaria serán iguales. Supongamos que en estas condiciones incide sobre la lámina una luz monocromática de longitud de onda en el vacío λ_0 . Pueden ocurrir los dos casos extremos siguientes:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_o - n_{eo}) = \begin{cases} \pm 2m \\ \pm (2m + 1)\pi \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

En el primer caso, correspondiente a una lámina onda, sobre el analizador incide una luz polarizada linealmente en el plano principal del polarizador. Por esto, cuando $\beta = 0$ (el analizador está colocado paralelamente al polarizador), la intensidad J_a de la luz que pasa a través del analizador es máxima, y cuando $\beta = \pi/2$ (el analizador está cruzado con el polarizador), $J_a = 0$, es decir, si $\beta = 0$, se observará un máximo de interferencia, y si $\beta = \pi/2$, un mínimo.

En el segundo caso, que corresponde a una lámina semionda, sobre el analizador incide una luz linealmente polarizada en el plano que forma con el plano principal del polarizador un ángulo $2\alpha = \pi/2$. Por esto, cuando $\beta = 0$ se observa un mínimo de interferencia, y cuando $\beta = \pi/2$, un máximo.

Si sobre la lámina B (fig. V.4.13) incide una luz blanca polarizada linealmente, al observarla a través del analizador, la lámina se ve coloreada. Haciendo girar el analizador alrededor del rayo, es decir, variando el ángulo β , cambia la coloración. Esto se debe a que el valor de la diferencia de fase $\Delta\varphi$, que determina el resultado de la interferencia, depende de la longitud de onda de la luz. Una lámina cuyo espesor sea diferente en distintos puntos, se verá a la luz blanca coloreada de forma complicada, en la que cada raya de interferencia, de color (*isocromática*), pasa por los puntos de igual espesor d . Una figura análoga se observará en una lámina cuyo grosor sea igual en todas par-

tes, pero que tenga valores distintos de la diferencia $(n_0 - n_{e0})$. En este caso, cada isocromática pasará por puntos de la lámina, correspondientes a valores iguales de $(n_0 - n_{e0})$.

§ V.4.4. Anisotropía óptica artificial

1°. Un cuerpo transparente, ópticamente isótropo, se hace anisótropo al someterlo a deformación mecánica. Este fenómeno se denomina a veces *fotoelasticidad*. En el caso de compresión o tracción del cuerpo isótropo a lo largo del eje OX , aquél adquiere las propiedades ópticas de un cristal uniáxico (V.4.2.2°) cuyo eje óptico es paralelo a OX . La diferencia entre los índices de refracción de los rayos ordinario (n_0) y extraordinario (n_{e0}) en dirección perpendicular al eje OX , es proporcional a la tensión normal σ (VII.1.3.3°):

$$n_0 - n_{e0} = k\sigma,$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad que depende de las propiedades de la sustancia que compone el cuerpo.

2°. Recibe el nombre de *efecto* o *fenómeno de Kerr* la aparición de anisotropía en un dieléctrico transparente isótropo sólido, líquido o gaseoso, al introducirlo en un campo eléctrico externo. Bajo la acción del campo eléctrico uniforme, el dieléctrico se polariza y adquiere las propiedades ópticas de un cristal uniáxico cuyo eje óptico tiene dirección coincidente con la del vector E de intensidad del campo. La diferencia entre los índices de refracción del dieléctrico polarizado, para los rayos extraordinario y ordinario de la luz monocromática que se propaga perpendicularmente a la dirección del vector E , satisface la *ley de Kerr*:

$$n_{e0} - n_0 = B\lambda_0 E^2,$$

donde λ_0 es la longitud de onda de la luz en el vacío, y B , la *constante de Kerr*. El valor de B depende de la naturaleza de la sustancia, de la longitud de onda λ_0 y de la temperatura y, en general, disminuye cuando aumenta esta última. El signo de la diferencia $(n_{e0} - n_0)$ no depende de la dirección del campo. Para la mayoría de las sustancias $B > 0$, de manera que, por sus propiedades ópticas en un campo eléctrico uniforme, son semejantes a los cristales uniáxicos ópticamente positivos (V.4.2.6°).

3°. Se llama *efecto Cotton—Mouton* la aparición de anisotropía óptica en algunas sustancias isótropas (líquidos, vidrios, coloides), al introducirlas en un intenso campo magnético exterior. En el campo magnético uniforme, la sustancia adquiere las propiedades ópticas de un cristal uniaxial cuyo eje óptico tiene dirección coincidente con la del vector \mathbf{H} de intensidad del campo. La diferencia entre los índices de refracción de la sustancia, para los rayos extraordinario y ordinario de la luz monocromática que se propaga en dirección perpendicular al vector \mathbf{H} , es proporcional a H^2 :

$$n_{e0} - n_0 = C\lambda_0 H^2,$$

donde C es la *constante de Cotton—Mouton*, y λ_0 , la longitud de onda de la luz en el vacío. El valor de C depende de la naturaleza de la sustancia, de la longitud de onda λ_0 y de la temperatura.

§ V.4.5. Rotación del plano de polarización

1°. Cuando la luz polarizada linealmente pasa a través de ciertas sustancias llamadas *ópticamente activas*, el plano de polarización de la luz (IV.4.1.7°) gira alrededor de la dirección del rayo. Son ópticamente activos algunos cristales (como el cuarzo, el cinabrio y otros), líquidos puros y soluciones (por ejemplo, el aguarrás, la solución de azúcar en agua, etc.). Todas las sustancias activas en estado líquido lo son también en estado cristalino. Pero algunas sustancias ópticamente activas en estado cristalino no lo son en estado líquido. Por consiguiente, la actividad óptica puede deberse tanto a la estructura de las mismas moléculas de la sustancia, como a la distribución de las partículas en la red cristalina.

2°. En los cristales y líquidos puros ópticamente activos, el ángulo φ de rotación del plano de polarización de la luz es proporcional al espesor l de la capa de sustancia que atraviesa la luz: $\varphi = \alpha l$. El coeficiente de proporcionalidad α se llama *rotación específica* o *constante de rotación*. La rotación específica depende de la naturaleza de la sustancia, de la temperatura y de la longitud de onda de la luz en el vacío λ_0 . La dependencia de α respecto a λ_0 recibe el nombre de *dispersión rotatoria* o *por actividad óptica*. Lejos de las franjas de absorción de la luz por la sustancia, la dispersión rotatoria se subordina a la *ley de Biot*: $\alpha \sim \lambda_0^{-2}$.

3°. De la mayoría de los cristales ópticamente activos existen dos modificaciones. Al pasar la luz a través del cristal de una de las modificaciones, llamada *dextrógira* o *positiva*, el plano de polarización gira hacia la derecha, es decir, en el sentido de las agujas del reloj (para el observador que mira al encuentro del rayo). Cuando la luz pasa por un cristal de otra modificación, llamada *levógira* o *negativa*, el plano de polarización gira hacia la izquierda (en sentido contrario al de las agujas del reloj). Los valores de la rotación específica son iguales para las dos modificaciones de un mismo cristal ópticamente activo, y difieren únicamente en el signo.

4°. El ángulo de rotación del plano de polarización de la luz cuando ésta recorre una distancia l por una disolución ópticamente activa es

$$\varphi = [\alpha] cl = [\alpha] DKl.$$

Aquí c es la concentración masa-volumen de sustancia ópticamente activa en la solución (en kg/m^3); D , la densidad de la solución; y $K = c/D$, la concentración expresada en partes de la masa, es decir, la relación entre la masa de sustancia ópticamente activa y la masa de toda la solución. El coeficiente de proporcionalidad $[\alpha]$ se llama *rotación específica* o *constante de rotación* de la disolución. El valor de $[\alpha]$ depende de la naturaleza de la sustancia ópticamente activa y del solvente, de la longitud de onda de la luz y de la temperatura.

5°. Un medio ópticamente inactivo sometido a la acción de un campo magnético externo, adquiere la propiedad de hacer girar el plano de polarización de la luz que se propaga a lo largo de la dirección del campo. Este fenómeno se conoce con el nombre de *efecto Faraday* o *rotación magnética del plano de polarización de la luz*. El ángulo de giro φ del plano de polarización es proporcional a la longitud del camino recorrido por la luz en la sustancia, y a la intensidad H del campo magnético: $\varphi = VHl$. El coeficiente de proporcionalidad V se llama *constante de Verdet* y depende de la naturaleza de la sustancia y de la longitud de onda de la luz.

La dirección de la rotación magnética del plano de polarización (para el observador que mira a lo largo del campo magnético) es la misma cuando la luz se propaga según la dirección del vector H , que cuando lo hace en sentido contrario. En esto se diferencia el efecto Faraday de la rotación del plano de polarización de la luz en medios naturales ópticamente activos.

Capítulo V.5. Radiación térmica

§ V.5.1. Radiación térmica. Ley de Kirchhoff

1°. Todos los cuerpos emiten, en mayor o menor grado, ondas electromagnéticas. Por ejemplo, los cuerpos muy calientes emiten luz, mientras que a temperaturas ordinarias sólo son fuentes invisibles de radiación infrarroja.

La radiación electromagnética que emite la sustancia y que se produce a expensas de su energía interna (II.2.1.2°), se llama *térmica*. Esta radiación depende únicamente de la temperatura y de las propiedades ópticas de los cuerpos que la emiten. Si la energía que gasta el cuerpo en la radiación térmica no se repone cediéndole calor, su temperatura descende paulatinamente y la radiación térmica disminuye.

Se denomina *intercambio de calor por radiación* el proceso espontáneo de transmisión de energía (en forma de calor) de un cuerpo más caliente a otro menos caliente, y que se efectúa mediante la radiación térmica y la absorción de ondas electromagnéticas por estos cuerpos.

2°. La radiación térmica es la única que puede estar en equilibrio termodinámico (II.1.3.3°) con la sustancia. En estado de equilibrio, el gasto de energía del cuerpo, en radiación térmica, se compensa con la absorción (por dicho cuerpo) de una cantidad igual de energía de radiación que incide sobre él. La *radiación en equilibrio* se establece en un sistema adiabático cerrado (es decir, que no intercambia calor con el medio exterior), en el cual todos los cuerpos se hallan a la misma temperatura.

Del segundo principio de la termodinámica (II.4.3.2°) se deduce que la radiación en equilibrio no depende del material de los cuerpos que forman un sistema cerrado en equilibrio termodinámico. La densidad volumétrica de la energía de radiación en equilibrio y su distribución según las frecuencias son funciones universales de la temperatura. Efectivamente, en el caso contrario sería posible tomar dos sistemas adiabáticamente cerrados *A* y *B* (fig. V.5.1) a la misma temperatura, $T_A = T_B =$

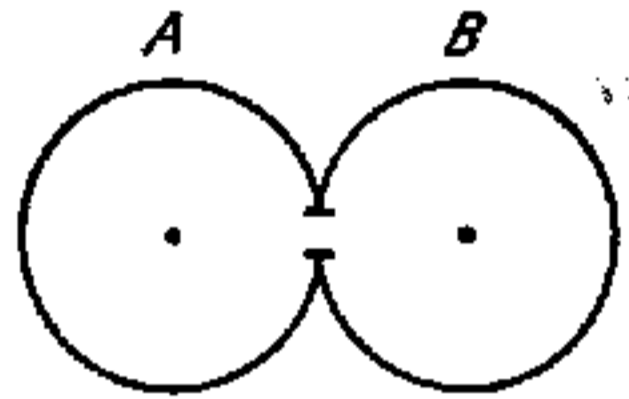


Fig. V.5.1.

$= T$, y efectuar entre ellos el intercambio de calor por radiación, practicando para esto un orificio en la pared termoaislante que los separa. Si la densidad volumétrica de la energía de radiación en equilibrio es mayor en el sistema A (w_A) que en el sistema B (w_B), o sea, si $w_A > w_B$, el intercambio calorífico entre los sistemas hará que la energía de radiación en el sistema A y su temperatura, disminuyan, y la energía de radiación en el sistema B y su temperatura, aumenten. Este proceso debe continuar hasta que los valores de la densidad volumétrica de la energía de los sistemas A y B se igualen: $w'_A = w'_B$. Pero entonces, $T'_B > T'_A$, por lo que el proceso considerado contradice el segundo enunciado del 2° principio de la termodinámica (II.4.3.2°, b). Por consiguiente, w_A no puede ser mayor que w_B . Del mismo modo w_B no puede ser mayor que w_A , es decir, $w_A = w_B = w(T)$ es función universal de la temperatura.

3°. De característica espectral de la radiación en equilibrio sirve la *densidad espectral de la densidad volumétrica de la energía de esta radiación*:

$$\rho(\nu, T) = \frac{dw}{d\nu}$$

donde dw es la energía de radiación en equilibrio con frecuencias desde ν hasta $\nu + d\nu$, contenida en la unidad de volumen del campo de radiación. La densidad volumétrica de la energía de este campo:

$$w = \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu.$$

La radiación en equilibrio es *isótropa*, o sea, no está polarizada y todas sus direcciones de propagación son igualmente probables. La energía dW de radiación en equilibrio en el vacío, con frecuencias desde ν hasta $\nu + d\nu$, que incide por unidad de tiempo en la unidad de área de la superficie de cada uno de los cuerpos del sistema en equilibrio termodinámico, constituye

$$dW = \frac{c}{4} \rho(\nu, T) d\nu,$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

4°. Se llama *emitancia energética (emisividad integral) de un cuerpo* la magnitud física R_e , numéricamente igual a la energía de las ondas electromagnéticas de todas las frecuencias po-

sibles (o de todas las longitudes de onda) desde 0 hasta ∞^*) emitidas por la unidad de área de la superficie del cuerpo en la unidad de tiempo.

Recibe el nombre de *emisividad*, *poder emisivo* o *densidad espectral de emitancia energética de un cuerpo*, la magnitud física numéricamente igual a la razón de la energía dW , radiada en la unidad de tiempo por la unidad de área de la superficie del cuerpo, mediante ondas electromagnéticas, en un estrecho intervalo de frecuencias, desde ν hasta $\nu + d\nu$ (o de longitudes de onda en el vacío, desde λ hasta $\lambda + d\lambda$), a la anchura de este intervalo:

$$r_\nu = \frac{dW}{d\nu} \quad \text{y} \quad r_\lambda = \frac{dW}{d\lambda}; \quad r_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} r_\nu,$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Los valores de r_ν (o r_λ) dependen de la frecuencia (o longitud de onda), de la temperatura, de la composición química del cuerpo y del estado de su superficie.

La emitancia energética del cuerpo está ligada con r_ν y r_λ por medio de las relaciones

$$R_e = \int_0^\infty r_\nu d\nu = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda.$$

5°. *El poder absorbente (factor de absorción monocromática) de un cuerpo* es una magnitud física adimensional a_ν que indica la fracción de energía de las ondas electromagnéticas con frecuencias desde ν hasta $\nu + d\nu$, incidentes sobre la superficie del cuerpo, que éste absorbe:

$$a_\nu = \frac{dW_{\text{abs}}}{dW_{\text{inc}}} \leq 1.$$

El valor de a_ν depende de la frecuencia, temperatura, composición química del cuerpo y el estado de su superficie.

Se llama *cuerpo negro* el cuerpo que absorbe totalmente todas las radiaciones que inciden sobre él, independientemente de la dirección que tenga la radiación incidente, de su composición espectral y de su polarización, sin reflejar ni transmitir nada:

*) Prácticamente basta limitarse al intervalo de frecuencias y longitudes de onda de la radiación óptica (IV.4.4.3°).

$a_v^* \equiv 1$. De modelo de cuerpo negro puede servir una cavidad casi cerrada que tenga un pequeño orificio (fig. V.5.2). La luz que entra en la cavidad a través del orificio O se refleja muchas veces en las paredes. Al ocurrir esto, la energía de la luz incidente será prácticamente absorbida en su totalidad por las paredes de la cavidad, independientemente del material de que estén hechas. La emisividad del cuerpo negro se designará, en lo sucesivo, por r_v^* (o r_λ^*), y su emitancia energética, por R_e^* .

Se da el nombre de *cuerpo gris* al cuerpo cuyo poder absorbente es menor que la unidad y no depende de la frecuencia (o longitud de onda) de la luz, de la dirección en que ésta se propaga, ni de su polarización:

$$\frac{\partial a_v^{\text{gris}}}{\partial \nu} = 0, \quad a_v^{\text{gris}} = a^{\text{gris}}.$$



Fig. V.5.2.

6°. De acuerdo con el *principio de equilibrio detallado*, todo proceso microscópico, que tenga lugar en un sistema en equilibrio o debe desarrollarse con la misma velocidad que su inverso. Este principio de la física estadística permite hallar la relación entre

el poder emisor r_v y el absorbente a_v de cualquier cuerpo opaco. Supongamos que el cuerpo entra en la composición de un sistema en equilibrio termodinámico que se encuentra a la temperatura T . La energía emitida en la unidad de tiempo por la unidad de área de la superficie del cuerpo considerado en el intervalo de frecuencias desde ν hasta $\nu + d\nu$, es $dW_{\text{rad}} = r_v d\nu$. Durante este tiempo, la misma porción de superficie del cuerpo absorbe la parte de la energía de radiación en equilibrio (p. 3°) que incide sobre dicha superficie. Esta parte será

$dW_{\text{abs}} = a_v \frac{c}{4} \rho(\nu, T) d\nu$. Como, según el principio de equilibrio detallado, $dW_{\text{rad}} = dW_{\text{abs}}$, resulta que

$$\frac{r_v}{a_v} = r_v^* = \frac{c}{4} \rho(\nu, T).$$

Esta ecuación expresa la *ley de Kirchhoff*, según la cual la razón del poder emisor del cuerpo, a su poder absorbente, no depende de la naturaleza del cuerpo y es igual a la emisividad del cuerpo negro r_v^* para los mismos valores de la temperatura y la frecuencia.

La variación de r_v^* en función de v y T se llama *función de Kirchhoff*:

$$r_v^* = f(v, T) = \frac{c}{4} \rho(v, T).$$

7°. De la ley de Kirchhoff se deduce que la emitancia energética de un cuerpo (p. 4°) constituye

$$R_e = \int_0^{\infty} a_v r_v^* dv.$$

En particular, la emitancia del cuerpo gris

$$R_e^{\text{gris}} = a^{\text{gris}} R_e^*, \text{ donde } R_e^* = \int_0^{\infty} r_v^* dv$$

es la emitancia energética del cuerpo negro a la misma temperatura. Para un cuerpo no gris

$$R_e = \alpha R_e^*,$$

donde α es la *negrura integral del cuerpo*, que depende del material de éste, del estado de su superficie y de la temperatura. Para todos los cuerpos, excepto el negro, $\alpha < 1$.

8°. La radiación en equilibrio a la temperatura T es idéntica a la radiación térmica del cuerpo negro a esta misma temperatura. Por esto, la radiación en equilibrio se suele llamar *radiación negra*. La relación entre la emitancia energética del cuerpo negro y la densidad volumétrica de la energía de radiación negra tiene la forma

$$R_e^* = \frac{c}{4} w = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} \rho(v, T) dv.$$

§ V.5.2. Leyes de Stefan—Boltzmann y de Wien

1°. *La ley de Stefan—Boltzmann* afirma que la emitancia energética del cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta:

$$R_e^* = \sigma T^4,$$

donde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} (\text{K})^{-4}$ es la *constante de Stefan—Boltzmann*. Esta ley se puede deducir teóricamente analizando, por los métodos de la termodinámica, la radiación en equilibrio en una cavidad cerrada.

2°. La variación de la emisividad del cuerpo negro r_{ν}^* en función de la frecuencia ν para varios valores constantes de la temperatura, se muestra en la fig. V.5.3. En la región de frecuencias pequeñas, $r_{\nu}^* \sim \nu^2 T$, y en la de frecuencias grandes (ramas de la derecha de las curvas alejadas de los máximos), $r_{\nu}^* \sim \nu^3 \exp \{ - a_1 \nu / T \}$, donde a_1 es un factor constante.

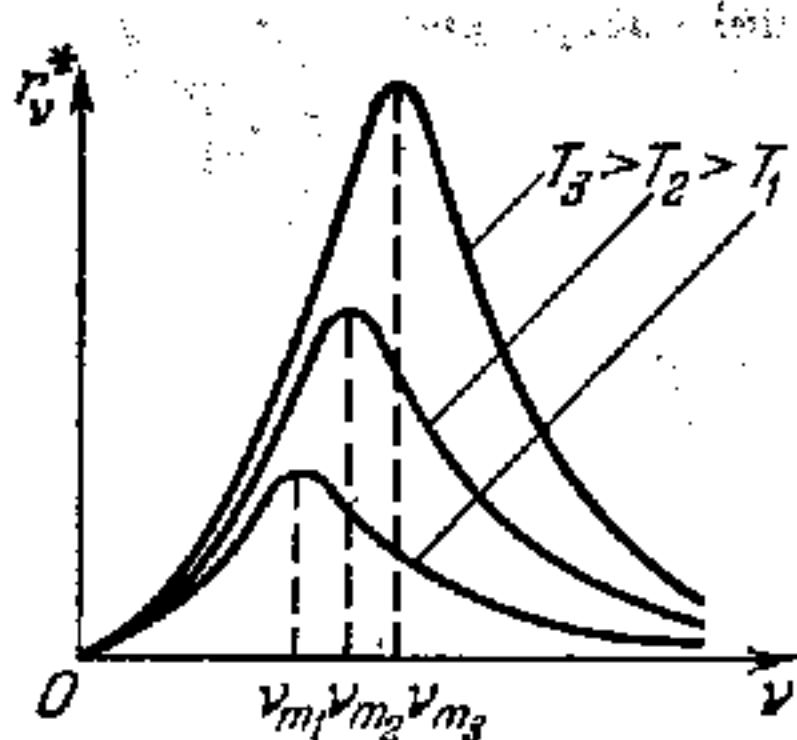


Fig. V.5.3.

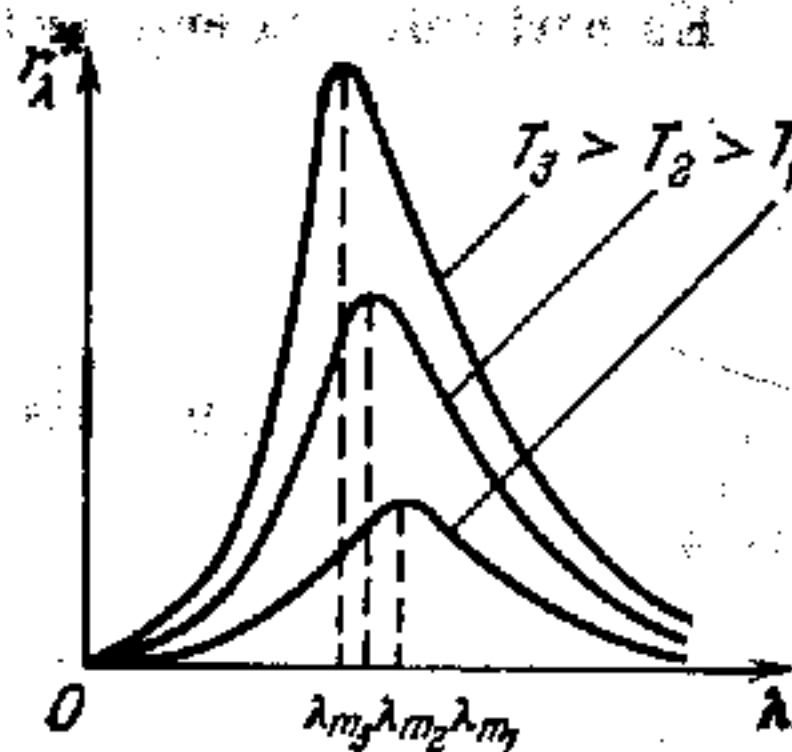


Fig. V.5.4.

La energía de radiación del cuerpo negro está distribuida irregularmente por su espectro. El cuerpo negro casi no radia en las regiones de frecuencias muy pequeñas y muy grandes. A medida que aumenta la temperatura del cuerpo, el máximo de r_{ν}^* se desplaza hacia el lado de las frecuencias mayores, de acuerdo con la ley $\nu_m = b_1 T$, donde ν_m es la frecuencia correspondiente al máximo de r_{ν}^* para la temperatura T , y b_1 es un factor constante.

La variación de la emisividad del cuerpo negro $r_{\nu}^* = \frac{c}{\lambda^2} r_{\lambda}^*$ (V.5.1.4°) en función de la longitud de onda λ se puede apreciar en la fig. V.5.4. Cuando la temperatura del cuerpo aumenta, el máximo de r_{ν}^* se desplaza hacia el lado de las longitudes de onda menores, de acuerdo con la *ley de desplazamiento de*

Wien:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

donde $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ es la *constante de Wien*.

3°. Todos los intentos de fundamentar teóricamente, dentro de los marcos de la física clásica, la función de Kirchhoff $r_v^* = f(\nu, T)$ hallada experimentalmente y representada en la fig. V.5.3, fueron inútiles. Así, por medio de los métodos de la termodinámica se logró obtener la *fórmula de Wien*:

$$r_v^* = \nu^3 \varphi\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

donde $\varphi\left(\frac{\nu}{T}\right)$ es una función incógnita de la relación ν/T .

Basándose en las leyes de la electrodinámica y en la ley de la física estadística clásica sobre la equipartición de la energía según los grados de libertad del sistema en equilibrio (II.3.6.4°), se obtuvo la *fórmula de Rayleigh—Jeans*:

$$r_v^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

en la que k es la constante de Boltzmann (II.1.4.5°).

La fórmula de Rayleigh—Jeans concordaba con los datos experimentales únicamente en la región de frecuencias pequeñas. Además, de ella se deducía una conclusión absurda, según la cual, para cualquier temperatura, la emitancia energética del cuerpo negro R_e^* y la densidad volumétrica de la energía w de radiación en equilibrio eran infinitamente grandes. Este resultado, a que llegó la física clásica en el problema de la distribución espectral de la radiación en equilibrio, recibió el nombre metafórico de «*catástrofe ultravioleta*».

§ V.5.3. Fórmula de Planck

1°. La densidad volumétrica de la energía de radiación en equilibrio (negra) en una cavidad cerrada, así como la distribución de la energía de esta radiación según las frecuencias, no dependen del material de las paredes de la cavidad y vienen determinadas totalmente por la temperatura. Por esto, como modelo teórico del cuerpo negro se puede tomar un sistema infinito de osciladores armónicos con todas las frecuencias propias

posibles. Cada uno de estos osciladores corresponde a una componente monocromática de la radiación negra. Sea $\langle \epsilon_\nu \rangle$ el valor medio de la energía del oscilador con frecuencia propia ν , entonces, como demuestran los cálculos, la emisividad del cuerpo negro será

$$r_\nu^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \epsilon_\nu \rangle.$$

Si por $\langle \epsilon_\nu \rangle$ se toma el valor kT que se deduce de la ley clásica de la equipartición de la energía según los grados de libertad (II.3.6.4°)*) la expresión antes escrita para r_ν^* coincidirá con la fórmula de Rayleigh—Jeans (V.5.2.3°).

2°. La expresión correcta de la energía media del oscilador $\langle \epsilon_\nu \rangle$, así como la función de Kirchhoff, fueron halladas por Planck introduciendo la *hipótesis cuántica*, totalmente ajena a la física clásica. En la física clásica se supone que la energía de todo sistema varía de un modo *continuo*, es decir, puede tomar cualesquiera valores tan próximos como se desee. Según la hipótesis cuántica de Planck, la energía ϵ_ν de un oscilador sólo puede tomar determinados *valores discretos*, iguales a un número entero de porciones elementales de energía, llamadas *cuantos de energía* ϵ_{ν_0} :

$$\epsilon_\nu = n\epsilon_{\nu_0}, \text{ donde } n = 0, 1, 2, \dots$$

Si se considera que la distribución de los osciladores según los posibles estados energéticos discretos, viene definida por la ley de Boltzmann (II.3.4.2°), la probabilidad p_n de que un oscilador se encuentre en el estado de energía $n\epsilon_{\nu_0}$ a temperatura T será

$$p_n = C \exp \left[-n\epsilon_{\nu_0}/kT \right].$$

Aquí k es la constante de Boltzmann (II.1.4.5°), y C es un factor constante que se determina por la condición de normalización:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1, \text{ es decir, } C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-n\epsilon_{\nu_0}/kT \right]}.$$

*) A un grado de libertad oscilatorio del oscilador corresponde, por término medio, el doble de energía que a un grado de libertad del movimiento de traslación o de rotación, porque el oscilador no sólo posee energía cinética, sino también potencial, la cual, por término medio, es igual a la energía cinética.

El valor medio de la energía del oscilador es

$$\langle \epsilon_{\nu} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} p_n n \epsilon_{\nu_0} = \epsilon_{\nu_0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \exp[-n \epsilon_{\nu_0}/kT]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-n \epsilon_{\nu_0}/kT]},$$

de donde

$$\langle \epsilon_{\nu} \rangle = \epsilon_{\nu_0} \frac{\frac{d}{d\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi)} = -\epsilon_{\nu_0} \frac{d}{d\xi} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi),$$

donde $\xi = \epsilon_{\nu_0}/kT$. Y como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi) = \frac{1}{1 - \exp(-\xi)}$$

$$-\ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\xi) = \ln(1 - e^{-\xi}),$$

resulta

$$\langle \epsilon_{\nu} \rangle = \frac{\epsilon_{\nu_0}}{e^{\epsilon_{\nu_0}/kT} - 1} \quad \text{y} \quad r_{\nu}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{\epsilon_{\nu_0}}{e^{\epsilon_{\nu_0}/kT} - 1}.$$

De la comparación de esta expresión para r_{ν}^* , con la fórmula de Wien (V.5.2.3°), se deduce que el *cuanto de energía*

$$\epsilon_{\nu_0} = h\nu,$$

donde h es la constante universal llamada *constante de Planck* (IX).

Fórmula de Planck para la emisividad del cuerpo negro r_{ν}^ :*

$$r_{\nu}^* = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Respectivamente, la *densidad espectral de radiación en equilibrio* (V.5.1.3°) constituye

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

3°. Para frecuencias pequeñas ($h\nu \ll kT$) $e^{h\nu/kT} - 1 \approx \approx h\nu/kT$, y la fórmula de Planck coincide con la de Rayleigh—Jeans (V.5.2.3°).

De la fórmula de Planck se deduce la ley de Stefan—Boltzmann (V.5.2.1°):

$$R_e^* = \frac{2\pi n}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4$$

Entre la constante de Planck y la de Stefan—Boltzmann (V.5.2.1°) existe la relación siguiente:

$$h = \sqrt[3]{\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 \sigma}} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

4°. La fórmula de Planck para la emisividad del cuerpo negro r_λ^* tiene la forma

$$r_\lambda^* = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

La longitud de onda λ_m correspondiente al máximo de r_λ^* se determina partiendo de la ecuación trascendente

$$xe^x - 5e^x + 5 = 0, \text{ en la que } x = hc/\lambda_m kT.$$

La raíz de esta ecuación es $x = 4,965$, y λ_m satisface la ley de desplazamiento de Wien (V.5.2.2°):

$$\lambda_m T = b, \text{ donde } b = \frac{hc}{4,965k} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$$

§ V.5.4. Pirometría óptica

1°. Se llama *pirometría óptica* el conjunto de métodos ópticos de medición de altas temperaturas, basados en las leyes de radiación térmica. Los instrumentos que se utilizan para esto se denominan *pirómetros*.

En los *pirómetros de radiación* se registra la radiación integral (total) del cuerpo caliente que se analiza, y en los *pirómetros ópticos*, su radiación en una o dos partes estrechas de su espectro.

2°. Recibe el nombre de *flujo de radiación* Φ_e la potencia media de la radiación óptica (IV.4.4.3°) durante un tiempo mucho mayor que el período de oscilación del campo electromagnético de la luz.

Se llama *irradiancia o iluminación energética* E_e de una superficie, el flujo de radiación que incide sobre esta superficie por unidad de área de la misma: $E_e = d\Phi_e/dS$, donde $d\Phi_e$ es el flujo de radiación que incide sobre una porción de superficie de área dS .

La *intensidad de radiación o intensidad energética de la luz* J_e emitida por un cuerpo, es el flujo de radiación de este cuerpo en una dirección dada, referido al ángulo sólido unidad: $J_e = d\Phi_e/d\Omega$, siendo $d\Phi_e$ el flujo de energía en el ángulo sólido de Ω .

3°. Se da el nombre de *radiancia o luminancia energética* B_e de una porción dS de superficie radiante en una dirección dada, a la razón de la intensidad de radiación dJ_e de la superficie dS en la dirección considerada, al área de la proyección de dS sobre un plano perpendicular a esta dirección:

$$B_e = \frac{dJ_e}{dS \cos \varphi},$$

donde φ es el ángulo entre la dirección que se considera de la radiación y la normal a la superficie dS .

Densidad espectral de radiancia o de luminancia energética es la razón de la radiancia dB_e , correspondiente a una región estrecha del espectro óptico, a la anchura de esta región:

$$b_\nu = \frac{dB_e}{d\nu} \quad \text{y} \quad b_\lambda = \frac{dB_e}{d\lambda}.$$

4°. Se dice que una fuente de radiación óptica se *subordina a la ley de Lambert o del coseno*, si su radiancia B_e y sus densidades espectrales b_ν y b_λ son iguales en todas las direcciones, es decir, no dependen del ángulo φ . El cuerpo negro es un radiador lambertiano.

La radiancia de un radiador de este tipo y sus densidades espectrales se relacionan con su emitancia energética y sus den-

sidades espectrales (V.5.1.4°) como sigue:

$$B_e = \frac{R_e}{\pi}, \quad b_\nu = \frac{r_\nu}{\pi} \quad \text{y} \quad b_\lambda = \frac{r_\lambda}{\pi}$$

5°. En la pirometría óptica se distinguen las siguientes temperaturas del cuerpo: temperatura de radiación, temperatura de luminancia y temperatura de color.

Se denomina *temperatura de radiación* T_r de un cuerpo, la temperatura del cuerpo negro a la cual su radiancia B_e^* es igual a la radiancia B_e de un cuerpo dado. Si el cuerpo que se investiga es un radiador lambertiano cuya negrura integral es α (V.5.1.7°), de la condición $B_e(T) = B_e^*(T_r)$, en la que T es la temperatura verdadera del cuerpo, se deduce que

$$\alpha R_e^*(T) = R_e^*(T_r) \quad \text{y} \quad T = \frac{T_r}{\sqrt[4]{\alpha}} \geq T_r.$$

6°. La *temperatura de luminancia* T_L es la temperatura del cuerpo negro a la cual su densidad espectral de radiancia b_λ^* , para cualquier longitud de onda λ_0 determinada, es igual a la densidad espectral de la radiancia b_λ de un cuerpo dado para la misma longitud de onda: $b_\lambda(\lambda_0, T) = b_\lambda^*(\lambda_0, T_L)$. Por lo general $\lambda_0 = 660 \text{ nm}$ (luz roja).

Para un radiador lambertiano, cuyo poder absorbente (V.5.1.5°) para la luz de longitud de onda λ_0 a la temperatura T del cuerpo, sea $a_\lambda(\lambda_0, T)$, de la ley de Kirchhoff (V. 5.1.6°) y de la fórmula de Planck (V.5.3.4°) se deduce que

$$a_\lambda(\lambda_0, T) r_\lambda^*(\lambda_0, T) = r_\lambda^*(\lambda_0, T_L)$$

y

$$a_\lambda(\lambda_0, T) \left[\exp\left(\frac{a_2}{\lambda_0 T_L}\right) - 1 \right] = \exp\left(\frac{a_2}{\lambda_0 T}\right) - 1,$$

donde $a_2 = hc/k$. Y como $a_\lambda(\lambda_0, T) \leq 1$, resulta que $T \geq T_L$.

7°. Se da el nombre de *temperatura de color* T_c de un cuerpo, a la temperatura del cuerpo negro a la cual las distribuciones relativas de la densidad espectral de éste b_λ^* y del cuerpo que se investiga b_λ se aproximan lo más posible en la región visible del espectro, es decir,

$$\frac{b_\lambda(\lambda_1, T)}{b_\lambda(\lambda_2, T)} = \frac{b_\lambda^*(\lambda_1, T_c)}{b_\lambda^*(\lambda_2, T_c)}$$

Para un radiador lambertiano

$$\frac{r_{\lambda}(\lambda_1, T)}{r_{\lambda}(\lambda_2, T)} = \frac{r_{\lambda}^*(\lambda_1, T_c)}{r_{\lambda}^*(\lambda_2, T_c)}$$

Por lo general, $\lambda_1 = 655 \text{ nm}$ (luz roja) y $\lambda_2 = 470 \text{ nm}$ (luz verde). La temperatura de color de un cuerpo gris (V.5.1.5°) coincide con su temperatura verdadera y se puede hallar partiendo de la ley de desplazamiento de Wien (V.5.2.2°).

Capítulo V.6. Fundamentos de la óptica cuántica

§ V.6.1. Efecto fotoeléctrico externo

1°. Se llama *óptica cuántica* la parte de la óptica que estudia los fenómenos en los cuales se ponen de manifiesto las propiedades cuánticas de la luz. A estos fenómenos pertenecen: la radiación térmica (V.5.1.1°), el efecto fotoeléctrico, el efecto Compton (V.6.3.1°), los procesos fotoquímicos y otros.

El efecto fotoeléctrico en los gases consiste en la ionización de los átomos y moléculas del gas por la acción de la luz, y suele llamarse *fotoionización*.

En los cuerpos condensados (sólidos y líquidos) se distingue el efecto fotoeléctrico externo y el efecto fotoeléctrico interno.

Se denomina *efecto fotoeléctrico externo (fotoemisión)* la emisión de electrones por una sustancia sometida a la acción de la luz. Los electrones que se desprenden de la sustancia durante el efecto fotoeléctrico externo reciben el nombre de *fotoelectrones*, y la corriente eléctrica que se genera cuando se ordena su movimiento en un campo eléctrico externo, se llama *corriente fotoeléctrica*.

El nombre de *efecto fotoeléctrico interno* se da a la redistribución de los electrones según los estados de energía, que tiene lugar en los semiconductores y dieléctricos sólidos y líquidos a causa de la acción de la luz. Este fenómeno se manifiesta en el cambio de la concentración de portadores de carga en el medio (III.7.1.4°) y hace que se produzca la fotoconductibilidad o el efecto fotoeléctrico de barrera. *Fotoconductibilidad* es el aumento

de la conductibilidad eléctrica que experimenta una substancia por la acción de la luz. El *efecto fotoeléctrico de barrera* es la fem que se origina por la acción de la luz (*fuerza fotoelectromotriz*) en un sistema compuesto por un semiconductor y un metal o por dos semiconductores de distinta naturaleza (por ejemplo, en una unión $p-n$ (VII.2.11.7°) puestos en contacto.

2°. En la fig. V.6.1 se muestra el esquema de un dispositivo para estudiar el efecto fotoeléctrico en los metales. La luz pasa

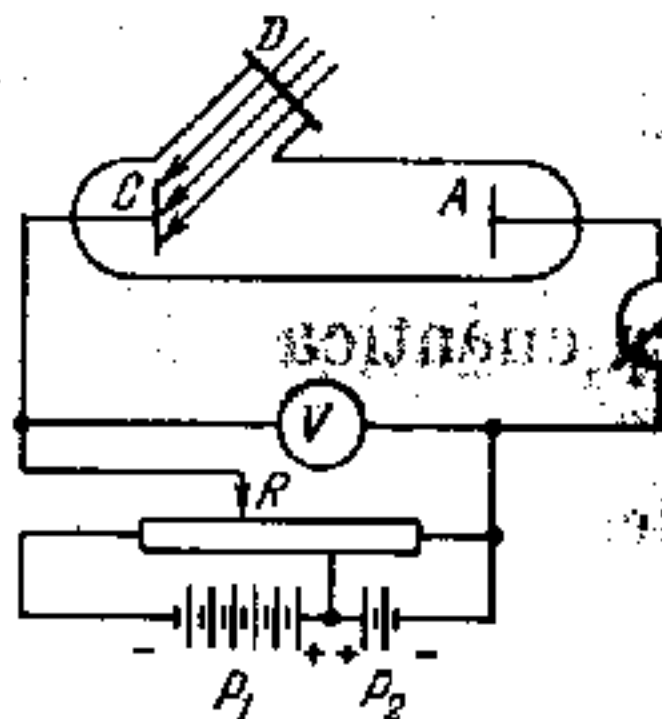


Fig. V.6.1.

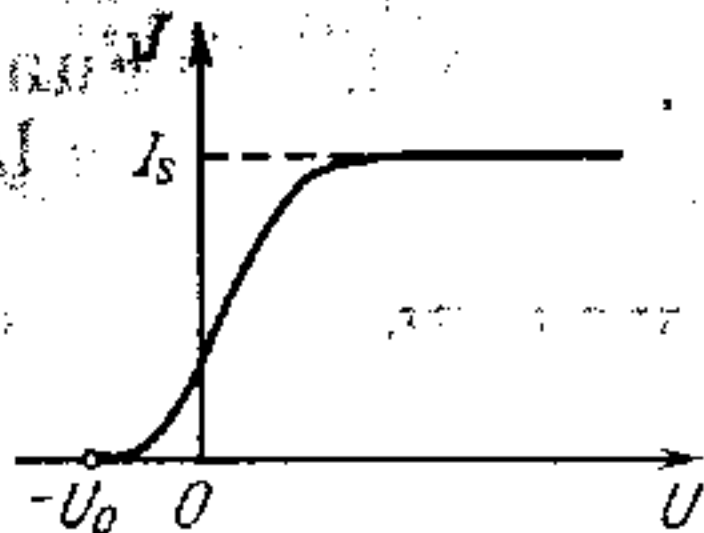


Fig. V.6.2.

a través de la ventanilla D e incide sobre la superficie del cátodo C llamado *fotocátodo*, que se encuentra dentro de un tubo en el que se ha practicado el vacío. El carácter de variación de la corriente fotoeléctrica I en el tubo, en función de la diferencia de potencial U entre el ánodo A y el cátodo C cuando la iluminación energética E_0 del cátodo (V.5.4.2°) es continua y se efectúa con luz monocromática, se representa en la fig. V.6.2.

La existencia de corriente fotoeléctrica para los valores negativos de U desde 0 hasta $-U_0$, pone de manifiesto que los electrones salen del cátodo con cierta velocidad inicial y con la correspondiente energía cinética. Entre la velocidad inicial máxima de los electrones $v_{\text{máx}}$ y la *tensión de retardo* (*potencial retardador*) U_0 existe la relación

$$\frac{mv_{\text{máx}}^2}{2} = eU_0,$$

en la que e es la magnitud absoluta de la carga del electrón, y m , la masa de éste.

Al crecer U , la corriente fotoeléctrica aumenta solamente hasta un valor límite determinado I_s y se llama *corriente fotoeléctrica*

trica de saturación. Con la corriente fotoeléctrica de saturación todos los electrones que se desprenden del cátodo por la acción de la luz, llegan al ánodo. Si n_{seg} es el número de fotoelectrones que abandonan el cátodo en 1 s,

$$I_s = en_{\text{seg}}.$$

3°. Leyes del efecto fotoeléctrico externo.

1. *Ley de Stoliétov:* si la composición espectral de la luz que incide sobre el fotocátodo no varía, la corriente fotoeléctrica de saturación es proporcional a la iluminación energética del cátodo (V.5.4.2°):

$$I_s \sim E_e \text{ y } n_{\text{seg}} \sim E_e.$$

2. Para un fotocátodo dado, la velocidad inicial máxima de los fotoelectrones depende de la frecuencia de la luz y no de su intensidad.

3. Para cada fotocátodo existe una *frecuencia umbral* rojo (*umbral fotoeléctrico*), es decir, una frecuencia mínima de la luz ν_0 con la cual aún es posible el efecto fotoeléctrico externo; la frecuencia ν_0 depende del material del fotocátodo y del estado de su superficie.

Las leyes segunda y tercera del efecto fotoeléctrico externo no se pueden interpretar basándose en la teoría electromagnética clásica de la luz. Según esta teoría, el arranque de los electrones de conducción del metal es el resultado de su «sacudimiento» por el campo electromagnético de la onda luminosa, que debe aumentar al crecer la intensidad de la luz y, proporcionalmente a ella, la iluminación energética del fotocátodo.

4°. Sólo la teoría cuántica de la luz permitió explicar satisfactoriamente las leyes del efecto fotoeléctrico externo. Desarrollando las ideas de Planck acerca de la cuantización de la energía de los átomos—osciladores (V. 5.3.2°), Einstein propuso la hipótesis de que la luz no sólo es emitida, sino que también se propaga en el espacio y es absorbida por la sustancia en forma de cuantos discretos de radiación electromagnética, o sea, de *fonones*. Todos los fonones de luz monocromática de frecuencia ν tienen la misma energía $w_f = h\nu$, donde h es la constante de Planck, y se mueven en el espacio con la velocidad c de la luz en el vacío. En el caso de absorción de la luz por una sustancia, cada fotón absorbido transmite toda su energía a una partícula de aquélla. Por ejemplo, en el efecto fotoeléctrico externo, un electrón de conducción del metal absorbe un fotón y adquiere su energía $h\nu$. Para poder salir del metal, el electrón tiene que efectuar un trabajo A (VII.2.11.1°). Por esto, la *ecuación de Eins-*

tein para el efecto fotoeléctrico externo, que expresa la ley de conservación de la energía en dicho efecto, tiene la forma

$$h\nu = A + \frac{mv_{\text{máx}}^2}{2}.$$

5°. De la ecuación de Einstein se deduce directamente la segunda ley del efecto fotoeléctrico:

$$\frac{mv_{\text{máx}}^2}{2} = eU_0 = h\nu - A.$$

De este modo, $v_{\text{máx}}$ y U_0 sólo dependen de la frecuencia de la luz y del trabajo de salida (o extracción) del electrón del fotocátodo.

La energía cinética inicial máxima de los fotoelectrones depende de la frecuencia de la luz según una ley lineal. Esta energía se anula para la frecuencia ν_0 correspondiente al umbral rojo del efecto fotoeléctrico externo:

$$\nu_0 = \frac{A}{h}.$$

Por consiguiente, dicho umbral sólo depende del trabajo de extracción del electrón del metal.

6°. El efecto fotoeléctrico carece de inercia, es decir, la emisión de fotoelectrones comienza inmediatamente en cuanto incide sobre el fotocátodo luz de frecuencia $\nu \geq \nu_0$. Esta propiedad del efecto fotoeléctrico externo confirma una vez más el carácter cuántico de la interacción de la luz con la sustancia. De acuerdo con las representaciones ondulatorias clásicas, se requiere un tiempo bastante considerable para que una onda electromagnética de intensidad dada pueda transmitir al electrón una energía suficiente para que éste realice el trabajo de salida.

7°. Con intensidades muy grandes de la luz, conseguidas con láseres (VI.2.6.8°), se observa el efecto fotoeléctrico polifotónico o no lineal. En este caso, un electrón puede recibir simultáneamente la energía de N fotones. Entonces la ecuación de la ley de conservación de la energía para el efecto fotoeléctrico externo provocado por la acción de la luz de frecuencia ν , tiene la forma siguiente:

$$Nh\nu = A + \frac{mv_{\text{máx}}^2}{2}.$$

El umbral rojo del efecto fotoeléctrico N -fotónico $(\nu_0)_N = \frac{A}{Nh}$.

§ V.6.2. Masa e impulso del fotón. Presión de la luz

1°. La masa de un fotón (V.6.1.4°) de energía $w_f = h\nu$, en la que ν es la frecuencia de la luz, y h , la constante de Planck, se puede hallar partiendo de la ley de la relación entre la masa y la energía (I.5.7.2°):

$$m_f = \frac{h\nu}{c^2},$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. El fotón siempre se mueve con velocidad c , y su masa en reposo (I.5.6.1°) es nula.

2°. El impulso de fotón p_f es numéricamente igual a

$$p_f = m_f c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

donde λ es la longitud de onda de la luz en el vacío. Y como el número de onda $k = 2\pi/\lambda$, tenemos que

$$p_f = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k \quad \text{y} \quad p_f = \hbar k,$$

donde $\hbar = h/2\pi$, y \mathbf{k} es el vector de onda (IV.3.2.7°).

3°. La luz ejerce presión sobre los cuerpos que la reflejan y absorben. En la óptica cuántica, la presión de la luz se interpreta como el resultado de la transmisión a estos cuerpos del impulso de los fotones durante la reflexión y la absorción de la luz. La presión de la luz p sobre la superficie plana ab (fig. V.6.3) de un cuerpo es igual al valor numérico de la componente normal del impulso total que los fotones transmiten al cuerpo por unidad de área de la superficie considerada en la unidad de tiempo.

Supongamos que sobre la superficie ab (fig. V.6.3) incide, bajo el ángulo i , una luz monocromática de frecuencia ν , y que n_{seg} es el número de fotones que llegan en 1 s a la unidad de área de la superficie ab . Si R es el factor de reflexión de la luz (IV.4.5.6°) en la superficie que se considera, de los n_{seg} fotones, Rn_{seg} se reflejarán especularmente, y $(1 - R)n_{\text{seg}}$ serán los absorbidos. Los fotones reflejados transmiten al cuerpo un impulso total dirigido normalmente a la superficie ab e igual numéricamente a $Rn \frac{2h\nu}{c} \cos i$. Los fotones absorbidos ceden al



Fig. V.6.3.

cuerpo un impulso total cuya componente perpendicular a la superficie ab es numéricamente igual a $(1 - R) n_{\text{seg}} \frac{h\nu}{c} \cos i$. Por lo tanto, la presión de la luz

$$p = R n_{\text{seg}} \frac{2h\nu}{c} \cos i + (1 - R) n_{\text{seg}} \frac{h\nu}{c} \cos i =$$

$$= (1 + R) n_{\text{seg}} \frac{h\nu}{c} \cos i.$$

Si n_0 es la concentración de fotones en la luz incidente $n_{\text{seg}} = n_0 c \cos i$ y $n_0 h\nu = \langle w \rangle$ es el valor medio de la densidad volumétrica de la energía de la luz. Por esto,

$$p = n_0 h\nu (1 + R) \cos^2 i = \langle w \rangle (1 + R) \cos^2 i.$$

De este modo, la presión de la luz se explica satisfactoriamente tanto por la teoría ondulatoria (IV.4.2.6°) como por la cuántica.

§ V.6.3. Efecto Compton

1°. Se llama *efecto Compton* la variación de las longitudes de onda de los rayos X al ser difundidos por una sustancia que contiene átomos ligeros. La longitud de onda λ' de la radiación difusa bajo el ángulo θ en la dirección en que se propaga la radiación monocromática inicial de longitud de onda λ , es mayor que λ en la magnitud $\Delta\lambda$ que sólo depende del ángulo θ :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}.$$

La magnitud constante $\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12}$ m y se conoce con el nombre de *longitud de onda de Compton para el electrón*. El efecto Compton no se consigue explicar basándose en la teoría ondulatoria clásica de la luz.

2°. Según la teoría cuántica, el efecto Compton es el resultado del choque elástico de un fotón X con un electrón libre o casi libre (en los átomos ligeros, la energía de ligadura del electrón con el átomo es mucho menor que la energía del fotón de rayos X). En este caso el fotón transmite al electrón parte de su energía y parte de su impulso de acuerdo con las leyes de con-

servación de la energía y del impulso. Si inicialmente el electrón estaba en reposo, de la ley de conservación de la energía se deduce que

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2, \quad (a)$$

donde $\nu = c/\lambda$ y $\nu' = c/\lambda'$ son, respectivamente, las frecuencias de la radiación incidente y difusa; m_0c^2 es la energía en reposo del electrón (I.5.7.3°); y mc^2 , la energía total del electrón (I.5.7.2°) después del choque, o sea, la energía del *electrón de rechazo*.

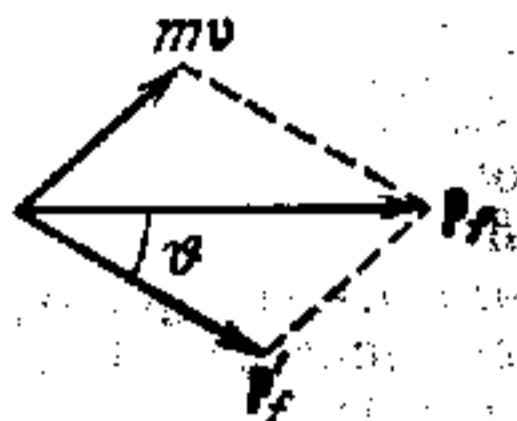


Fig. V.6.4.

De la ley de conservación del impulso se deduce que

$$\mathbf{p}_f = m\mathbf{v} + \mathbf{P}'_f$$

o, de acuerdo con la fig. V.6.4,

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2\nu\nu'}{c^2} \cos \theta, \quad (b)$$

donde v es la velocidad del electrón de rechazo.

Entre la masa del electrón de rechazo y su velocidad existe la relación (I.5.6.1°)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (c)$$

De las ecuaciones (a), (b) y (c) se obtiene

$$m_0c^2(\nu - \nu') = 2h\nu\nu' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

o bien

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Así, pues, la *longitud de onda comptoniana del electrón* es

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0c}.$$

3°. La energía cinética del electrón de rechazo (I.5.7.1°)

$$W_c = (m - m_0)c^2 = h(\nu - \nu') = h\nu\nu' \left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{hc}{\lambda\lambda'} (\lambda' - \lambda)$$

o bien

$$W_c = h\nu \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = h\nu \frac{2a \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}}{1 + 2a \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

donde $a = \lambda_c/\lambda$, y $h\nu$ es la energía del fotón incidente.

La energía W_c es máxima cuando $\vartheta = \pi$:

$$W_{c \text{ máx}} = \frac{2ah\nu}{1 + 2a}$$

4°. Si el electrón está fuertemente ligado al átomo, al difundirse en él el fotón, este último transmite su energía e impulso no al electrón, sino al átomo en conjunto. La masa del átomo es muchas veces mayor que la del electrón. Por esto, al átomo se transmite solamente una parte insignificante de la energía del fotón, de manera que la longitud de onda λ' de la radiación difusa no se distingue prácticamente de la longitud de onda λ de la radiación incidente. La parte de los electrones del átomo fuertemente ligados a él aumenta a medida que crece el número de orden del elemento en el sistema periódico y, respectivamente, la masa del átomo. Por esto, cuanto más pesados son los átomos de la substancia difusora, tanto mayor es la intensidad relativa de la componente no desplazada ($\lambda' = \lambda$) en la radiación difusa.

5°. A diferencia de la difusión de los fotones, que puede tener lugar tanto en los electrones libres como en los ligados, su absorción sólo pueden realizarla los últimos. Por ejemplo, en el efecto fotoeléctrico externo, el fotón es absorbido por un electrón ligado, el cual gasta parte de la energía adquirida, en la realización del trabajo de salida que, a su vez, es la medida del enlace del electrón con substancia.

La absorción de un fotón por un electrón libre es imposible, ya que este proceso contradiría las leyes de conservación de la energía y el impulso. Esto puede comprobarse evidentemente en el ejemplo de absorción de un fotón por un electrón libre en reposo. De las leyes de conservación de la energía y el impulso se deduce que en este proceso deben cumplirse al mismo tiempo las dos relaciones siguientes:

$$(m - m_0)c^2 = h\nu \quad \text{y} \quad mv = \frac{h\nu}{c}, \quad \text{donde} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Pero estas relaciones sólo son compatibles para $v = 0$.

§ V.6.4. Dualidad ondulatoria-corpúscular de las propiedades de la luz

1°. Tales fenómenos como la interferencia (IV.3.5.2°) y la difracción de la luz (V.2.2.1°) evidencian la naturaleza ondulatoria de ésta. A su vez, las regularidades del movimiento térmico en equilibrio (V.5.1.2°), del efecto fotoeléctrico (V.6.1°) y del efecto Compton (V.6.3.1°) sólo pueden interpretarse eficazmente basándose en las representaciones cuánticas de la luz como un flujo de fotones discretos (V.6.1.4°). No obstante, los procedimientos ondulatorio y cuántico (corpúscular) de descripción de la luz no se contradicen, sino que se complementan mutuamente, porque la luz posee al mismo tiempo propiedades ondulatorias y corpúsculares, o sea, es la unidad dialéctica de estas propiedades contrarias.

2°. Las ecuaciones fundamentales que relacionan las propiedades ondulatorias de la luz (frecuencia ν y longitud de onda en el vacío λ) con sus propiedades corpúsculares (energía del fotón w_f e impulso del mismo p_f), son

$$w_f = h\nu \quad \text{y} \quad p_f = \frac{h}{\lambda}.$$

Las propiedades ondulatorias de la luz desempeñan un papel definitivo en las regularidades de su propagación, interferencia, difracción y polarización, y las corpúsculares, en los procesos de interacción de la luz con la sustancia. Cuanto mayor es la longitud de onda, tanto menor es el impulso y la energía del fotón y tanto más difícil es descubrir las propiedades cuánticas de la luz. Por ejemplo, el efecto fotoeléctrico externo sólo se produce cuando las energías de los fotones son mayores o iguales que el trabajo de extracción del electrón de la sustancia (V.6.1.5°). Cuanto menor es la longitud de onda de la radiación electromagnética, tanto mayor es la energía y el impulso de los fotones, y tanto más difícil es descubrir las propiedades ondulatorias de esta radiación. Por ejemplo, los rayos X sólo difractan en una red de difracción muy «fina», la red cristalina del sólido (V.2.4.3°).

3°. En la óptica cuántica se aplica el método estadístico al estudio de las regularidades de la propagación de la luz. De acuerdo con este método, la difracción de la luz monocromática en un obstáculo cualquiera (por ejemplo, en una red de difracción) consiste en la redistribución (provocada por dicho obstáculo) de los fotones en el espacio. La probabilidad de que los fo-

tones vayan a parar a distintos puntos de una pantalla colocada detrás del obstáculo, no es la misma, lo que explica la aparición en ella de la figura de difracción. La iluminación energética E_e (V.5.4.2°) de cualquier porción pequeña dS de la superficie de la pantalla es proporcional al número dn_{seg} de fotones que inciden sobre ella en 1 s. Por consiguiente, E_e es proporcional a la probabilidad de que los fotones vayan a parar a la unidad de área de la superficie de la pantalla en el punto considerado. Por otra parte, según las representaciones ondulatorias, E_e es proporcional al cuadrado de la amplitud A de la luz en este mismo punto de la pantalla. Además, el cuadrado de la amplitud de la onda luminosa en un punto cualquiera del espacio, es la medida de la probabilidad de que los fotones vayan a parar a dicho punto.

4°. Los experimentos de difracción de la luz demuestran que si varía la intensidad del flujo luminoso que incide sobre el obstáculo, la forma de la figura de difracción, es decir, la relación entre las iluminaciones de los distintos puntos de la pantalla no cambia. Esto demuestra que las propiedades ondulatorias no son propias solamente del conjunto de un gran número de fotones proyectados simultáneamente, sino también de cada fotón por separado. Cuando un fotón pasa por un sistema óptico, no es posible indicar a qué punto de la pantalla irá a parar. Sólo se puede hablar de la probabilidad dw de que el fotón incida sobre cualquier pequeña porción dS de superficie de dicha pantalla.

Capítulo VI.1

Elementos
de la mecánica cuántica

§ IV.1.1.

Dualidad ondulatoria-corpúscular
de las propiedades de las partículas
de la sustancia

1°. La física de los átomos, moléculas y sus conjuntos, en particular, de los cristales, así como de los núcleos atómicos y de las partículas elementales, se estudia en la *mecánica cuántica**). Los objetos del micromundo que estudia la mecánica cuántica tienen dimensiones lineales del orden de 10^{-6} — 10^{-13} cm. Si las partículas se mueven con velocidades $v \ll c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío, se aplica la mecánica cuántica no relativista, y si lo hacen con velocidades $v < c$, la mecánica cuántica relativista**).

2°. Los fundamentos de la mecánica cuántica son las ideas de Planck sobre el carácter discreto de la variación de la energía de los átomos (V.5.3.2°), y las ideas de Einstein sobre los fotones (V.6.1.4°), así como los datos acerca de la calidad cuántica de algunas magnitudes físicas (como el impulso y la energía) que caracterizan, en determinadas condiciones, el estado de las partículas del micromundo.

3°. En la mecánica cuántica es fundamental la idea de que la dualidad ondulatoria-corpúscular de las propiedades, establecida para la luz (V.6.4.1°), tiene carácter universal. Esta dualidad debe manifestarse en todas las partículas que poseen impulso p . Todas las partículas con impulso p finito tienen propiedades on-

*) En el período de su creación se llamó también *mecánica ondulatoria*.

***) Los conocimientos sobre la mecánica cuántica relativista rebasan los límites de este manual. En adelante, por mecánica cuántica se entenderá en todas partes la mecánica cuántica no relativista.

dulatorias y su movimiento va acompañado de cierto proceso ondulatorio.

4°. La fórmula de De Broglie establece la dependencia de la longitud de la onda asociada a la partícula de substancia en movimiento, respecto de su impulso p :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

donde m es la masa de la partícula; v , su velocidad; y h , la constante de Planck (IX). Las ondas a que nos referimos se denominan *ondas de De Broglie*.

Otra forma de la fórmula de De Broglie es

$$p = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k,$$

en la que $k = \frac{2\pi}{\lambda} n$ es el vector de onda, cuyo módulo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, llamado número de onda, es el número de longitudes de onda que caben en 2π unidades de longitud; n es el vector unitario en dirección de propagación de la onda; y $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

5°. La longitud de onda de De Broglie para una partícula de masa m , cuya energía cinética es W_c (I.3.2.1°), constituye

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW_c}}.$$

En particular, para un electrón acelerado en un campo eléctrico con diferencia de potencial de $\Delta\varphi$ voltios (III.3.2.7°),

$$\lambda = \frac{12,25}{\sqrt{\Delta\varphi}} \text{ \AA}.$$

6°. La fórmula de De Broglie se ve confirmada en los experimentos de difusión de los electrones y otras partículas en los cristales, así como en los experimentos de paso de estas últimas a través de la substancia. El indicio del proceso ondulatorio en todos estos experimentos es la figura de difracción de la distribución de los electrones (u otras partículas) en los receptores de partículas.

Las propiedades ondulatorias no se manifiestan en los cuerpos macroscópicos. Las longitudes de onda de De Broglie para estos cuerpos son tan pequeñas que resulta imposible descubrir dichas propiedades.

7°. Además de la fórmula de De Broglie, en la mecánica cuántica se admite que, entre la energía total W de una partícula y la frecuencia ν de su onda de De Broglie, existe la relación

$$W = h\nu = \hbar\omega,$$

en la que $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia cíclica (IV.1.1.2°), y $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (p. 4°).

8°. La velocidad de fase de las ondas de De Broglie (IV.3.2.10°) constituye

$$v_{\text{fas}} = \frac{\omega}{k} = \frac{W}{p}$$

La velocidad de grupo de las ondas de De Broglie (IV.3.4.3°) es igual a la velocidad de la partícula v :

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v.$$

En la tabla VI.1.1 se confrontan las propiedades corpusculares y ondulatorias de una partícula libre, de masa m , que se mueven con velocidad v .

Tabla VI.1.1

Propiedades corpusculares	Propiedades ondulatorias
Velocidad v	Longitud de onda de De Broglie $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$
Impulso $p = mv$	Frecuencia de la onda de De Broglie $\nu = \frac{W}{h}$
Energía de la partícula libre $W = \frac{p^2}{2m}$	Velocidad de grupo de las ondas de De Broglie $u = v$ Velocidad de fase de las ondas de De Broglie $v_{\text{fas}} = \frac{v}{2}$

9°. Las ondas de De Broglie tienen una naturaleza específica carente de analogía con las ondas radiadas de la física clásica: el cuadrado del módulo de la amplitud de la onda de De Broglie en un punto dado es la medida de la probabilidad de que la partícula se encuentre en este punto (*sentido probabilista, estadístico, de las ondas de De Broglie*). Las figuras de difracción que se observan en los experimentos indicados en el p. 6° son una manifestación de la ley estadística según la cual las partículas van a parar a determinados puntos de los receptores, es decir, a aquellos en que la intensidad de la onda de De Broglie (VI.3.3.6°) resulta ser máxima. Las partículas no se descubren en los sitios en que, de acuerdo con la interpretación estadística, el cuadrado del módulo de la amplitud de la «onda de probabilidad» se anula.

§ VI.1.2. Ecuación de Schrödinger

1°. En la mecánica cuántica, la posición de una partícula en el espacio, en un instante dado, se determina mediante la *función de onda (función psi)* $\psi(x, y, z, t)$. La probabilidad $d\omega$ de que la partícula se encuentre en un elemento de volumen dV es proporcional a $|\psi|^2$ y al elemento de volumen dV :

$$d\omega = |\psi|^2 dV,$$

donde $|\psi|^2$ es el cuadrado del módulo de la función ψ : $|\psi|^2 = \psi\psi^*$. Aquí ψ^* es la función conjugada compleja de ψ . La magnitud $|\psi|^2$ es la *densidad de probabilidad* $|\psi|^2 = \frac{d\omega}{dV} = \rho$ que da la probabilidad de que la partícula se encuentre en un punto dado del espacio. La intensidad de la onda de De Broglie viene determinada por la magnitud $|\psi|^2$.

2°. De la definición de la función ψ se deduce la *condición de normalización de las probabilidades*:

$$\int |\psi|^2 dV = 1,$$

donde la integral triple de volumen se extiende a las coordenadas x, y, z desde $-\infty$ hasta $+\infty$, es decir, a todo el espacio infinito. La condición de normalización indica que la presencia de una partícula en cualquier punto del espacio es un suceso cierto y que su probabilidad deberá ser igual a la unidad.

3°. La función de onda $\psi(x, y, z, t)$ es la característica fundamental del estado de los microobjetos (átomos, moléculas,

partículas elementales). Con su ayuda se calcula el valor medio de la magnitud física L que caracteriza el objeto que se halla en el estado descrito por la función de onda ψ ,

$$\langle L \rangle = \iiint L |\psi|^2 dx dy dz,$$

donde $\langle L \rangle$ es el valor medio de la magnitud L , y la integración se efectúa como se indica en el p. 2°.

4°. Se llama *ecuación temporal de Schrödinger* la ecuación diferencial fundamental de la mecánica cuántica*) respecto de la función de onda $\psi(x, y, z, t)$. Esta ecuación determina la función ψ para las micropartículas que se mueven en un campo de fuerzas de energía potencial $U(x, y, z, t)$ (I.3.3.1°) con velocidad $v \ll c$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. La ecuación de Schrödinger tiene la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z, t) \psi,$$

donde Δ es el operador de Laplace; m , la masa de la partícula; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; h , la constante de Planck; e $i = \sqrt{-1}$, la unidad imaginaria.

La ecuación de Schrödinger se completa con las condiciones que se imponen a la función ψ :

a) la función ψ debe ser finita, unívoca y continua;

b) las derivadas $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ y $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ deben ser continuas;

c) la función $|\psi|^2$ debe ser integrable, es decir $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV$

debe ser finita. Esta condición, en los casos más simples, se reduce a la condición de normalización de las probabilidades (p. 2°).

5°. En caso de que la función ψ no dependa del tiempo $\psi = \psi(x, y, z)$, ésta satisfará la ecuación estacionaria de Schrödinger:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \psi = 0,$$

*) Véase la llamada

**) del punto VI.1.1.1°.

donde W es la energía total de la partícula. Las demás notaciones véanse en el p. 4°. Las funciones ψ que satisfacen la ecuación de Schrödinger para una forma dada de $U = U(x, y, z)$, se llaman *funciones propias*. Estas funciones existen solamente para determinados valores de W llamados *valores propios de la energía*. El conjunto de valores propios de W forma el *espectro energético de la partícula*. Si U es una función monótona y $U \rightarrow 0$ en el infinito, en la región $W < 0$ los valores propios de la energía formarán un *espectro discreto*. El problema más importante de la mecánica cuántica es el de hallar los valores propios y las funciones propias.

6°. La ecuación temporal de Schrödinger tiene la solución

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i \frac{W}{\hbar} t}$$

El estado de la partícula en un instante dado se define por una función periódica del tiempo, de frecuencia cíclica $\omega = \frac{W}{\hbar}$, determinada por la energía total W de dicha partícula. Esto concuerda con la relación entre la energía total W de esta última y la frecuencia de la onda de De Broglie (VI.1.1.8°).

Si la partícula se halla en un estado energético determinado, de energía $W = \text{const}$, la probabilidad $d\omega$ de que se encuentre en el elemento de volumen dV no depende del tiempo:

$$d\omega = |\psi|^2 dV = \psi\psi^* dV.$$

Este estado de la partícula se llama *estacionario*. El átomo que se encuentra en estado estacionario tiene energía constante y no emite ondas electromagnéticas (VI.2.1.7°).

§ VI.1.3. Movimiento de una partícula libre

1°. En el movimiento libre de una partícula ($U = 0$), su energía total W coincide con la energía cinética. Si el eje OX está dirigido a lo largo del vector v de velocidad de la partícula ($v = \text{const}$), la ecuación estacionaria de Schrödinger (VI.1.2.5°) tendrá la solución siguiente:

$$\psi = A e^{-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mW} x} + B e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mW} x}$$

donde m es la masa de la partícula; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; h , la constante de Planck; y A y B son unas constantes. La ecuación temporal de Schrödinger (VI.1.2.4°) tiene, en este caso, la solución

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{-i\left(\frac{W}{\hbar}t - \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar}x\right)} + Be^{-i\left(\frac{W}{\hbar}t + \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar}x\right)},$$

que es la superposición de dos ondas monocromáticas planas (IV.4.1.6°) de igual frecuencia $\omega = \frac{W}{\hbar}$, que se propagan, una en sentido positivo al eje OX , con amplitud A , y otra en sentido opuesto, con amplitud B .

2°. En la mecánica cuántica, una partícula libre se describe por una onda monocromática plana de De Broglie con número de onda k (VI.1.1.4°):

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mW}.$$

La probabilidad de que la partícula se encuentre en un punto cualquiera del espacio es constante. Para la onda que se propaga en sentido positivo al eje OX ,

$$|\psi|^2 = \psi\psi^* = |A|^2.$$

§ VI.1.4. Partícula en un pozo de potencial unidimensional de profundidad infinita

1°. Se llama *pozo de potencial* una región del espacio en la que la energía potencial U de la partícula es menor que cierto valor $U_{\text{máx}}$. En particular, cuando $U = U(x)$ y $U_{\text{máx}} = \infty$, tenemos un pozo de potencial unidimensional de profundidad infinita. Si la energía potencial de la partícula tiene, fuera y dentro del pozo, los siguientes valores (fig. VI.1.1):

$$U = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq L$$

$$U = \infty \quad \text{para} \quad x \leq 0 \quad \text{y} \quad x \geq L,$$

el pozo tiene «fondo plano».

El movimiento de los electrones «socializados» en un metal, se considera (en la teoría electrónica clásica) como el movimiento en un pozo de potencial, siendo la energía potencial del electrón igual a cero fuera del metal, y negativa y numéricamente igual al trabajo de salida del electrón del metal (VI.2.11.1°), dentro de él. El pozo de potencial representado en la fig. VI.1.1 es más simple que el pozo de potencial real de los electrones en el metal.

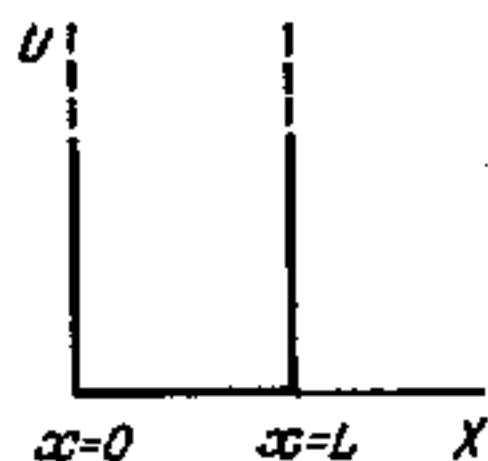


Fig. VI.1.1.

2°. La ecuación estacionaria de Schrödinger (VI.1.2.5°) para una partícula que se encuentre en el pozo de potencial considerado en el p. 1°, tiene la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} W\psi = 0$$

para las condiciones de frontera $\psi(0) = \psi(L) = 0$, que significan que $\psi = 0$ y $|\psi|^2 = 0$ fuera de la región $0 \leq x \leq$

$\leq L$, es decir, que la probabilidad de que la partícula se encuentre fuera del pozo de potencial es nula.

La solución de la ecuación de Schrödinger es

$$\psi(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx,$$

en la que A y B son constantes, y $k = \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar}$ es el número

de onda (VI.1.1.4°). De las condiciones de frontera se deduce que $A = 0$, $B \neq 0$ y $\operatorname{sen} kL = 0$, o sea, el número de onda toma una serie discreta de valores correspondientes a la condición $k_n L = n\pi$, en la que $n = 1, 2, 3, \dots$

Esta última ecuación significa que

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}, \text{ o } \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

En el fondo del pozo de potencial cabe un número entero de semiondas de De Broglie.

3°. Las magnitudes físicas que sólo pueden tomar determinados valores discretos se denominan *cuantizadas* o *cuantificadas* (*magnitudes físicas cuantizadas*). Los valores propios de la energía W_n de la partícula en el pozo de potencial unidimensional de profundidad infinita

$$W_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

son una serie discreta de valores de la energía, la cual está cuantizada (véase también VI.1.2.5°).

Los valores cuantizados de la energía W_n se llaman *niveles de energía*, y los números n que determinan el nivel de energía de la partícula en el pozo de potencial reciben el nombre de *números cuánticos*.

4°. Cuando los números cuánticos son grandes ($n \gg 1$) se produce un acercamiento relativo de los niveles energéticos de las partículas en el pozo de potencial: la relación $\frac{\Delta W}{W_n} \approx \frac{2}{n} \ll 1$, donde $\Delta W = W_{n+1} - W_n = (2n + 1) \frac{n^2 \hbar^2}{2mL^2}$. La desigualdad $\Delta W \ll W_n$ para $n \gg 1$ significa que la cuantización de la energía, cuando los números cuánticos son grandes, da resultados próximos a los que se obtienen en la física clásica, es decir, los niveles de energía se hacen *casicontínuos* (*casicontinuidad de los niveles de energía* para $n \gg 1$).

Principio de correspondencia de Bohr: las deducciones y los resultados de la mecánica cuántica para los números cuánticos grandes deben concordar con los resultados clásicos.

Una enunciación más general del principio de correspondencia es: entre cualquier teoría física que sea el desarrollo de la teoría clásica y la teoría clásica inicial, existe una relación regular, o sea, que, en determinados casos límites, la nueva teoría debe convertirse en la antigua. Por ejemplo, las fórmulas de la cinemática y la dinámica de la teoría especial de la relatividad se transforman en fórmulas de la mecánica de Newton para las velocidades en que $(\frac{v}{c})^2 \ll 1$ (I.5.3.4°). La óptica geométrica es un caso límite de la óptica ondulatoria si se puede despreciar la magnitud de la longitud de onda ($\lambda \rightarrow 0$).

§ VI.1.5. Oscilador lineal armónico

1°. Recibe el nombre de *oscilador lineal (unidimensional) armónico*, la partícula de masa m que oscila, con frecuencia cíclica propia ω_0 (IV.1.1.2°), a lo largo de cierto eje OX , a consecuencia de la acción de una fuerza cuasielástica F proporcional a la desviación x de la partícula de la posición de equilibrio: $F = -kx$. Aquí k es el coeficiente de la fuerza cuasielástica. Entre este coeficiente, m y ω_0 existe la relación $k = m\omega_0^2$

(IV.1.2.3°). La energía potencial del oscilador armónico (IV.1.2.3°) es

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

2°. La amplitud (IV.1.1.3°) de las pequeñas oscilaciones del oscilador armónico se determina (en la física clásica) por su reserva de energía total W (fig. VI.1.2). En los puntos B y A

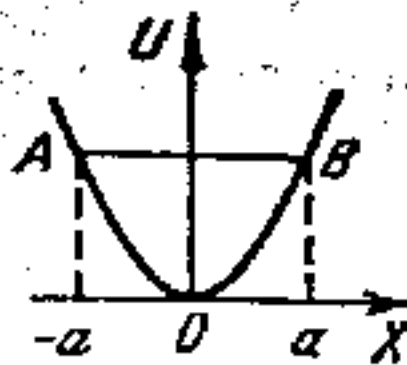


Fig. VI.1.2.

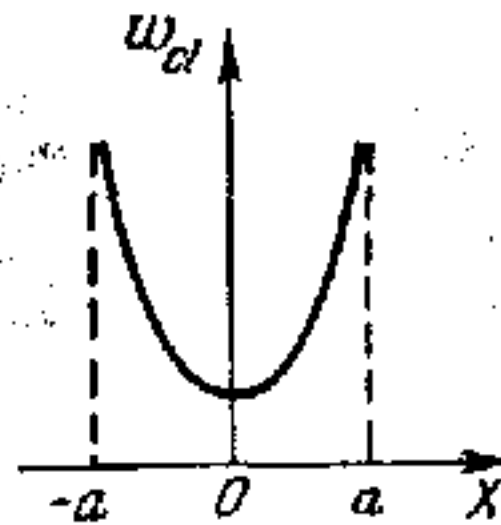


Fig. VI.1.3.

de coordenadas $\pm a$, la energía total W es igual a la energía potencial: $W = \begin{cases} U(a) \\ U(-a) \end{cases}$ donde a es la amplitud de las oscilaciones

del oscilador armónico clásico. Este oscilador no puede salir de los límites de la región $(-a, +a)$.

3°. La probabilidad $w_{cl}(x) dx$ de que el oscilador se encuentre en el segmento comprendido entre x y $x + dx$, según la mecánica clásica,

$$w_{cl}(x) dx = \frac{1}{\pi a} \frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}}$$

se representa por la curva de la fig. VI.1.3.

4°. En la mecánica cuántica, las oscilaciones del oscilador lineal armónico se estudian valiéndose de la ecuación estacionaria de Schrödinger (VI.1.2.5°):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(W - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación que satisfacen las condiciones (VI.1.1.4°) son las funciones (de onda) propias del oscilador

lineal armónico: las funciones propias para el oscilador armónico lineal son

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad \xi = \frac{x}{x_0}$$

donde $x_0 = \sqrt{\hbar/2\pi m\omega_0}$; y $H_n(\xi)$ es el polinomio de Chébishev — Hermite de orden n -ésimo:

$$H_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}$$

Las funciones propias para $n=0, 1, 2$ son

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0} \sqrt{\pi}} e^{-x^2/2x_0^2}, \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0} \sqrt{\pi}} \frac{2x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2},$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0} \sqrt{\pi}} \left(4 \frac{x^2}{x_0^2} - 2 \right) e^{-x^2/2x_0^2}$$

Se llama *nodo de una función de onda* su valor nulo. El número de nodos de la función ψ_n es igual al número cuántico n (VI.1.4.3°).

5°. Los valores propios de la energía W_n del oscilador armónico lineal son

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\nu_0 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

en los que $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ y ω_0 , que es la frecuencia cíclica propia (p. 1°), representan el conjunto de niveles de energía equidistantes entre sí, representados en la fig. VI.1.4. Para $n \gg 1$ ($n + \frac{1}{2} \approx n$) los niveles de energía del oscilador coinciden con las magnitudes de la energía cuantizada del oscilador $W'_n = n\hbar\omega_0$, que postuló Planck en la teoría de la radiación del cuerpo negro (V.5.1.5°).

6°. La energía mínima que puede tener un oscilador armónico lineal se llama *energía de punto cero* W_0 :

$$W_0 = \frac{\hbar\nu_0}{2} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad (\text{para } n=0).$$

En la física clásica y en la teoría de Planck se consideraba que $W_0 = 0$ (para $n=0$). Esto significa que el oscilador no oscila y se encuentra en posición de equilibrio. Los átomos osciladores

a la temperatura del cero absoluto ($T = 0$), según la física clásica, no deben oscilar. En la mecánica cuántica moderna se demuestra que al oscilador armónico no se le puede quitar su energía de punto cero por mucho que se enfríe, incluso llegando hasta el cero absoluto (II.4.8.4°). A la energía de punto cero del oscilador le corresponden sus *oscilaciones de punto cero*. En la mecánica cuántica, la energía de punto cero es un indicio característico de cualquier sistema de partículas. A temperaturas próximas al cero absoluto, la substancia se halla en estado condensado,

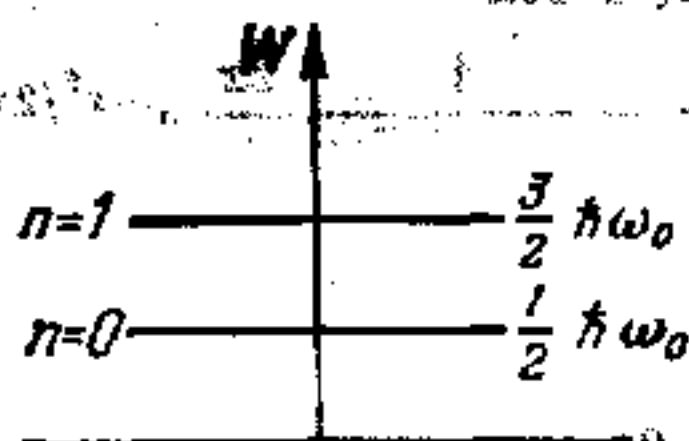


Fig. VI.1.4.

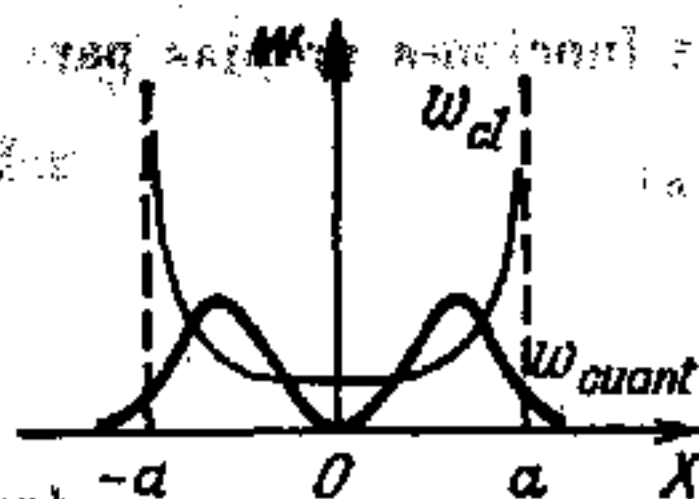


Fig. VI.1.5.

y sus átomos (moléculas o iones) se consideran como osciladores oscilantes. La energía de punto cero es la energía mínima que debe poseer un oscilador cuántico en su estado energético más bajo (cuando $n = 0$) para que se cumpla el principio de incertidumbre (VI.1.6.2°).

7°. La probabilidad de que el oscilador cuántico lineal armónico se encuentre sobre el eje OX en la región comprendida entre x y $x + dx$ constituye

$$w_{\text{cuánt}}(x) dx = |\psi_n(x)|^2 dx.$$

En la fig. VI.1.5 se compara la densidad de probabilidad cuántica para $n = 1$, con la densidad de probabilidad clásica $w_{cl}(x)$. La existencia de valores de $w_{\text{cuánt}}(x)$ distintos de cero fuera de los límites de la región permitida clásicamente $|x| \geq a$, se explica por la posibilidad de que las partículas que poseen propiedades ondulatorias pasen a través de la barrera de potencial (VI.1.7.2°).

8°. Al ir aumentando el número n , la curva de distribución de las probabilidades $|\psi_n|^2$, representada en la fig. VI.1.6 para $n = 10$, se va aproximando a la curva de probabilidad clásica (fig. VI.1.3), lo cual está de acuerdo con el principio de correspondencia de Bohr (VI.1.4.4°).

9°. Utilizando los valores propios de la energía del oscilador armónico lineal se puede calcular la energía media $\langle W \rangle$ de este oscilador:

$$\langle W \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar\omega_0}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1} = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \langle W_1 \rangle.$$

Salvo la energía de punto cero, $\langle W \rangle$ viene expresada por el tér-

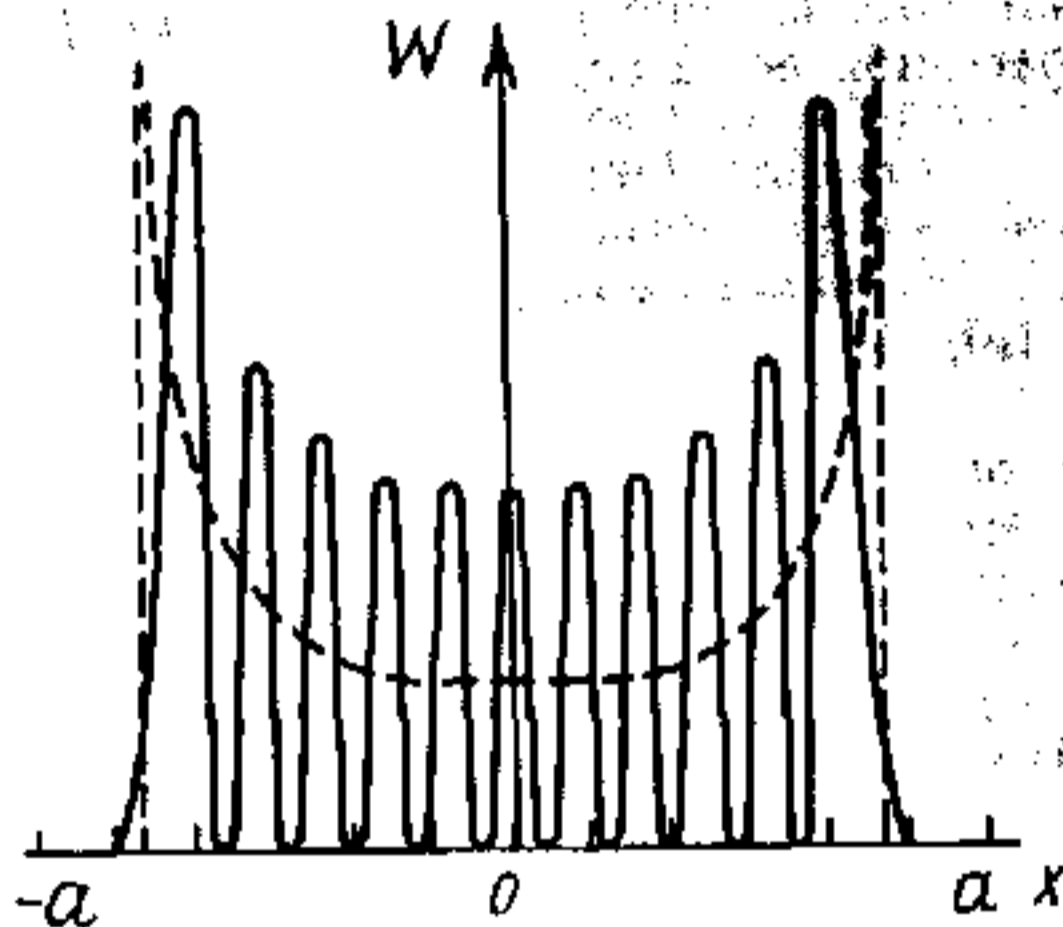


Fig. VI.1.6.

mino $\langle W_1 \rangle$ obtenido por Planck al crear su teoría de la radiación térmica del cuerpo negro. Este término se muestra gráficamente

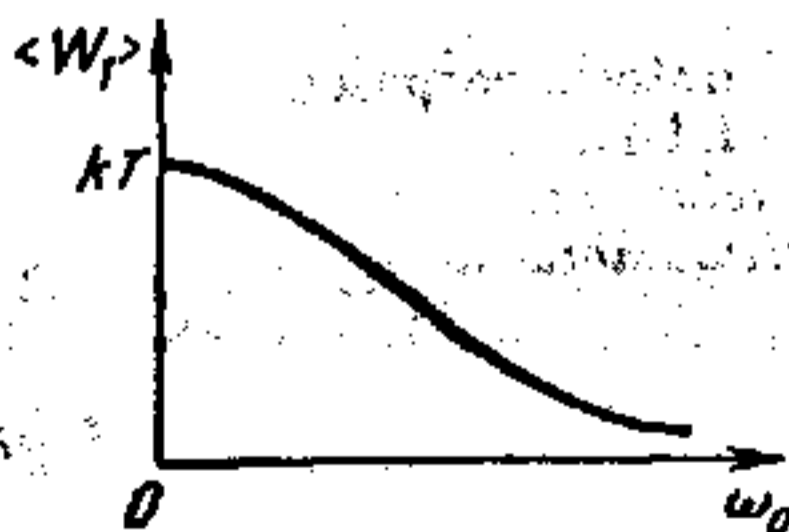


Fig. VI.1.7.

en la fig. VI.1.7, para $T = \text{const}$, en función de la frecuencia. Como puede verse, la mayor aportación a $\langle W_1 \rangle$ la hacen las

oscilaciones con frecuencias pequeñas, correspondientes a las longitudes de onda grandes.

A alta temperatura ($kT \gg \hbar\omega_0$)

$$\langle W_1 \rangle = \frac{\hbar\omega_0}{1 + \frac{\hbar\omega_0}{kT} - 1} = kT.$$

Este resultado coincide con el que se obtiene partiendo de la ley de equipartición de la energía según los grados de libertad (II.3.6.5°).

§ VI.1.6. Relaciones de incertidumbre de Heisenberg

1°. Las propiedades ondulatorias de las micropartículas (VI.1.1.4°) introducen limitaciones en la posibilidad de aplicar a estas partículas conceptos de coordenadas y de impulso en su sentido clásico.

En la física clásica también existen limitaciones en la aplicación de ciertos conceptos a determinados objetos. Así, el concepto de temperatura no tiene sentido aplicarlo a una molécula; el de localización puntual (situación en un punto) es inaplicable cuando se determina la posición de una onda en el espacio, etc. Pero en la mecánica clásica, a un valor determinado de las coordenadas de una partícula le corresponden valores exactos de su velocidad e impulso. En la mecánica cuántica, en cambio, existen limitaciones en cuanto a la posibilidad de determinar simultáneamente y con exactitud las coordenadas de una partícula y la magnitud de su impulso. Estas limitaciones se deben a la dualidad ondulatoria-corpúscular de las propiedades de las micropartículas (VI.1.1.3°).

2°. Se llaman *relaciones de incertidumbre o indeterminación (principio de incertidumbre) de Heisenberg* las desigualdades siguientes:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Aquí Δx , Δy y Δz indican los intervalos de las coordenadas en que se puede localizar una partícula definida por la onda de De Broglie (VI.1.1.2°) si las proyecciones de su impulso sobre los ejes de coordenadas están comprendidas en los intervalos Δp_x , Δp_y y Δp_z respectivamente. Las relaciones de Heisenberg mues-

tran que las coordenadas x, y, z de la partícula y las proyecciones p_x, p_y, p_z de su impulso sobre los ejes respectivos, no pueden tener al mismo tiempo valores exactamente iguales a x y p_x, y y p_y, z y p_z . Estas magnitudes físicas pueden tener valores dados con la exactitud determinada por las relaciones de Heisenberg. Cuanto más exactamente se determina la posición de la partícula, es decir, cuanto menores son $\Delta x, \Delta y$ y Δz , tanto menor es la exactitud con que se hallan los valores de las proyecciones de su impulso (o sea, mayores son $\Delta p_x, \Delta p_y$ y Δp_z). Si la posición de una partícula sobre el eje OX se ha determinado exactamente y $\Delta x = 0$, entonces $\Delta p_x = \infty$ y el valor de la proyección del impulso p_x será totalmente indeterminado.

3°. Las relaciones de incertidumbre imponen (en la mecánica cuántica) determinadas limitaciones a la posibilidad de describir el movimiento de una partícula por alguna trayectoria.

En la teoría clásica, en cada punto de su trayectoria, la partícula tiene coordenadas x, y, z determinadas y cierto impulso p con proyecciones p_x, p_y, p_z sobre los ejes. En la mecánica cuántica esto sólo es posible en los casos cuando la partícula se mueve en una región macroscópica del espacio (por ejemplo, si deja huella en una placa fotográfica o en la pantalla de un oscilógrafo). Si, por ejemplo, la posición de un electrón se determina conforme a la exactitud establecida por las dimensiones lineales de un grano de la emulsión fotosensible que experimenta la acción del electrón, entonces $\Delta x \sim 10^{-6} \text{m}$. A esto corresponde una indeterminación del impulso $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \sim 10^{-28} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ y de

la velocidad $\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \sim 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Esta indeterminación, cuando las velocidades de los electrones son del orden de $(10^6 - 10^7) \frac{\text{m}}{\text{s}}$, permite considerar que el electrón se mueve por una trayectoria determinada, con una velocidad dada exactamente en cada punto.

4°. Si la partícula se mueve en una región microscópica del espacio, las relaciones de incertidumbre influyen mucho en el carácter del movimiento de la partícula. Por ejemplo, la posición de un electrón que se mueve en un átomo se puede determinar con una exactitud de hasta las dimensiones del átomo, es decir, $\Delta x \sim 10^{-10} \text{m}$. La indeterminación de la velocidad Δv_x será, en este caso, del mismo orden que la propia velocidad: $\Delta v_x \approx \approx 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx v$. La trayectoria del electrón en el átomo, con una

velocidad dada exactamente en cada punto, carece de sentido clásico (I.1.2.3°). Esto no quiere decir que las relaciones de indeterminación evidencien que nuestros conocimientos del micromundo tengan que ser limitados por principio. Estas relaciones sólo reflejan que los conceptos de la física clásica tienen una aplicación limitada en la región del micromundo.

5°. Las relaciones de indeterminación no introducen limitaciones en la posibilidad de aplicar en el sentido clásico los conceptos de coordenadas e impulso cuando se trata de cuerpos macroscópicos. En éstos no se manifiestan propiedades ondulatorias (VI.1.1.6°) y, por lo tanto, las relaciones de indeterminación no se aplican a dichos cuerpos.

6°. La relación de indeterminación para la energía W y el tiempo t constituye

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

donde ΔW es la indeterminación de la energía de una partícula que se encuentra, durante el tiempo Δt , en un estado cuya energía es W . La energía de la partícula en ese estado se puede determinar con una exactitud tanto mayor cuanto más tiempo se encuentre la misma en tal estado.

7°. Se llama *medición* el proceso de interacción de un instrumento con el objeto que se estudia, cuyo resultado es la obtención de cierta información sobre las propiedades del último. Este proceso transcurre en un espacio y en un tiempo y es objetivo. Las interacciones del instrumento con los microobjetos y macroobjetos difieren mucho entre sí. En el último caso el proceso de medición se define con mayor o menor grado de exactitud por las leyes de la física clásica, y el instrumento no ejerce el objeto que se mide una influencia tal que no pueda ser considerada con exactitud por los términos o conceptos de la física clásica o reducida tanto como se quiera. En la mecánica cuántica, debido a la existencia objetiva de la dualidad de propiedades de los microobjetos (VI.1.1.3°), el proceso de medición está relacionado necesariamente con una influencia importante del instrumento sobre el desarrollo del fenómeno que se investiga. Por ejemplo, para determinar la posición de un electrón hay que «iluminarlo» con una luz cuya frecuencia sea la mayor posible. Como resultado de la colisión de un fotón con el electrón, el impulso de este último Δp_x variará en la magnitud determinada por la relación de indeterminación $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$ (p. 2°). La acción ejercida sobre el objeto durante el proceso de medición no se puede considerar pequeña o de poca importancia, porque el estado del objeto va-

ría. Esta variación es tal que, como resultado de la medición, ciertas características clásicas de la partícula, por ejemplo, su impulso, resultan dadas solamente dentro de los marcos limitados por las relaciones de indeterminación.

§ VI.1.7. Efecto túnel

1. Los pozos de potencial en que se encuentran las partículas pueden tener una forma mucho más compleja que la considerada en VI.1.4. Si la energía potencial de la partícula tiene la forma $U = U(r)$ representada en la fig. VI.1.8, ésta se mueve

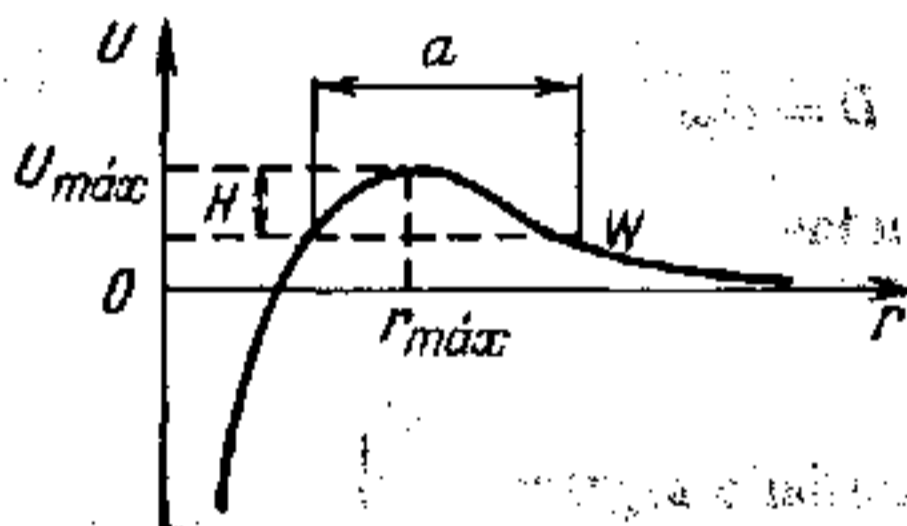


Fig. VI.1.8.

en un campo de fuerzas que se puede representar en forma de *barrera de potencial*. Esto quiere decir que las fuerzas actúan sobre la partícula en cierta región limitada del espacio. Fuera de esta región la partícula se mueve libremente. La altura H de la barrera y su anchura a dependen, para una partícula dada, de su energía W . Según la mecánica clásica, para que la partícula pueda salir del pozo de potencial o penetrar en él desde fuera, hay que comunicarle a ésta una energía igual o mayor que $|U_{máx} - U| = H$.

2°. Recibe el nombre de *efecto túnel* el paso («infiltración») de las partículas a través de las barreras de potencial. El efecto túnel es un fenómeno mecanocuántico debido a que las partículas tienen propiedades ondulatorias (VI.1.1.3°).

Se denomina *transparencia* (coeficiente de transparencia) D de una barrera de potencial, la magnitud

$$D = \frac{I_{trans}}{I_{ino}}$$

en la que I_{trans} es la intensidad (IV.3.3.6°) de la onda de Broglie transmitida a través de la barrera de potencial, e I_{inc} , la intensidad de la onda que incide sobre la barrera.

Para una barrera de potencial rectangular, de altura U_0 y anchura L (fig. VI.1.9), su transparencia viene expresada por la fórmula

$$D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m[U_0 - W]}L}$$

Aquí m es la masa de la partícula, y W , su energía.

Para una barrera de potencial de forma compleja,

$$D = D_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[U(x) - W]} dx}$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas del principio y del fin de la barrera de potencial $U(x)$ para un valor dado de la energía total

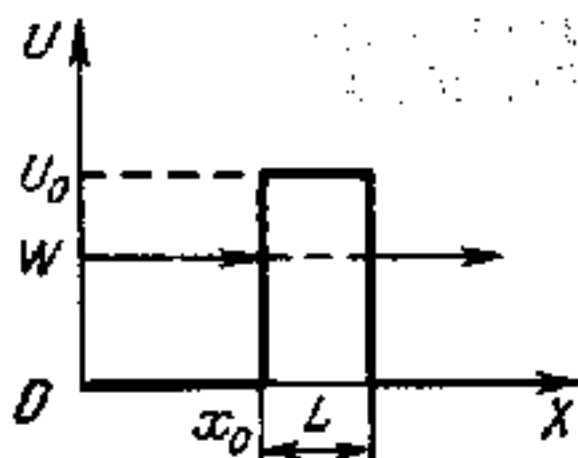


Fig. VI.1.9.

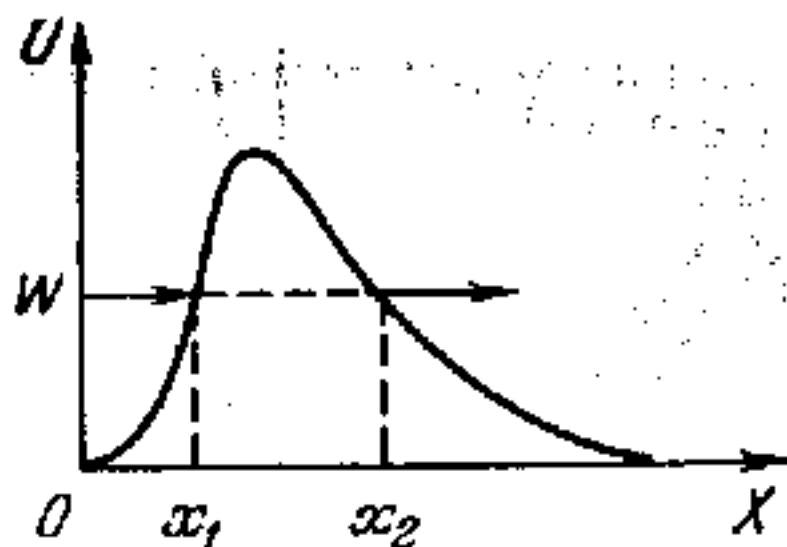


Fig. VI.1.10.

W (fig. VI.1.10). En estas fórmulas, D_0 es un factor constante próximo a la unidad.

3°. El efecto túnel desempeña un papel apreciable cuando la transparencia de la barrera no es demasiado pequeña. Esto se cumple en los casos cuando las dimensiones lineales de la barrera de potencial son comparables con las dimensiones de los átomos. Por ejemplo, cuando $U_0 - W = 10$ eV para el electrón ($m \approx 10^{-30}$ kg), siendo $L = 10^{-10}$ m, tenemos que $D \approx \frac{1}{e}$. Si $L = 10^{-2}$ m y las demás condiciones son las mismas que antes,

$D \approx e^{-10}$. La transparencia de la barrera disminuye a medida que aumenta la masa de la partícula y la diferencia $U_0 - W$.

4°. *La paradoja del efecto túnel* consiste en que el paso de la partícula a través de la barrera de potencial permite descubrirla en una región prohibida desde el punto de vista clásico, en la cual la energía potencial de la partícula es mayor que su energía total. En esta región la energía cinética de la partícula es negativa y, por consiguiente, su velocidad (impulso) es una magnitud imaginaria.

En realidad no existe tal paradoja. El efecto túnel es un fenómeno puramente cuántico y aquí es donde surge la dificultad, inesperada desde el punto de vista clásico, de representar la energía total W en forma de suma de la energía cinética y la

energía potencial: $W = \frac{p^2}{2m} + U(x)$. En virtud de que la rela-

ción de indeterminación (VI.1.6.2°) excluye la posibilidad de atribuirle simultáneamente a la partícula valores de la coordenada x y del impulso p determinados con cualquier grado de exactitud, en la mecánica cuántica resulta injustificada la representación de la energía total en forma de suma de dos partes exactamente determinadas, la energía cinética $\frac{p^2}{2m}$ y la ener-

gía potencial $U(x)$. Si la coordenada x de la partícula se ha fijado en la región Δx y su energía potencial $U(x)$ se ha determinado con suficiente exactitud, la indeterminación Δp introducida en el valor de impulso de la partícula ($\Delta p \approx \hbar/\Delta x$) no permitirá hablar de un valor determinado de la energía cinética $p^2/2m$. Por consiguiente, tampoco se podrá hablar del valor antedicho de su energía total W . Por lo tanto, resulta que la variación de la energía cinética ΔW_c a causa de haber fijado la coordenada, es mayor que la diferencia entre la altura de la barrera U_0 (fig. VI.1.9) y la energía total W de la partícula:

$$\Delta W_c > U_0 - W.$$

ΔW_c supera la energía que le falta a la partícula que se halla dentro del pozo de potencial para poder salir de éste por el «procedimiento clásico», es decir, pasando por encima de la barrera.

Acercas del efecto túnel en la física del sólido y en el fenómeno de desintegración se trata en VII.2.8.3° y VIII.1.5.2°.

Capítulo VI.2. Estructura de los átomos y moléculas y sus propiedades ópticas

§ VI.2.1. Átomo de hidrógeno y iones hidrogenoides

1°. Se llama *átomo* la menor partícula de la sustancia, que posee todas las propiedades químicas de un elemento químico dado. El átomo consta de un núcleo con carga positiva y de electrones que se mueven en el campo eléctrico del núcleo. La carga del núcleo Ze (VIII.1.1.2°) es igual, en magnitud absoluta, a la carga total de todos los electrones del átomo. Se da el nombre de *ion* a la partícula con carga eléctrica que resulta cuando un átomo o una molécula pierden o adquieren electrones.

2°. El átomo más simple es el de hidrógeno, que consta de un protón en el núcleo y de un electrón que se mueve en el campo eléctrico coulombiano del núcleo. *Hidrogenoides* (o *hidrógeno isoelectrónico*) son los iones He^+ , Li^{++} , Be^{+++} y otros, que tienen un núcleo con carga Ze y un electrón.

3°. Entre las propiedades ópticas del átomo, la más importante es su espectro de radiación. Las frecuencias de las rayas ν en el espectro de rayas (discreto) del átomo de hidrógeno se definen por la fórmula de Balmer—Rydberg:

$$\nu = cR' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

donde

$$R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \quad (\text{en el SI}),$$

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

Aquí c es la velocidad de la luz en el vacío; m , la masa del electrón; e , su carga; h , la constante de Planck; y ϵ_0 , la constante eléctrica en el sistema SI (III.1.2.6°).

Las magnitudes R y $R' = R/c$ se llaman *constantes de Rydberg* en s^{-1} y cm^{-1} o m^{-1} respectivamente: $R = 3,2931193 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$; $R' = 1,0973731 \cdot 10^7 \text{m}^{-1}$.

Los números enteros n y m reciben el nombre de números cuánticos principales, siendo $m = n + 1, n + 2, \text{etc.}$ Un grupo de rayas con igual n se llama *serie*. La serie de rayas del espectro del hidrógeno, correspondiente a $n = 1$, se denomina *serie de Lyman*; la correspondiente a $n = 2$, *serie de Balmer*; la de $n = 3$, *serie de Paschen*; la de $n = 4$, *serie de Brackett*; la de $n = 5$, *serie de Pfund*, y la de $n = 6$, *serie de Humphrey*.

Para los iones hidrogenoides (p. 1°) la fórmula de Balmer — Rydberg es

$$\nu = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

en la que Z es el número de orden del elemento en el sistema periódico de Mendeléiev (VI.2.3.5°).

4°. A cada valor del número cuántico n en la fórmula de Balmer—Rydberg le corresponde un límite o frontera de la serie, cuya frecuencia es la máxima (para $m = \infty$), llamado término T_n :

$$T_n = \frac{R}{n^2} \text{ (para el hidrógeno), } T_n = \frac{Z^2 R}{n^2} \text{ (para un ion hidrogenoide).}$$

5°. La energía de un ion hidrogenoide en el estado correspondiente al número cuántico principal n constituye

$$W_n = -\frac{Z^2 R h}{n^2}; \quad T_n = \frac{|W_n|}{h}.$$

Se denomina *energía de enlace* del electrón en el átomo, la magnitud absoluta de W_n . El valor mínimo W_1 (para $n = 1$) corresponde al *estado fundamental o normal del átomo* (p. 9°). Todos los valores de la energía para $n > 1$ caracterizan *estados excitados del átomo*. El distintivo más importante de los estados excitados es el tiempo finito τ de vida del electrón en estos estados: $\tau \approx 10^{-8}$ s. En el estado normal del átomo aislado de las acciones externas, τ es ilimitado. El valor máximo $W_{\text{máx}} = 0$ para $n \rightarrow \infty$ corresponde a la *ionización del átomo o ion*, es decir, a la separación de un electrón de él. La energía de ionización es igual a la energía de enlace del electrón en el átomo (o ion).

El potencial de ionización (III.3.2.6°) del átomo de hidrógeno o de un ion hidrogenoide que se encuentre en el estado de número principal n , es $\varphi = \frac{Z^2 R h}{en^2}$ donde e es la magnitud absoluta de la carga del electrón. En la fig. VI.2.1 se dan los esque-

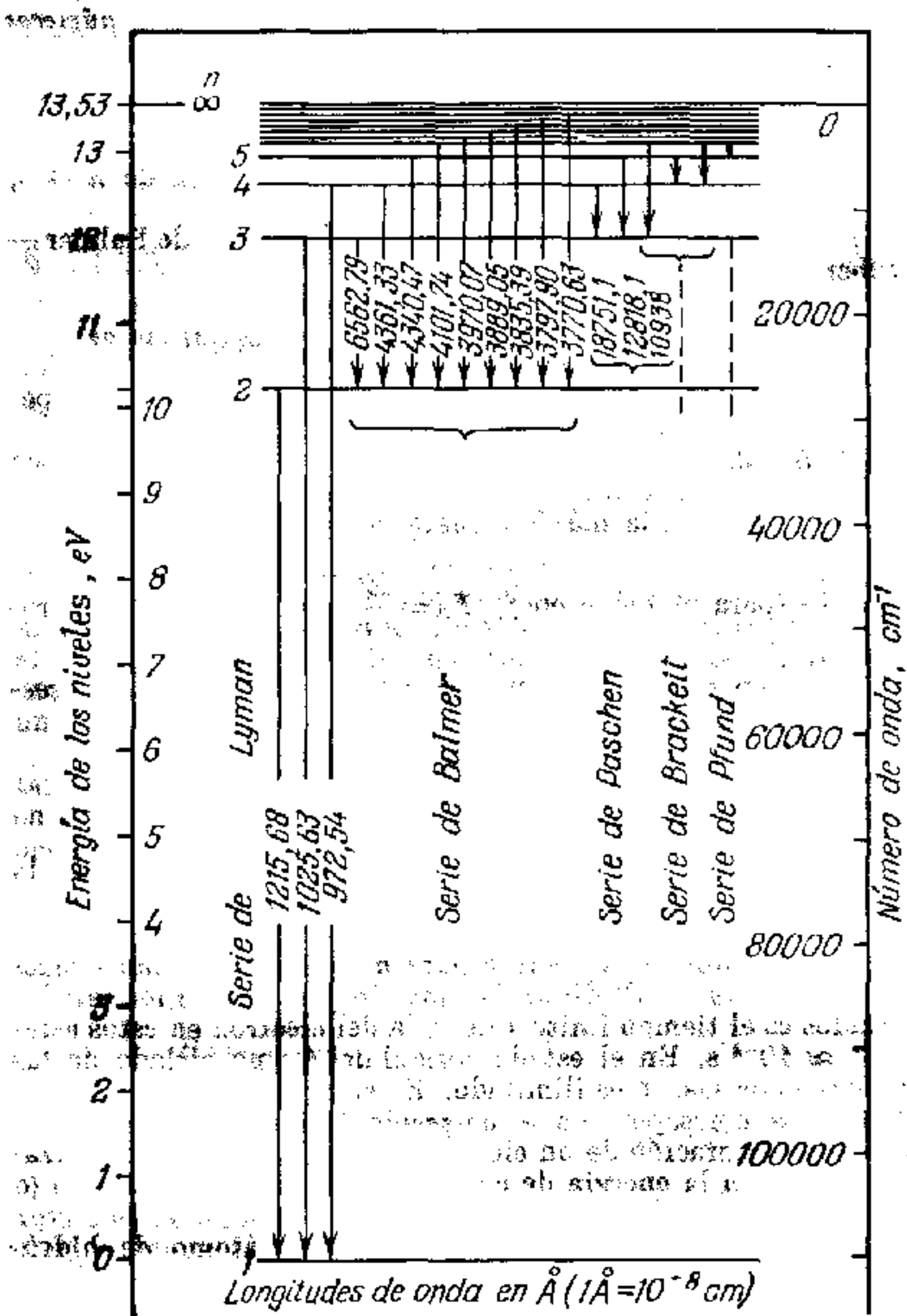


Fig. VI.2.1. Estructura de los niveles de energía del átomo de hidrógeno.

mas de los niveles de energía del átomo de hidrógeno y la disposición de sus series de rayas espectrales.

6°. El espectro y los niveles de energía del átomo de hidrógeno fueron interpretados por primera vez mediante los postulados de Bohr.

Primer postulado de Bohr (postulado de los estados estacionarios): existe un conjunto de estados estacionarios del átomo, en los cuales éste no emite ondas electromagnéticas. A los estados estacionarios les corresponden órbitas estacionarias (p. 8°) por las que se mueven aceleradamente los electrones, pero no emiten luz (compárese con (IV.4.3.4°)). Este primer postulado de Bohr fue explicado por la mecánica cuántica (VI.1.2.6°).

Segundo postulado de Bohr (regla de cuantización de las órbitas): en un estado estacionario del átomo, los valores cuánticos del momento de impulso (momento cinético o angular) del electrón que se mueve por una órbita circular, satisfacen la siguiente condición:

$$L_k = mvr = k\hbar \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Aquí m es la masa del electrón; v , su velocidad; r , el radio de la k -ésima órbita; y $\hbar = h/2\pi$. El número entero k es igual al número de ondas de De Broglie para el electrón (VI.1.1.4°), que caben en la longitud de la órbita circular: $\frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r m v}{h} = k$.

De la cuantización del momento de impulso en la mecánica cuántica se trata en el p. 8°.

Tercer postulado de Bohr (regla de las frecuencias): cuando un átomo pasa de un estado estacionario a otro, emite o absorbe un fotón. La emisión del fotón se produce al pasar el átomo de un estado de mayor energía a un estado de energía menor. Cuando ocurre la transición inversa se produce la absorción del fotón. La energía $h\nu$ del fotón es igual a la diferencia de energía entre los dos estados del átomo:

$$W_n - W_m = h\nu.$$

Si $W_n > W_m$ se produce la emisión del fotón, y si $W_n < W_m$, la absorción.

En la mecánica cuántica, la regla de las frecuencias de Bohr se deduce de la teoría de las transiciones cuánticas del átomo de un estado de energía a otro. El estudio de esta teoría queda fuera de los límites de este manual.

7°. La ecuación estacionaria de Schrödinger (VI.1.2.5°) para el movimiento del electrón en el campo coulombiano de un

núcleo con carga Ze (VIII.1.1.2°) tiene la forma

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \psi = 0,$$

donde $U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ es la energía potencial del electrón que se encuentra a la distancia r del núcleo; ϵ_0 , la constante eléctrica en el SI (III.1.2.6°); y W , la energía total del electrón en el átomo, que hay que buscar suponiendo que las funciones de onda ψ satisfacen las condiciones indicadas en (VI.1.2.4°).

8°. La solución de la ecuación estacionaria de Schrödinger para el electrón en el campo central-simétrico coulombiano del núcleo conduce a los siguientes resultados:

a) El momento de impulso del electrón en el átomo se cuantiza de acuerdo con la fórmula

$$L_l = \sqrt{l(l+1)} \hbar,$$

en la que el número cuántico orbital l , que determina el momento de impulso, varía dentro de los límites de $l = 0, 1, \dots, (n - 1)$; n es el número cuántico principal (p. 3°).

b) Cuando $W < 0$, el electrón está «ligado» al átomo, sus movimientos son periódicos y los valores de la energía total W están cuantizados. Los valores propios de W_n (VI.1.2.5°) se determinan por la fórmula

$$W_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{Z^2 R h}{n^2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$W_n = -\frac{2\pi^2 Z^2 m e^4}{h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{Z^2 R h}{n^2} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

En esta fórmula, R es la constante de Rydberg (p. 4°), y n , el número cuántico principal (p. 4°). La solución de la ecuación de Schrödinger para el electrón en un ion hidrogenoide conduce a niveles de energía del tipo de Balmer—Rydberg (p. 4°).

9°. En dependencia de los valores del número cuántico orbital se han adoptado las siguientes notaciones para los estados del electrón en los átomos:

estado s para $l = 0$, estado p para $l = 1$,

estado d para $l = 2$, estado f para $l = 3$, etc.

El estado s del electrón en el átomo de hidrógeno, para $n = 1$, se llama estado fundamental (véase también el p. 5°). Este estado es simétricamente esférico. La función de onda de este estado sólo depende de la distancia r entre el núcleo y el

electrón ($\psi = \psi(r)$) y tiene la forma

$$\psi = \psi(r) = Ce^{-r/a_0},$$

en la que C es una constante que se determina partiendo de las condiciones de normalización de las probabilidades (VI.1.2.2°), y a_0 es el primer radio de Bohr:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \quad (\text{en el SI}),$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (\text{en el sistema de Gauss}).$$

En la mecánica cuántica, las órbitas electrónicas se consideran como el lugar geométrico de los puntos en los cuales es mayor la probabilidad de que se encuentre el electrón. En particular, para el estado s del átomo de hidrógeno, una órbita de este tipo es la primera órbita circular de Bohr, cuyo radio es igual a a_0 .

§ VI.2.2. Cuantificación espacial

1°. Se llama *cuantificación* o *cuantización espacial* la existencia (demostrada en la mecánica cuántica) de determinadas orientaciones discretas en el espacio del vector momento de impulso L_l del electrón. Sólo son posibles aquellas orientaciones L_l en las cuales la proyección L_{lz} del vector L_l sobre la dirección Z del campo magnético exterior toma valores múltiplos de \hbar :

$$L_{lz} = m\hbar,$$

donde m es un número entero, denominado *número cuántico magnético*, que toma los valores $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, y l es el número cuántico orbital (VI.2.1.8°).

La fig. VI.2.2 representa la cuantización espacial de los vectores L_l para los electrones que se encuentran en los estados p y d (VI.2.1.9°).

2°. En virtud de que el vector momento de impulso del electrón es proporcional al momento magnético orbital (III.13.1.2°),

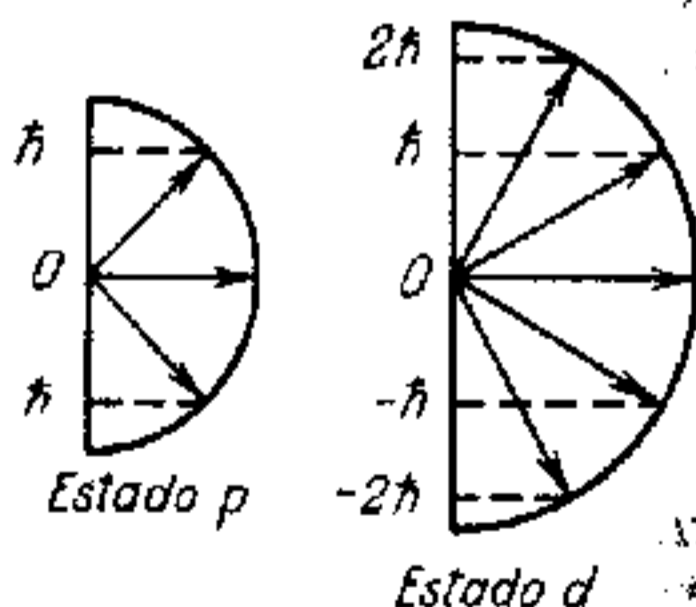


Fig. VI.2.2.

de la cuantización espacial se deduce que el vector \mathbf{p}_m del momento magnético orbital del electrón (III.13.1.1°) no puede tomar orientaciones arbitrarias en el campo magnético externo.

3°. Experimentalmente se ha establecido que se observa la cuantización espacial de los átomos con un electrón de valencia (periférico) en el estado s (VI.2.1.9°) ($l = 0$). En este estado de los átomos está ausente en ellos el momento de impulso ($L_0 = 0$, VI.2.1.8°). La cuantización espacial descubierta en estos experimentos se debía al espín del electrón y confirmó la existencia de dos orientaciones posibles del espín en el campo magnético externo (III.13.1.3°).

La magnitud absoluta del momento de impulso (o angular) del espín del electrón L_{ls} se halla por la fórmula (VI.2.1.8°):

$$L_{ls} = \sqrt{s(s+1)} \hbar,$$

donde s es el número cuántico de espín, $s = 1/2$. Por esto, el valor numérico del espín del electrón (III.13.1.3°) constituye

$$L_{ls} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar.$$

La cuantización espacial del espín significa que la proyección L_{lsz} del vector de espín L_{ls} sobre la dirección del campo magnético externo se halla por la fórmula

$$L_{lsz} = m_s \hbar,$$

donde m_s es el número magnético de espín, que difiere del número de espín s en que puede tomar dos valores: $+ 1/2$ y $- 1/2^*$.

§ VI.2.3. Principio de Pauli. Sistema periódico de los elementos de Mendeléiev

1°. La enunciación más simple del principio de Pauli (o principio de exclusión) es: en todo átomo no puede haber dos electrones que se encuentren en dos estados estacionarios iguales, determinados por el conjunto de cuatro números cuánticos: principal n , orbital l , magnético m y de espín m_s .

* Con frecuencia entre dos números cuánticos de espín s y m_s no se hace distinción, y al decir número cuántico de espín se entiende que éste es m_s y al mismo se le atribuyen dos valores: $\pm 1/2$.

Al principio de Pauli, además de los electrones, se subordinan otras partículas que tienen espín semientero (en unidades \hbar). En cualquier sistema de fermiones (VII.2.2.4°) no puede haber dos partículas que se encuentren en estados cuánticos iguales (VII.2.1.4°).

Para los electrones de un átomo, el principio de Pauli se escribe así:

$$Z_1(n, l, m, m_s) = 0 \text{ ó } 1,$$

donde $Z_1(n, l, m, m_s)$ es el número de electrones que permanecen en el estado caracterizado por un determinado conjunto de números cuánticos.

2°. El número máximo $Z_2(n, l, m)$ de electrones que se encuentran en los estados definidos por el conjunto de tres números cuánticos n, l, m y que sólo difieren en la orientación de sus espines, constituye

$$Z_2(n, l, m) = 2,$$

puesto que el número cuántico de espín m_s sólo puede adquirir dos valores: $1/2$ y $-1/2$.

3°. El número máximo $Z_3(n, l)$ de electrones que se hallan en los estados determinados por los números cuánticos n y l constituye

$$Z_3(n, l) = 2(2l + 1).$$

Aquí se tiene en cuenta que el vector L_l para un valor dado de l puede tomar en el espacio $(2l + 1)$ orientaciones distintas.

4°. El número máximo $Z(n)$ de electrones que se hallan en los estados determinados por el valor n del número cuántico principal constituye

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{l=n-1} Z_3(n, l) = 2n^2.$$

En la tabla VI.2.1 se dan los números máximos de electrones que hay en los estados caracterizados por los valores dados de los números cuánticos principal n y orbital l .

5°. Este sistema de ocupación de los estados electrónicos de los átomos y la periodicidad con que varían las propiedades de los elementos químicos, permite ordenar estos últimos tal como están en el sistema periódico de los elementos de Mendeléiev. La teoría moderna del sistema periódico se basa en los siguientes postulados:

Tabla VI.2.1

n	Capa	Número de electrones en los estados					Número máximo de electrones
		$s (l = 0)$	$p (l = 1)$	$d (l = 2)$	$f (l = 3)$	$g (l = 4)$	
1	K	2	—	—	—	—	2
2	L	2	6	—	—	—	8
3	M	2	6	10	—	—	18
4	N	2	6	10	14	—	32
5	O	2	6	10	14	18	50

a) el número de orden Z de cada elemento químico es igual al número total de electrones que hay en el átomo de dicho elemento;

b) el estado de los electrones en el átomo viene determinado por un conjunto de cuatro números cuánticos: n , l , m , m_s . La distribución de los electrones en los átomos, según los estados energéticos, debe satisfacer el principio del mínimo de energía potencial: al ir creciendo el número de electrones, cada electrón siguiente debe ocupar el posible estado energético de menor energía;

c) la ocupación de los niveles energéticos del átomo por los electrones debe hacerse de acuerdo con el principio de Pauli (p. 1°).

6°. Se llama *capa electrónica* el conjunto de estados electrónicos del átomo con igual valor del número cuántico principal n (VI.2.1.4°). Existen las capas electrónicas siguientes (tabla VI.2.1): K, para $n = 1$; L, para $n = 2$; M, para $n = 3$; N, para $n = 4$, etc.

Dentro de cada capa electrónica los electrones se distribuyen en *subcapas* o *subgrupos*, cada uno de los cuales corresponde a cierto valor del número cuántico orbital l (VI.2.1.8°).

7°. El orden de ocupación de los estados energéticos en las capas, en una capa y en las subcapas, por los electrones del átomo, debe corresponder al orden de sucesión en que se encuentran los niveles energéticos con valores dados de n y l , y cumplir el principio de Pauli (VI.2.3.5°b). Para los átomos ligeros, este orden responde a que primero sea ocupada la capa cuyo valor de n es menor, y únicamente cuando ésta ya esté completa, empieza a ser ocupada (por los electrones) la capa siguiente. Dentro de una capa determinada se ocupan primero los estados que

tienen $l = 0$ y luego los estados de l mayor, hasta llegar a $l = n - 1$.

Este sistema periódico ideal de los elementos químicos tendría la estructura y el número de elementos en cada período (longitud del período), correspondientes a la tabla VI.2.1.

8°. Las alteraciones del orden indicado en el p. 7° comienzan en el potasio ($Z = 19$) y se explican como sigue. La interacción entre los electrones del átomo hace que, cuando los números cuánticos principales n son suficientemente grandes, los estados con valor de n mayor y de l menor pueden tener menor energía, es decir, ser energéticamente más convenientes que los estados de n menor pero de l mayor. Como resultado de esto, existen elementos químicos con capas anteriores incompletas, en los cuales empiezan a ser ocupadas las capas siguientes. Los elementos químicos en que se van completando las capas anteriores, estando ya parcialmente ocupadas las capas siguientes, se llaman *elementos de transición*.

9°. Reciben el nombre de *electrones periféricos* (o *de valencia*) de un átomo, los electrones de éste que en la capa con valor mayor de n forman parte de las subcapas s y p , es decir, tienen $l = 0$ ó $l = 1$ (VI.2.1.9°). Estos electrones determinan las propiedades químicas y ópticas de los átomos (véase también III.7.3.1°). El número total de electrones de las subcapas s y p es igual a 8 (tabla VI.2.1). La mayoría de las reacciones químicas se basan en la cesión o asimilación de electrones periféricos (o de valencia). Si un átomo tiene ocupados menos de la mitad de los estados de la subcapa ($s + p$), para él resulta teóricamente más conveniente la cesión de los electrones de valencia. En el caso contrario, cuando los electrones ocupan más de la mitad de la subcapa ($s + p$), resulta más conveniente, desde el punto de vista energético, la asimilación, por un átomo dado, de electrones de otros átomos durante el proceso de reacciones químicas.

§ VI.2.4. Enlaces químicos y estructura de las moléculas

1°. Se llama *molécula* la partícula más pequeña de una sustancia dada, que posee sus propiedades químicas fundamentales. La molécula está constituida por átomos (VI.2.1.1°) iguales o diferentes, unidos entre sí por *enlaces interatómicos*, químicos. Los enlaces químicos se explican por las diversas interacciones de los electrones periféricos o de valencia de los átomos

(VI.2.3.9°). Esto se pone de manifiesto en la variación del espectro óptico, que explica el comportamiento de estos electrones cuando los átomos forman la molécula.

Para descomponer una molécula en los átomos que la constituyen hay que realizar un trabajo determinado. Y al contrario, la formación de una molécula va acompañada de desprendimiento de energía. Esto demuestra que existen fuerzas que unen los átomos en las moléculas. La energía que se desprende al formarse una molécula sirve de medida de las fuerzas de interacción

que condicionan la unión de los átomos en las moléculas.

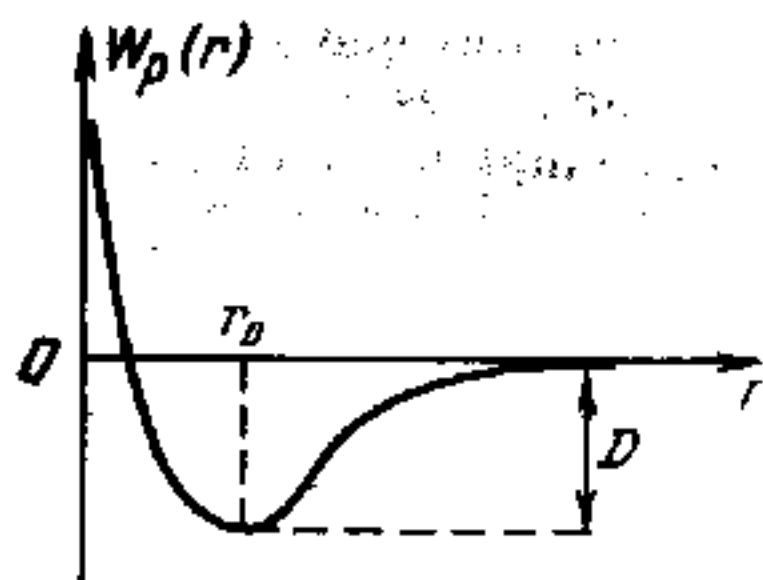


Fig. VI.2.3.

2°. Cuando las distancias r entre los átomos son grandes, es decir, mucho mayores que las dimensiones lineales d de los átomos, entre ellos actúan fuerzas de atracción mutua. A distancias r comparables con d , entre los átomos se desarrollan fuerzas de repulsión que impiden que los electrones de un átomo penetren demasiado profundamente en las capas electrónicas de otro

átomo. Lo mismo que en el caso de interacción entre moléculas (II.5.1.4°), las fuerzas de repulsión entre los átomos actúan a distancias más cortas que las fuerzas de atracción (fir. II.5.1). De los signos de las fuerzas de atracción y repulsión se habla en (II.5.1.4°).

3°. A cierta distancia r_0 entre los átomos de una molécula diatómica, las fuerzas de atracción y repulsión tienen sentidos opuestos, se equilibran entre sí y su suma geométrica es igual a cero. La distancia r_0 corresponde a la energía potencial mutua $W_p(r)$ de los átomos de la molécula diatómica (compárese con (II.5.1.6°)) (fig. VI.2.3). La distancia interatómica de equilibrio r_0 en la molécula se llama *longitud de enlace*. La magnitud D recibe el nombre de *energía de disociación* o *energía de enlace*, y es igual al trabajo que hay que realizar para descomponer la molécula en los átomos que la constituyen y alejar estos entre sí a una distancia infinita.

La energía de disociación es numéricamente igual a la energía que se desprende al formarse la molécula, pero de signo contrario a ella. La energía de disociación es negativa, mientras que la que se desprende al formarse la molécula es positiva.

4°. Se denominan *iónicas (heteropolares)* las moléculas que se originan como resultado de la transformación de los átomos que interaccionan, en iones (VI.2.1.1°), con cargas eléctricas de signo contrario, que se atraen mutuamente. Este tipo de enlace de los átomos se llama *iónico (o heteropolar)*. De base para la formación de moléculas iónicas sirve el comportamiento de los átomos que tienen la subcapa ($s + p$) periférica distintamente ocupada, indicada en (VI.2.3.9°). Son moléculas iónicas típicas las de las sales haloideas alcalinas formadas por iones de átomos de los elementos de los grupos I y VII del sistema periódico de Mendeléiev (VI.2.3.5°): NaCl (Na^+Cl^-), CsI (Cs^+I^-) y otros. Los metales del primer grupo tienen pequeños potenciales de ionización φ (VI.2.1.5°), y los del VII grupo se caracterizan por tener gran *afinidad electrónica* o cantidad de energía que se desprende cuando al átomo del metaloide se une un electrón. El paso de un electrón del átomo del metal al átomo del metaloide hace que se formen iones, cada uno de los cuales posee una subcapa periférica ($s + p$) (VI.2.3.9°) estable, con ocho electrones. Como resultado se forma una molécula iónica estable.

5°. Reciben el nombre de *moléculas atómicas (homopolares)* las que resultan de la atracción mutua de dos átomos neutros. El enlace químico de los átomos en la molécula homopolar se denomina *covalente*. El enlace covalente tiene propiedad de saturación (*saturación del enlace covalente*), que se manifiesta en que los átomos tienen una valencia determinada. El átomo de hidrógeno se enlaza únicamente con un solo átomo, y el átomo de carbono, con cuatro átomos como máximo. La molécula con enlace covalente más simple es la de hidrógeno H_2 , que está constituida por dos electrones y dos núcleos (protones).

De base para la explicación mecanocuántica del enlace covalente de la molécula H_2 sirve la indistinguibilidad (en principio) de las partículas idénticas, es decir, de los electrones en la molécula de hidrógeno (véase también (VII.2.1.2°)). Los electrones de la molécula H_2 «pertenecen» cada uno a un núcleo determinado, pero si cambian de sitio entre sí, resulta otro sistema igual, o sea, una molécula H_2 formada por dos electrones y dos núcleos. La indistinguibilidad de los electrones hace posible la existencia de *interacción mecanocuántica de intercambio* que se produce entre dos electrones idénticos. Esta interacción se interpreta del tal modo que el electrón de cada uno de los átomos de la molécula de hidrógeno permanece cierta fracción de tiempo junto al núcleo del otro átomo y, de esta manera, se efectúa el enlace de los dos átomos que forman la molécula. De los cálculos mecanocuánticos se deduce que cuando dos átomos de hi-

drógeno se acercan el uno al otro a una distancia conmensurable con el radio de Bohr (VI.2.1.9°), si los espines de los electrones de los átomos son antiparalelos (III.13.1.3°), se produce la atracción de ambos átomos entre sí y se forma una molécula estable de H₂. Si, por el contrario, los espines de los electrones son paralelos, los dos átomos de hidrógeno se repelen entre sí y la molécula no se forma.

§ VI.2.5. Algunas propiedades ópticas de las moléculas

A) Espectros moleculares.

1°. Los espectros de las moléculas (*espectros moleculares*), por su forma característica, reciben el nombre de *espectros de bandas*. Estos espectros son un conjunto de bandas más o menos anchas, formadas por rayas espectrales muy próximas entre sí. En los espectros moleculares se observan bandas en las regiones infrarroja, visible y ultravioleta de la escala de ondas electromagnéticas (IV.4.4.3°). Las bandas próximas entre sí forman *grupos de bandas*. En las moléculas diatómicas más simples se observan varios grupos de bandas. En las moléculas poliatómicas complejas, en las regiones visible y ultravioleta del espectro se observan anchas bandas continuas de emisión (absorción).

2°. Lo mismo que en los espectros de los átomos (VI.2.1.3°), cada raya del espectro molecular aparece como resultado de la variación de la energía de la molécula. La energía total W de una molécula se representa en forma de suma de las siguientes cinco partes independientes en primera aproximación:

$$W = W_{tr} + W_{el} + W_{vib} + W_{rot} + W_{nuc},$$

donde W_{tr} es la energía del movimiento de traslación del centro de inercia (I.2.3.3°) de la molécula; W_{el} , la energía del movimiento de los electrones en los átomos de la molécula; W_{vib} , la energía del movimiento de oscilación (vibración) de los núcleos de los átomos que constituyen la molécula, en torno a sus posiciones de equilibrio; W_{rot} la energía del movimiento de rotación de la molécula en conjunto; y W_{nuc} , la energía de los núcleos de los átomos en la molécula. La energía W_{tr} no está cuantizada (VI.1.4.3°) y su variación no puede hacer que se produzca el espectro molecular, y la influencia de la energía W_{nuc} sobre dicho espectro se puede no tener en cuenta en la primera apro-

ximación. La energía de la molécula W , cuya variación determina el espectro molecular, es la suma de tres sumandos:

$$W' = W_{el} + W_{vib} + W_{rot}.$$

3°. Según la regla de las frecuencias de Bohr (VI.2.1.6°), la frecuencia ν del fotón que emite la molécula cuando varía su estado energético constituye

$$\nu = \frac{\Delta W'}{h} = \frac{\Delta W_{el}}{h} + \frac{\Delta W_{vib}}{h} + \frac{\Delta W_{rot}}{h},$$

donde ΔW_{el} , ΔW_{vib} y ΔW_{rot} son las variaciones de las partes correspondientes de la energía W' que toman valores cuánticos discretos. La aparición de rayas estrechamente dispuestas que forman bandas en las distintas regiones del espectro, se explica porque

$$\Delta W_{rot} \ll \Delta W_{vib} \ll \Delta W_{el}.$$

En la región infrarroja lejana del espectro (de longitudes de onda del orden de (0,1 — 1 mm), la transición de la molécula de un nivel de energía de rotación a otro, hace que surjan las rayas del *espectro de rotación*.

4°. En la región infrarroja del espectro (de longitudes de onda desde una hasta varias decenas de micras), las transiciones de la molécula entre los niveles de energía de vibración crean las rayas del *espectro de vibración* de las moléculas. Cuando varían los niveles de energía de vibración de la molécula, cambian al mismo tiempo sus estados de energía de rotación. Por esto, las transiciones de la molécula entre los niveles de vibración son de vibración-rotación y originan el *espectro de vibración-rotación* con frecuencias $\nu_{vib-rot}$ (fig. VI.2.4). Este espectro consta de grupos de rayas próximas entre sí, debidos a que la transición vibracional dada va acompañada de transiciones rotacionales.

5°. Las regiones visible y ultravioleta del espectro de las moléculas surgen como resultado de las transiciones de las moléculas entre distintos niveles de energía electrónicos. A cada nivel de energía electrónico corresponden diversas vibraciones posibles de los núcleos en la molécula, es decir, un conjunto de niveles de energía vibracionales. Las transiciones entre los niveles electrónico-vibracionales ocasionan el *espectro electrónico-vibracional de la molécula*, que se caracteriza por las frecuencias ν_{el-vib} de determinadas rayas (fig. VI.2.5). Como a cada estado de energía de rotación corresponde un sistema de niveles de rotación (p. 4°), a cada transición electrónica-vibracional corres-

ponde cierta banda. Todo el espectro electrónico-vibracional de la molécula en las regiones visible y próxima a ella es un sistema de varios grupos de bandas.

B) Dispersión Raman de la luz

1°. *La dispersión Raman de la luz**) consiste en que en el espectro de la luz difusa por un sólido o un líquido, además de la frecuencia ν_0 de la fuente de radiación, se observan las frecuencias desplazadas ν_s y ν_a . La raya del espectro de frecuencia

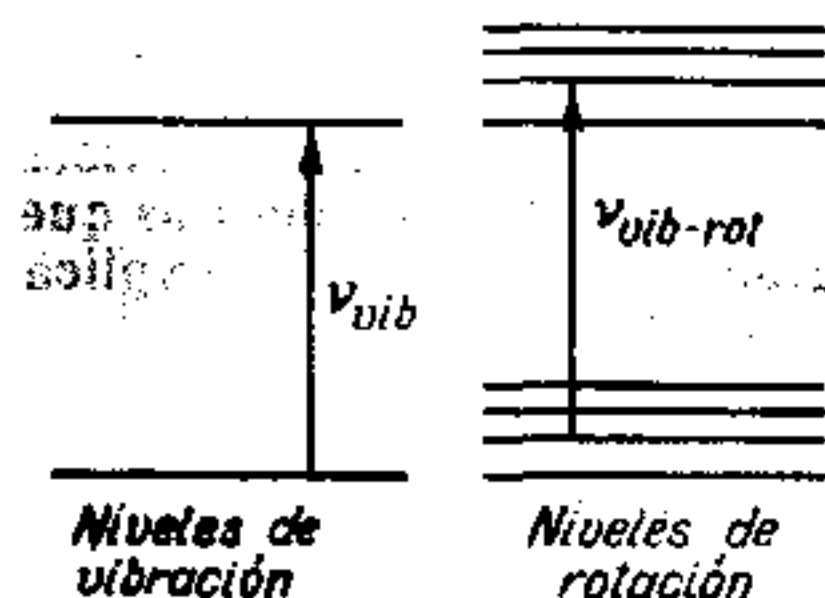


Fig. VI.2.4.

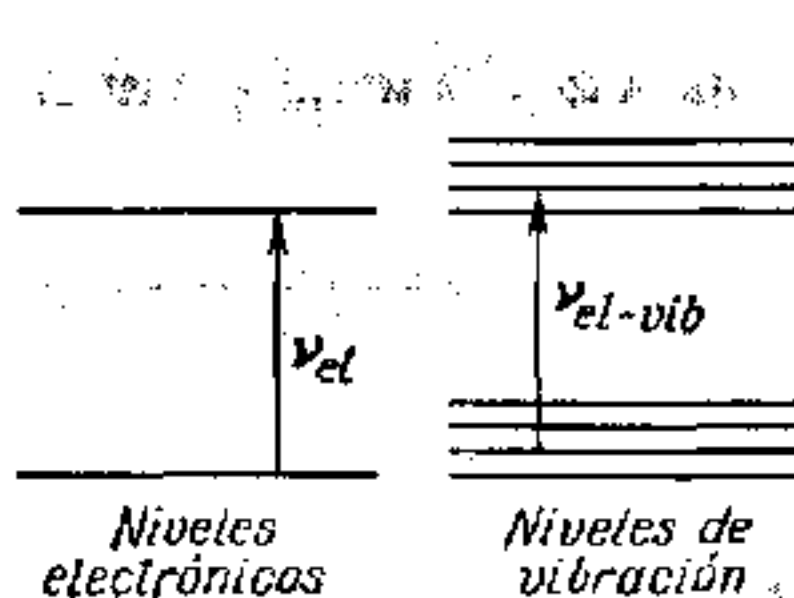


Fig. VI.2.5.

$\nu_s = \nu_0 - \nu$ se llama *de Stokes (roja)*, y la de frecuencia $\nu_a = \nu_0 + \nu$ recibe el nombre de *anti-Stokes (violeta)*. El conjunto de rayas con frecuencias ν_s y ν_a forma el *espectro de Raman de la molécula*, que contiene las *rayas satélites* rojas y violetas de la frecuencia ν_0 . La intensidad de las rayas satélites rojas no depende prácticamente de la temperatura.

2°. La explicación mecanocuántica del fenómeno de dispersión Raman de la luz consiste en el análisis de la interacción de un fotón de luz incidente, de frecuencia ν_0 , y una molécula que se encuentre en el nivel de energía de vibración normal de frecuencia W_{1vib} . Si, como resultado de la interacción con el fotón, la molécula pasa a un nivel de energía de vibración más alto, de energía $W_{2vib} > W_{1vib}$, la energía necesaria para esto $\Delta W = W_{2vib} - W_{1vib}$ se tomara de la luz incidente, es decir, será

*) Este fenómeno fue descubierto simultánea e independientemente por los físicos soviéticos L. I. Mandelshtam y G. S. Landsberg y los hindúes C. V. Raman y K. S. Krishnan en el año 1928. No obstante, en la literatura occidental se le da el nombre de «efecto Raman». (N. del T.).

absorbido un fotón de energía $h\nu_0$ y en su lugar surgirá otro de menor frecuencia ν y de energía igual a $h\nu = h\nu_0 - \Delta W$.

En la luz difusa aparece la frecuencia ν_s ,

$$\nu_s = \nu_0 - \frac{\Delta W}{h},$$

correspondiente a la raya satélite roja. Cuando la molécula pasa a distintos estados energéticos de vibración excitados, surge un conjunto completo de rayas satélites rojas.

3°. Si una molécula que se encuentre en el nivel de energía de vibración con energía W_{2v1b} (p. 3°) pasa, por la acción de un fotón de energía $h\nu_0$, a un estado energético de menor energía W_{1v1b} , en el espectro de difusión de la luz aparecerá una raya satélite de frecuencia ν_a ,

$$\nu_a = \nu_0 + \frac{\Delta W}{h},$$

donde

$$\Delta W = W_{2v1b} - W_{1v1b}.$$

La probabilidad de dispersión Raman con el aumento de la frecuencia es menor que la probabilidad de difusión con la disminución de la frecuencia. Esto se debe a que el número de moléculas que se encuentran en los niveles de energía superiores es menor que el número de moléculas que se hallan en los niveles inferiores. Por esto la intensidad de las rayas satélites violeta es menor que la de las rojas. Al elevarse la temperatura aumenta la ocupación de los niveles energéticos superiores por las moléculas y crece la intensidad de las rayas satélites violetas. En cambio, el número de moléculas que se encuentran en el estado de energía normal varía poco con el calentamiento. Por esta razón la intensidad de las rayas satélites rojas varía poco prácticamente al elevarse la temperatura.

B) Concepto de luminiscencia. Rayos X.

1°. Se llama *luminiscencia* la emisión de luz por cuerpos a temperatura T , que excede a la radiación térmica a esa misma temperatura (V.5.1.1°). La duración de la luminiscencia es mucho mayor que los períodos de radiación de los sistemas atómicos. En dependencia del procedimiento de excitación de la radiación luminiscente, se distinguen: la cátodoluminiscencia (luminiscencia catódica), la electroluminiscencia, la fotoluminiscencia y la quimioluminiscencia. Las sustancias luminiscentes se denominan *luminóforos*.

2°. La radiación luminiscente es una radiación en desequilibrio (compárese con V.5.1.2°) y se produce por un número relativamente pequeño de *centros luminógenos* —átomos, moléculas o iones—, que pasan al estado excitado bajo la influencia de una fuente de luminiscencia. El retorno de un centro excitado al estado normal, o a un estado menos excitado, va seguido de, la *radiación luminiscente*. La duración de esta radiación viene determinada por la del estado excitado, que depende de las propiedades de los centros emisores y de las del medio que los rodea. La duración del estado excitado metaestable llega a 10^{-4} s, lo que, respectivamente, hace que aumente también la duración de la luminiscencia.

3°. La luminiscencia que cesa en cuanto termina la acción del excitador de la radiación recibe el nombre de *fluorescencia*.

La luminiscencia que persiste durante largo tiempo después de cesar la acción del excitador de la radiación se llama *fosforescencia*.

El fenómeno de fluorescencia se debe a las transiciones de los átomos, moléculas o iones desde sus estados excitados ordinarios, cuya duración es del orden de 10^{-8} s, a su estado normal. La fosforescencia que produce una luminiscencia duradera está condicionada por la transición de los centros luminógenos de los estados metaestables al estado normal (p. 2°). La subdivisión de la luminiscencia en fluorescencia y fosforescencia es convencional; a veces resulta muy difícil establecer un límite de tiempo entre ellas.

4°. La excitación de la luminiscencia por medio de un haz de electrones es posible si la energía cinética del electrón incidente satisface la desigualdad

$$\frac{mv^2}{2} \geq W_{\text{ex}} - W_{\text{n}},$$

donde W_{ex} y W_{n} son, respectivamente, la energía total de la partícula en estado excitado y en estado normal.

5°. La *fotoluminiscencia* es excitada por una radiación electromagnética de la región visible o ultravioleta del espectro y se subordina a la *regla de Stokes*: la longitud de onda de la fotoluminiscencia es mayor generalmente que la longitud de onda de la luz excitatriz. Fundamento cuántico de la regla de Stokes: al ser absorbido un fotón de luz excitatriz de energía $h\nu$, surge un fotón de energía $h\nu_{\text{lum}}$ menor que $h\nu$. La energía sobrante $h\nu - h\nu_{\text{lum}} = W$ se invierte en distintos procesos, a excepción de la luminiscencia.

Por lo general $W > 0$ y $\nu_{lum} < \nu$, es decir, $\lambda_{lum} > \lambda$ de acuerdo con la regla de Stokes. Pero a veces se observa la *radiación luminiscente anti-Stokes* que se subordina a la condición contraria a la de la regla de Stokes: $\lambda_{lum} < \lambda$. Esto ocurre en aquellos casos en que a la energía $h\nu$ del fotón de la radiación excitatriz se suma una parte determinada de la energía del movimiento térmico de las partículas de la sustancia luminiscente:

$$h\nu_{lum} = h\nu + akT, \quad (11.1.4.5)$$

donde a es un factor que depende de la naturaleza de la sustancia luminiscente; k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°); y T , la temperatura absoluta.

6°. El *rendimiento energético de la fotoluminiscencia* es la razón de la energía de la radiación luminiscente a la energía que el luminóforo de la fuente absorbe en condiciones estacionarias.

Se da el nombre de *rendimiento cuántico de la fotoluminiscencia* a la razón del número de fotones de la radiación fotoluminiscente al número de fotones de la luz excitatriz de energía constante. *Ley de Vavílov*: el rendimiento energético de la fotoluminiscencia aumenta en proporción directa a la longitud de onda λ de la radiación absorbida y, después de alcanzar su valor máximo, siendo la longitud de onda $\lambda - \lambda_{m\acute{a}x}$, disminuye rápidamente hasta cero si sigue creciendo λ . El aumento de la longitud de onda de la luz excitatriz de una energía dada hace que aumente el número de fotones contenido en la energía dada de la radiación primaria. Cada uno de estos fotones puede hacer que surja un fotón $h\nu_{lum}$. Por esto, al crecer λ , aumenta el rendimiento energético de la fotoluminiscencia. El rápido descenso de este rendimiento para $\lambda = \lambda_{m\acute{a}x}$ indica que los fotones de

frecuencia $\nu_{m\acute{i}n} < \frac{c}{\lambda_{m\acute{a}x}}$ no pueden excitar las partículas del luminóforo.

7°. Se llaman *rayos X o Roentgen* las ondas electromagnéticas de longitud de onda desde 0,01 Å hasta 800 Å que se producen al frenar una sustancia de electrones rápidos. Existen dos tipos de rayos X de onda corta.

Cuando las energías de los electrones no superan cierto valor crítico, dependiente de la sustancia que frena los electrones, se producen *rayos X blancos* o de *frenado*. Esta radiación la emiten los electrones frenados y tiene un espectro continuo, limitado (en la parte de las longitudes pequeñas) por cierta longitud de onda mínima $\lambda_{m\acute{i}n}$ llamada *límite del espectro continuo*. Este

límite $\lambda_{\text{mín}}$ depende de la energía cinética W_c de los electrones que producen la radiación de frenado, y disminuye al aumentar W_c . La existencia de $\lambda_{\text{mín}}$ se explica porque la energía máxima del fotón $h\nu_{\text{máx}}$ de rayos X que se produce a expensas de la energía de un electrón, no puede ser mayor que W_c :

$$h\nu_{\text{máx}} = W_c.$$

Por consiguiente, $\lambda_{\text{mín}} = \frac{c}{\nu_{\text{máx}}} = \frac{ch}{W_c}$. Esta ecuación permite, conociendo los valores de W_c y $\lambda_{\text{mín}}$, determinar la constante de Planck (IX). Este procedimiento de determinación fue en su época uno de los más exactos y fidedignos.

8°. El segundo tipo de rayos X —la *radiación X característica* de los átomos de la sustancia— tiene espectro de rayas y es una característica individual de la sustancia, que no varía cuando ésta forma un compuesto químico. De esto se deduce que, a diferencia de los espectros ópticos, los rayos X característicos se deben a los procesos que tienen lugar en las capas electrónicas profundas de los átomos (VI.2.3.6°) que no varían en las reacciones químicas. Los *espectros de rayas de los rayos X están constituidos* por varias series de rayas. En distintos elementos se observan series de rayas de un mismo tipo, que se diferencian en que en los átomos de los elementos más pesados, las series homólogas de rayas están desplazadas hacia la parte de las ondas más cortas.

9°. En orden creciente de las longitudes de onda, las series características de rayos X se denominan, respectivamente, serie *K, L, M, N*. Al ser arrancado un electrón de una de las capas internas de un átomo cuyo núcleo tenga la carga Ze , al sitio así desocupado pasa un electrón de una capa más alejada del núcleo y se emite un fotón X. Así, cuando el electrón arrancado pertenece a la capa *K*, al pasar a ella electrones de las capas *L, M, etc.*, aparecen las rayas $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$ que forman la serie *K*.

Las frecuencias ν de las rayas características de los rayos X se hallan por la *ley de Moseley*:

$$\sqrt{\nu} = a(Z - b),$$

donde a es la constante para una serie de rayas dada (en $s^{-1/2}$), y b , la constante de apantallamiento. El sentido de la constante de apantallamiento consiste en que sobre el electrón que efectúa la transición correspondiente a una raya determinada, no actúa toda la energía Ze , sino la $(Z - b)e$ e debilitada por el efecto de pantalla de los otros electrones.

§ VI.2.6. Radiaciones forzadas. Generadores cuánticos ópticos

1°. Un átomo que en un campo electromagnético se halle en un estado de energía excitado puede, con cierta probabilidad, pasar, por la acción del campo, a un estado más bajo. Ocurre algo así como si el campo electromagnético «arrojara» el átomo del nivel excitado abajo, al nivel fundamental o a un nivel menos excitado. Esta transición va acompañada de una *radiación forzada* (inducida o estimulada) de la substancia, provocada por la acción que ejerce la onda electromagnética sobre ella.

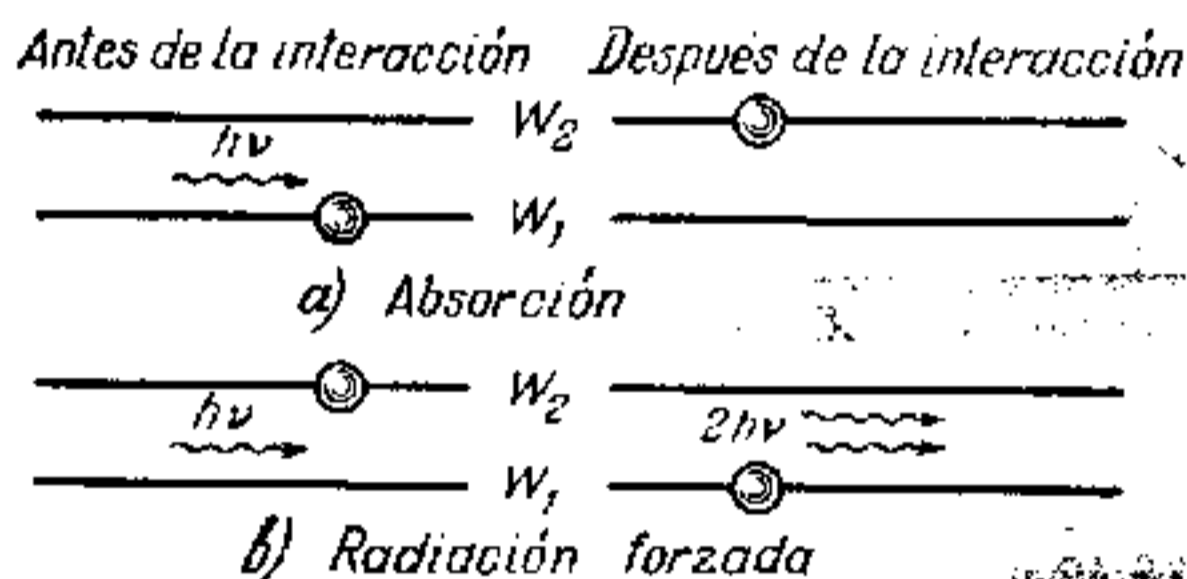


Fig. VI.2.6.

2°. El fenómeno de radiación inducida significa, desde el punto de vista de la óptica ondulatoria (V.1.1.1°), que, al pasar la onda electromagnética a través de la substancia, aumenta su intensidad (IV.4.2.4°), es decir, se produce una *absorción negativa de la luz*. Al ocurrir esto, permanecen invariables la frecuencia de la onda (IV.3.2.5°), la dirección en que se propaga, la fase (IV.3.2.5°) y la polarización (IV.4.1.7°). La radiación estimulada es *rigurosamente coherente* (IV.3.5.1°) con la onda electromagnética que la provoca al pasar por la substancia.

3°. Desde el punto de vista cuántico, la coherencia indicada en el p. 2° significa que el nuevo fotón, surgido a consecuencia del acto de radiación forzada, no difiere en nada del fotón que provocó su aparición. El nuevo fotón, surgido como resultado de la radiación inducida, amplifica la luz que pasa por el medio. En la fig. VI.2.6, b se muestra que el proceso de radiación forzada hace que, en vez de un fotón de energía $h\nu$, aparezcan dos fotones iguales a aquél. Pero, además de la radiación inducida, se

produce la absorción de la luz. Como resultado de la absorción de un fotón por el átomo que se encuentra en el nivel de energía W_1 , el fotón desaparece y el átomo pasa al nivel de energía W_2 (fig. VI.2.6, a). Este proceso hace que disminuya la intensidad de la luz que atraviesa la sustancia.

4°. Un medio se llama *amplificador* (o *medio activo*) si en él aumenta la intensidad de la luz transmitida. Esto significa que en el medio activo, el proceso de radiación inducida prevalece

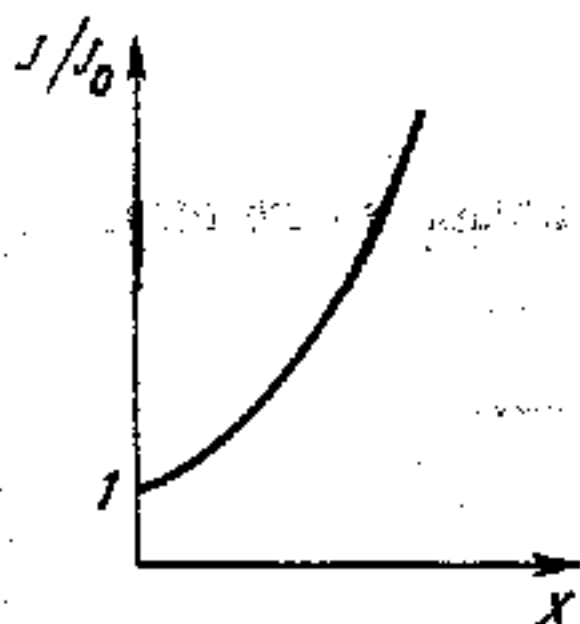


Fig. VI.2.7.

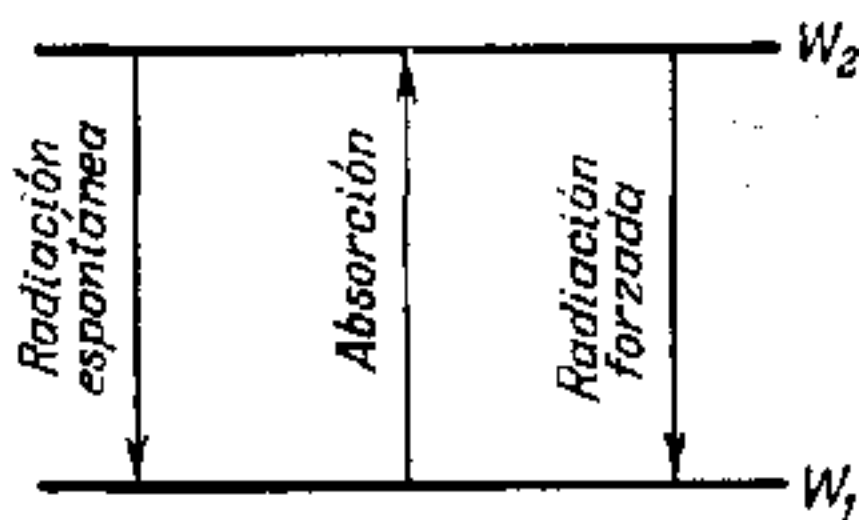


Fig. VI.2.8.

sobre el proceso de absorción de la luz. En el caso contrario, cuando el papel principal lo desempeña la absorción de la luz, el medio debilita la radiación que pasa a través de él. Un medio amplificador se llama también medio absorbente negativo de la luz (p. 1°).

5°. La absorción de la luz por la sustancia se efectúa de acuerdo con la *ley de Bouguer—Lambert*: $J = J_0 e^{-\alpha x}$, en la que $\alpha > 0$ es el coeficiente de absorción; x , el espesor de la capa absorbente; J_0 , la intensidad de la luz (IV.4.2.4°) que penetra en el medio (para $x = 0$); y J , la intensidad de la luz que ha pasado por la capa de espesor x . Para los medios absorbentes negativos es correcta la *ley de Bouguer—Lambert—Fabrikant*:

$$J = J_0 e^{|\alpha|x},$$

donde $|\alpha| > 0$ es la magnitud positiva correspondiente no a la debilitación, sino a la amplificación de la luz que pasa por el medio activo. En este caso la intensidad de la luz aumenta bruscamente al aumentar el espesor de la capa del medio (fig. VI.2.7). En otras palabras, el coeficiente de absorción α de los medios activos amplificadores, es una magnitud negativa.

6°. Entre los niveles energéticos cuyas energías son W_1 y W_2 pueden tener lugar los tres tipos de procesos ópticos representados en la fig. VI.2.8. Cuando las condiciones permiten despreciar la radiación espontánea en que los átomos (moléculas o iones) excitados pasan espontáneamente al estado normal, las propiedades ópticas del medio vienen determinadas por la concurrencia de dos procesos: la absorción y la radiación forzada. El número de actos de absorción es proporcional a la concentración de partículas N_1 de energía W_1 que se encuentran en el nivel de energía inferior. El número de actos de radiación estimulada es proporcional a la concentración de partículas N_2 en el nivel de energía superior. El coeficiente de absorción α de la ley de Bouguer—Lambert—Fabrikant (p. 5°) es proporcional a la diferencia entre los actos de absorción y los de radiación inducida:

$$\alpha = k (N_1 - N_2),$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de proporcionalidad.

7°. En estado de equilibrio termodinámico del sistema (II.1.3.3°), $N_2 < N_1$ y $\alpha > 0$. Esto quiere decir que el número de actos de absorción supera, por lo general, el número de transiciones acompañadas de radiación inducida. Para obtener un medio con coeficiente de absorción negativo hay que crear un estado en desequilibrio del sistema, en el que $N_2 > N_1$. Estos estados se denominan *inversos*. En ellos el número de actos de radiación estimulada es mayor que el de actos de absorción de la luz.

8°. Reciben el nombre de *generadores cuánticos ópticos* (GCO) (o *generadores de luz coherente*) (GLC) las fuentes de luz cuyo funcionamiento se basa en el efecto de radiación estimulada en un medio activo con ocupación inversa de los estados de energía (p. 7°). Los GLC que funcionan en la banda óptica se llaman *láseres*, y los que lo hacen en la banda de ondas radioeléctricas ultracortas, *máseres*.

9°. El proceso de conversión de un medio al estado inverso (p. 7°) necesario para que funcione como GLC (p. 8°), se denomina *bombeo del medio amplificador*. En la práctica, el bombeo se efectúa de acuerdo con el *esquema del GLC de tres niveles*. Uno de los primeros GLC que funcionaron según este esquema fue el generador con cristal de rubí como medio amplificador (óxido de aluminio Al_2O_3 con impurezas de óxido de cromo Cr_2O_3). En la red cristalina del óxido de aluminio se sustituye una parte de los átomos de Al por átomos de Cr^{3+} que hacen las veces de sustancia activa que efectúa las transiciones con radiación inducida. El esquema de los niveles de energía del Cr^{3+} se da

en la fig. VI.2.9. Los más próximos al nivel fundamental C son los de las dos anchas bandas de energía A (VII.2.8.2°) y el doble nivel metaestable B . La irradiación intensa del rubí con luz verde de una potente lámpara relámpago de bombeo, con atmósfera de neón y criptón, hace que los iones de cromo pasen a los niveles de la banda A , desde donde se producen sus transiciones sin radiación al nivel B . La energía sobrante se transmite a la red cristalina del rubí. Como resultado, se crea una ocupación inversa de los niveles C y B (p. 7°) por los iones de cromo, y el

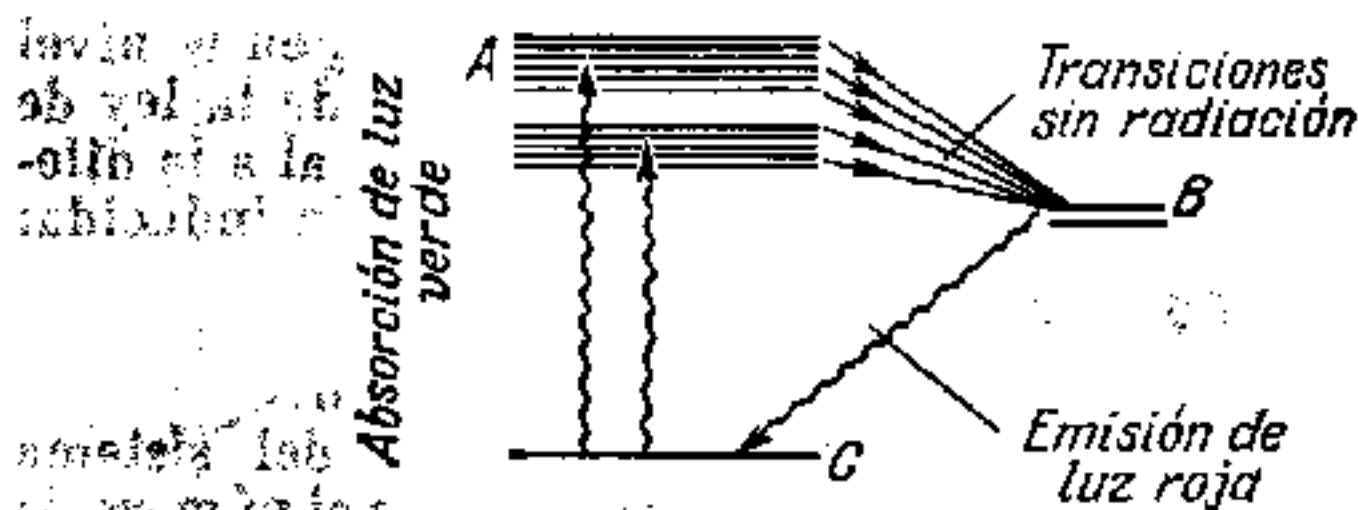


Fig. VI.2.9.

generador cuántico óptico funciona en las rayas rojas de 6927 \AA y 6943 \AA correspondientes a las transiciones de los iones de cromo del nivel B al nivel C .

10°. El incremento en avalancha de la intensidad en el medio activo (p. 5°) significa que dicho medio actúa como *amplificador de las ondas electromagnéticas*. El efecto de amplificación de la luz en el GLC aumenta cuando ésta pasa varias veces por una misma capa del medio amplificador. Esto se lleva a cabo de acuerdo con el esquema que reproduce la fig. VI.2.10, a. El fotón A que se mueve paralelamente al eje del medio activo 1 , engendra una avalancha de fotones lanzados en el mismo sentido (fig. VI.2.10, b). Parte de esta avalancha pasa a través del espejo 3 hacia fuera, y otra parte se refleja, vuelve a pasar por el medio activo y se incrementa en él (fig. VI.2.10, c). De la avalancha de fotones que llega hasta el espejo continuo 2 , una parte es absorbida por él, pero el resto, después de reflejarse, forma un flujo amplificado de fotones que se mueven en el mismo sentido que el fotón «cebador» inicial A (fig. VI.2.10, d). El flujo de fotones multiplificado que emerge del GLC a través del espejo semitransparente 3 , crea un haz de rayos de luz de gran intensidad, extremadamente direccional, con divergencia angular pequeña.

Los fotones *B* y *C* (fig. VI.2.10, *b*) lanzados formando ángulo con el eje del medio activo, crean un flujo de fotones que, después de reflejarse varias veces, salen del medio sin tomar parte

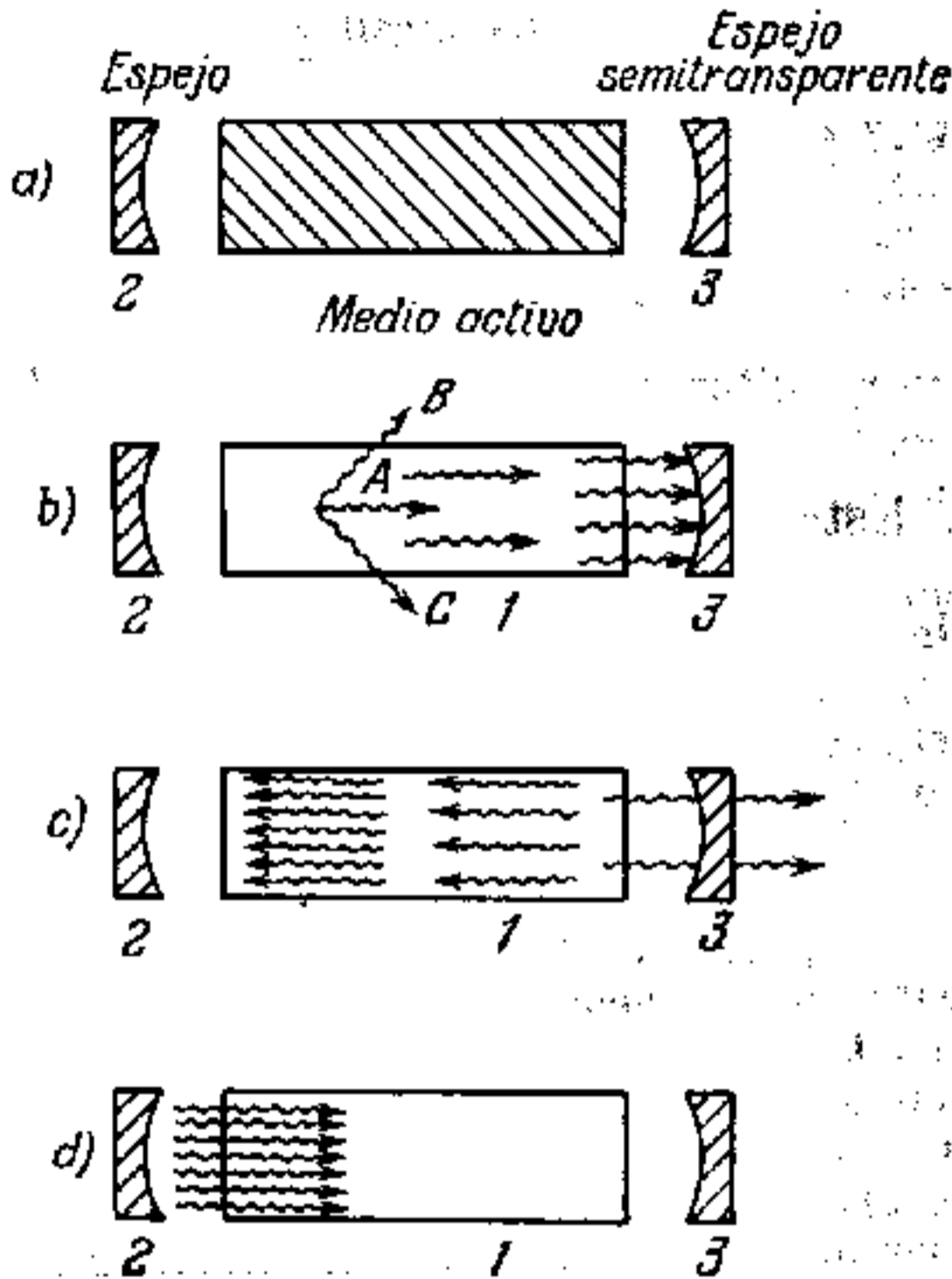


Fig. VI.2.10.

en la amplificación de la luz. La alta coherencia, la extremada directividad y la gran intensidad de la radiación láser sirven de base a un número cada vez mayor de aplicaciones de esta radiación.

VII parte.

FUNDAMENTOS DE FISICA DE LOS SOLIDOS

Capítulo VII.1. Estructura y algunas propiedades de los sólidos

§ VII.1.1. Estructura de los sólidos

1°. Se llaman *sólidos* los cuerpos que tienen forma y volumen constantes. Los sólidos se dividen en *cristalinos* y *amorfos*.

Los cristales tienen forma exterior geométrica regular y la disposición de las partículas que los componen se repite periódicamente a lo largo de todo el cristal (*red cristalina*). En este sentido se habla del *orden remoto en los cristales* (compárese con II.6.1.2°). Los cristales están limitados por *caras* planas situadas ordenadamente unas respecto a otras, que convergen en las *aristas* y *vértices*. Los cristales grandes aislados, en forma de poliedros regulares, reciben el nombre de *monocristales*. Su forma depende de la composición química del cristal. Los *policristales* tienen estructura cristalina fina y constan de un gran número de cristales pequeños caóticamente dispuestos (*granos cristalinos* o *cristalitos*), unidos entre sí.

Los sólidos amorfos (alquitrán, vidrio y otros) son líquidos sobreenfriados y no poseen las propiedades bien manifiestas de los cristales.

En adelante vamos a ocuparnos solamente de los sólidos cristalinos. :

2°. En una red cristalina cada partícula experimenta las fuerzas de acción mutua intermolecular (II.5.1.4°). La disposición en equilibrio de todas las partículas del sólido en los nudos de la red cristalina (II.1.1.4°) corresponde a la energía libre mínima del cristal (II.4.4.5°) y a su estado más estable. Las partículas se hallan en los nudos de la red a cierta distancia de equilibrio entre sí, llamada *período de la red cristalina*.

3°. Los tipos principales de sólidos cristalinos, atendiendo al carácter de las fuerzas de interacción entre las partículas

y al tipo de las que se encuentran en los nudos de la red, son:

a) *cristales iónicos* (NaCl, carbonato de calcio y otros). En los nudos de su red cristalina se encuentran, alternando regularmente, iones positivos y negativos, entre los cuales se efectúa el enlace heteropolar (VI.2.4.3°);

b) *cristales de valencia (atómicos)* (C, Ge, Te y otros). En los nudos de la red cristalina se hallan átomos neutros entre los que se realiza el enlace homopolar (VI.2.4.4°). De este tipo de cristales son los semiconductores (VII.2.10.1°) y muchos sólidos orgánicos:

c) *cristales moleculares* (Ar, CH₄, parafina y otros). En los nudos de la red cristalina se encuentran moléculas cuyo enlace se debe a las fuerzas de Van der Waals, principalmente de dispersión (II.5.1.8°);

d) *metales* (Na, Cu, Al y otros). En los nudos de su red cristalina están los iones positivos que se forman después de desprenderse de los átomos los electrones periféricos (de valencia) (VI.2.3.9°) que constituyen el gas electrónico (III.3.4.1°) de partículas libres socializadas.

El *enlace metálico* es una forma específica de enlace químico (VI.2.4.1°) y surge entre los iones de la red cristalina y el gas electrónico. Los electrones «aprietan» los iones positivos (principalmente por la acción de las fuerzas electrostáticas) y equilibran la repulsión entre ellos. Cuando las distancias entre los iones son iguales al período de la red (p. 2°), se crea el estado estable del cristal metálico.

4°. El carácter inarmónico de las oscilaciones térmicas de las partículas en los nudos de la red cristalina (II.1.1.4°) se manifiesta en que la variación de la energía potencial de interacción de las partículas en función de sus desplazamientos de las posiciones de equilibrio, no es parabólica, y la fuerza que actúa sobre la partícula no es cuasielástica (VII.1.3.5°). Esto tiene importancia primordial para comprender algunas propiedades térmicas (VII.1.2.4°) y eléctricas (VII.2.5.4°) de los sólidos.

5°. Una peculiaridad característica de los monocristales (p. 1°) es su anisotropía (*anisotropía de los cristales*), o sea, la variación de las propiedades físicas de los sólidos (térmicas, elásticas, eléctricas, ópticas) en función de las direcciones en el cristal.

§ VII.1.2. Dilatación de los sólidos

1°. Al elevarse la temperatura de un sólido, éste *se dilata*. La dilatación puede ser *lineal* o *cúbica (volumétrica)*. Ambos tipos de dilatación se caracterizan por los *coeficientes medios de dilatación lineal* α_l y *cúbica o volumétrica* α_V en cierto intervalo de temperaturas.

2°. Si l_0 es la longitud del cuerpo a la temperatura de 0°C , su alargamiento Δl al calentarlo hasta la temperatura $t^\circ\text{C}$ será

$$\Delta l = \alpha_l l_0 t,$$

de donde $\alpha_l = \Delta l / l_0 t$.

El coeficiente de dilatación lineal caracteriza el alargamiento relativo $\Delta l / l_0$ del cuerpo al calentarlo a un grado. Para la mayoría de los sólidos $\alpha_l \approx (10^{-6} - 10^{-5}) \text{K}^{-1}$ y depende poco de la temperatura.

3°. Cuando el cuerpo se calienta desde 0°C hasta $t^\circ\text{C}$, su volumen varía desde V_0 hasta V siguiendo la ley

$$V = V_0 (1 + \alpha_V t),$$

donde $\alpha_V = \Delta V / V_0 t$. El coeficiente de dilatación cúbica define la variación relativa del volumen $\Delta V / V_0$ al calentar el cuerpo a un grado.

La relación entre los coeficientes α_V y α_l tiene, en primera aproximación, la forma siguiente:

$$\alpha_V \approx 3\alpha_l$$

4°. La dilatación térmica de los sólidos se explica por el carácter inarmónico de las oscilaciones térmicas de las partículas de la red (VII.1.1.4°). Si r_0 es la distancia de equilibrio entre las partículas vecinas, en un instante arbitrario la distancia entre ellas será $r = r_0 + x$, donde x es el desplazamiento mutuo de las partículas de las posiciones de equilibrio, debido a las oscilaciones térmicas. Las fuerzas que actúan entre las partículas de la red no son cuasielásticas y dependen del desplazamiento x siguiendo la ley

$$F_x = -kx + bx^2,$$

donde k es el coeficiente de la fuerza cuasielástica (VII.1.3.5°), y b , el *coeficiente de inarmonía* de las oscilaciones. El término bx^2 caracteriza la desviación de las oscilaciones de su carácter armónico, debido a que la variación de las fuerzas de atracción y repulsión en función de la distancia es distinta.

Para el estado de equilibrio del sólido, la posición de los nudos de la red cristalina no debe cambiar con el tiempo, y para cada partícula de la red, el valor medio de la fuerza que actúa sobre ella es nulo: $\langle F_x \rangle = 0$.

Si las oscilaciones de las partículas fueran rigurosamente armónicas ($F_x = -kx$), el desplazamiento medio de éstas $\langle x \rangle = -\langle F_x \rangle/k = 0$, es decir, no se produciría la dilatación. Pero para las oscilaciones inarmónicas reales, de la condición $\langle F_x \rangle = 0$ se deduce que

$$-k \langle x \rangle + b \langle x^2 \rangle = 0 \quad \text{ó} \quad \langle x \rangle = \frac{b}{k} \langle x^2 \rangle$$

Para las oscilaciones térmicas de pequeña amplitud, la energía potencial de una partícula oscilante W_p es (IV.1.2.3°)

$$W_p = \frac{kx^2}{2}$$

Por la ley de equipartición de la energía (II.3.6.4°): $W_p = \frac{kT}{2}$, siendo k la constante de Boltzmann (II.1.4.5°), y T la temperatura absoluta. Por lo tanto,

$$\frac{k \langle x^2 \rangle}{2} = \frac{kT}{2} \quad \text{o} \quad \langle x^2 \rangle = \frac{kT}{k}$$

En definitiva, $\langle x \rangle = \frac{bkT}{k^2}$. La distancia media entre las partículas del sólido aumenta al calentar el cristal y se produce la dilatación.

§ VII.1.3. Breve información acerca de las propiedades elásticas de los sólidos*

1°. Se da el nombre de *deformación* de un sólido a la variación de sus dimensiones y volumen. Por lo general, la deformación va acompañada del cambio de la forma del cuerpo. A veces (tracción o compresión en todos los sentidos) la forma del cuerpo no varía. Las causas de las deformaciones son las fuerzas

* En este manual no se dan más detalles sobre las propiedades elásticas y las deformaciones de los sólidos.

externas que actúan sobre el cuerpo, el cambio de temperatura (VII.1.2.1°) y otras.

La deformación del cuerpo hace que sus partículas se desplacen de las posiciones de equilibrio iniciales en los nudos de las redes cristalinas (II.1.1.4°) a otras nuevas. Las fuerzas de interacción entre las partículas se oponen a este desplazamiento. En el cuerpo deformado surgen *fuerzas elásticas* internas que equilibran las fuerzas exteriores que provocan la deformación.

2°. Se dice que la deformación es *elástica* si desaparece una vez que cesa la acción de las fuerzas externas que la ocasionaron. En este caso las partículas del sólido retornan a sus posiciones de equilibrio iniciales (p. 1°). En las deformaciones no elásticas se produce una reestructuración irreversible de la red cristalina (VII.1.1.1°), y el cuerpo no recupera su forma. Estas deformaciones se dice que son *plásticas* (p. 10°). La transformación de una deformación elástica en plástica puede ocurrir en el caso de acciones prolongadas de fuerzas, incluso pequeñas, sobre el cuerpo. La transformación inversa es imposible.

Se llama *grado de elasticidad* la razón del trabajo que puede realizar el cuerpo si se eliminan lentamente las fuerzas deformantes, al trabajo realizado por las fuerzas externas al deformarlo.

3°. La magnitud física numéricamente igual a la fuerza elástica dF_{el} correspondiente a la unidad de área dS de la sección del cuerpo, se denomina *esfuerzo* σ :

$$\sigma = \frac{dF_{el}}{dS}.$$

Si la fuerza dF_{el} es perpendicular a la superficie dS , el esfuerzo se dice que es *normal* (de *tensión* o *compresión*), y si está dirigida tangencialmente a dicha superficie, se dice que es *tangencial* (de *cortadura* o *cizallamiento*).

4°. La medida de una deformación es la *deformación relativa*, igual a la relación entre la deformación absoluta Δx y el valor inicial de la magnitud x que caracteriza la forma y las dimensiones del cuerpo: $\Delta x/x$.

Ley de Hooke: el esfuerzo de deformación elástica de un cuerpo es directamente proporcional a su deformación relativa:

$$\sigma = K_x \frac{\Delta x}{x}.$$

Aquí K_x es el módulo de elasticidad, que numéricamente es igual al esfuerzo que produce una deformación relativa igual a la unidad. La magnitud $\alpha_x = 1/K_x$ se denomina *coeficiente de*

elasticidad. La ley de Hooke sólo es correcta cuando las deformaciones relativas son suficientemente pequeñas. El esfuerzo σ_p con el cual deja de cumplirse la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación relativa, se llama *límite de proporcionalidad* (punto A en la fig. VII.1.1).

5°. Además de las fuerzas elásticas, existen fuerzas de otra naturaleza que también satisfacen la relación

$$F_x = -kx,$$

donde F_x es la proyección de la fuerza sobre la dirección a lo largo de la cual se produce la deformación lineal absoluta x .

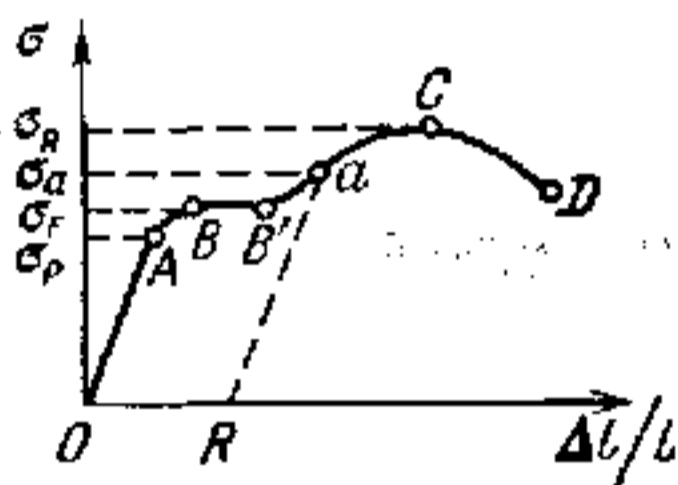


Fig. VII.1.1.

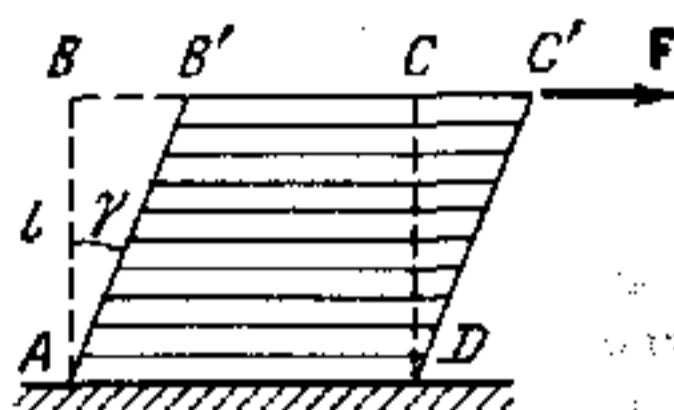


Fig. VII.1.2.

Estas fuerzas son las llamadas *cuasielásticas* (*fuerzas cuasielásticas*). La magnitud k es el *coeficiente de la fuerza cuasielástica*.

6°. La deformación más simple es la deformación *longitudinal* o *unidireccional por tracción* (*compresión*), que consiste en el aumento (disminución) de la longitud de un cuerpo por la acción de una fuerza exterior F de *tensión* (o *compresión*). La deformación elástica cesa cuando $F = F_{el}$, siendo F_{el} la fuerza elástica (p. 1°). La deformación relativa $\Delta x/x = \Delta l/l$, en la que Δl es la variación de la longitud debida a la acción de la fuerza F , y l , la longitud inicial del cuerpo. Según la ley de Hooke

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l},$$

donde el módulo de elasticidad $K_x = E$ recibe el nombre de *módulo de Young*. Este módulo es igual a la tensión normal σ con la cual la dimensión lineal del cuerpo se duplica: $\Delta l = l^*$.

*) Suponiendo que la ley de Hooke fuera correcta para una deformación tan grande.

7°. La representación gráfica de la variación del esfuerzo normal σ en función de la deformación relativa $\Delta l/l$ por tracción unilateral, se llama *diagrama de tensión-deformación* (fig. VII.1.1). Más allá del límite de proporcionalidad (p. 4°), el aumento de σ ocasiona un crecimiento de $\Delta l/l$. Para la tensión σ_F , a la cual corresponde el punto B del diagrama, el alargamiento relativo del cuerpo sigue creciendo sin aumentar la tensión (trozo horizontal BB' del diagrama). La tensión σ_F se conoce con el nombre de *límite de fluencia*. La tensión máxima σ_F , correspondiente al punto C del diagrama, se llama *resistencia máxima a la tracción*. El punto D del diagrama corresponde a la rotura del cuerpo.

8°. Si se va eliminando lentamente la carga del cuerpo deformado hasta la tensión σ_a (punto a del diagrama) (fig. VII.1.1) la gráfica de $\sigma = \varphi(\Delta l/l)$ viene representada por la recta aR paralela al trozo rectilíneo OA del diagrama. El segmento OR determina la *deformación residual del cuerpo*, característica de las deformaciones plásticas.

9°. Se llama *deformación de cortadura o cizallamiento* de un cuerpo aquélla en que todas sus capas planas, paralelas a cierto plano de cizallamiento, se desplazan, sin variar de forma y dimensiones, paralelamente unas a otras (fig. VII.1.2). La deformación de cizallamiento se produce por la acción de la fuerza tangencial F aplicada a la cara BC paralela al plano de cizallamiento. La cara AD , paralela a la BC , está fija. Para una deformación pequeña,

$$\gamma \approx \text{tg } \gamma = \frac{CC'}{CD},$$

donde $CC' = \Delta x$ es la deformación absoluta de cizallamiento, y γ , el *ángulo de distorsión o deslizamiento relativo* expresado en radianes. Por la ley de Hooke (p. 5°), la deformación de cizallamiento es proporcional al esfuerzo tangencial $\sigma_\tau = F/S$, donde S es el área de la superficie de la cara BC , es decir,

$$\sigma_\tau = G\gamma.$$

La magnitud G es la *rigidez o módulo de cizallamiento*. Este módulo es igual al esfuerzo tangencial que produce en la probeta un desplazamiento relativo igual a la unidad.

§ VII.1.4. Nociones acerca de las transiciones de fase de los sólidos

1°. El calentamiento de un sólido cristalino hace que aumente la amplitud de las oscilaciones térmicas inarmónicas de las partículas en los nudos de la red cristalina (VII.1.2.4°) y que crezcan las distancias intermoleculares medias en la red (dilatación (VII.1.2.1°)). Si el calentamiento es fuerte, ocasiona la destrucción de la estructura cristalina del cuerpo y provoca el paso de su fase sólida a la líquida o a vapor, (transición de fase de I orden (II.5.4.2°)).

2°. El paso de una sustancia del estado sólido al gaseoso se llama *sublimación*, y del estado sólido al líquido, *fusión*. La fusión comienza a la temperatura T_f determinada para una presión dada, llamada *temperatura de fusión*. Durante el

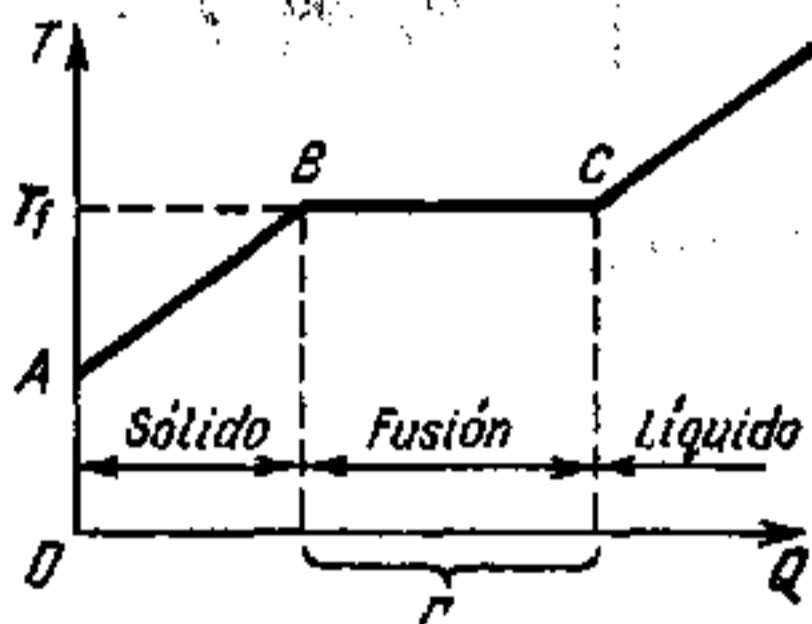


Fig. VII.1.3.

proceso de fusión, esta temperatura no varía. La fig. VII.1.3 representa la dependencia $T(Q)$, en la que Q es la cantidad de calor (II.2.2.1°) comunicada al cuerpo que se calienta. La parte isotérmica BC corresponde al sistema de dos fases sólido—líquido (compárese con (II.5.3.2°), es decir, con el sistema de dos fases líquido—vapor saturado). En el proceso de fusión, la sustancia pasa de un estado más ordenado, cristalino, a otro menos ordenado, líquido. De acuerdo con la segunda ley de la termodinámica (II.4.3.2°), la fusión se debe al aumento de la entropía del sistema (II.4.4.3°).

3°. La cantidad de calor r_f necesaria para fundir la unidad de masa de un sólido a la temperatura T_f se llama *calor específico de fusión* o *calor de fusión*. Del primer principio de la termodinámica (II.2.3.1°) se deduce que

$$r_f = u_l + p(v_l - v_s),$$

donde u_l y u_s son las energías específicas internas (II.2.1.2°) de la sustancia en la fase líquida y sólida, respectivamente; v_l y v_s , los volúmenes específicos de la sustancia en dichas fases;

y p , la presión constante a que se efectúa la transición de fase de I orden (II.5.4.2°).

4°. La temperatura de fusión T_f depende de la presión p . La variación de la presión en dp hace que varíe la temperatura de fusión en dT_f . La dependencia $T_f = T_f(p)$ viene expresada

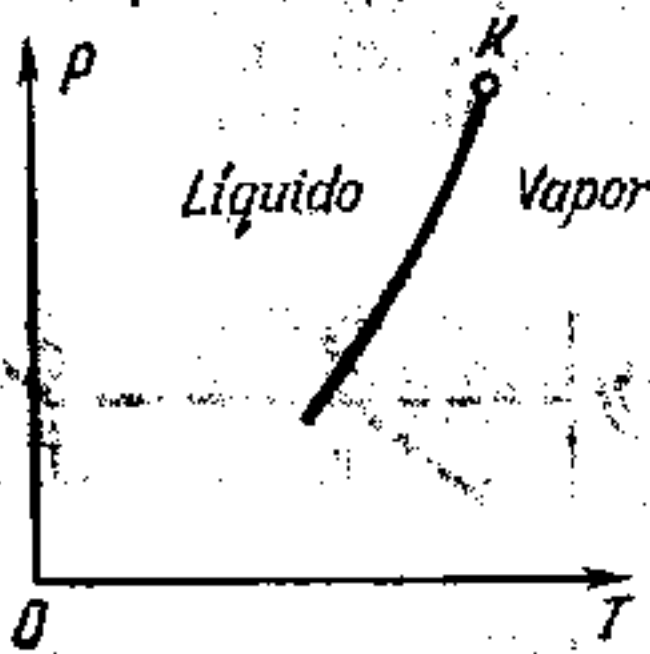


Fig. VII.1.4.

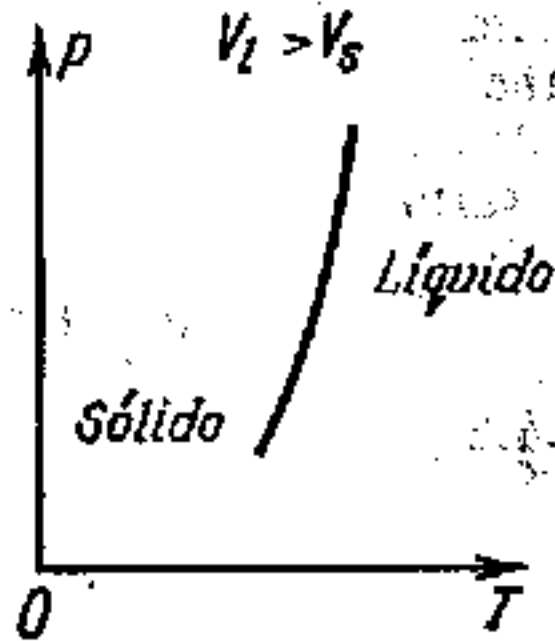


Fig. VII.1.5.

por la ecuación de Clapeyron—Clausius (véase también (II.6.6.5°))

$$\frac{dT_f}{dp} = \frac{T_f (v_l - v_s)}{r_f}$$

El sentido de todas estas magnitudes se indica en el p. 3°. La ecuación de Clapeyron—Clausius es correcta para cualquier transición de fase de I orden.

En la inmensa mayoría de los casos, la fusión de la sustancia hace que aumente su volumen específico, es decir, $v_l > v_s$ y $dT_f/dp > 0$ ($r_f > 0$), o sea, la temperatura de fusión aumenta con la presión. Estos cuerpos pueden ser sólidos a altas presiones en la región de temperaturas mayores que la temperatura crítica (II.5.3.1°).

En algunas sustancias (agua, bismuto, galio) la densidad aumenta cuando éstas se funden, de manera que $v_l < v_s$. Por ejemplo, el hielo a 0 °C es menos denso que el agua. En estas sustancias $dT_f/dp < 0$, es decir, cuando crece la presión, la temperatura de fusión desciende.

5°. En el diagrama $T - p$, la gráfica de variación de la temperatura de transición de fase de I orden, en función de la presión $p = f(T)$, se representa por una curva cada punto de la

cual corresponde al equilibrio de las dos fases coexistentes. Así, la curva de vaporización representa el equilibrio del sistema de dos fases líquido—vapor. Como $v_v - v_l > 0$ (v_s es el volumen específico del vapor), de la ecuación de Clapeyron—Clausius (p. 4°) resulta que $dp/dT > 0$. La curva $p = f(T)$ que divide la región de los estados líquido y gaseoso de la sustancia, termina en el punto crítico K (II.5.3.1°) (fig. VII.2.4). Las figs. VII.1.5 y VII.1.5 representan las curvas de equilibrio sólido—líquido para los casos $v_l > v_s$ y $v_l < v_s$, respectivamente.

6°. Cuando un líquido se enfría hasta cierta temperatura, llamada *temperatura de cristalización* T_{cr} , se produce la *cristalización de la sustancia*, es decir, su paso del estado líquido al sólido cristalino. Al ocurrir esto se desprende una cantidad de calor igual al calor de fusión (p. 3°). La temperatura de cristalización es igual a la temperatura de fusión y depende de la presencia de impurezas. Estas últimas, si no forman (juntamente con la sustancia) cristales «mixtos», llamados *soluciones sólidas*, hacen que descienda T_{cr} . Por ejemplo, el agua del mar, que contiene sales disueltas, cristaliza a una temperatura más baja que el agua destilada. Esto sirve de base para crear mezclas refrigerantes.

7°. La cristalización de los líquidos va ligada al cambio de carácter del movimiento térmico de las partículas de la sustancia. Aumenta la duración de su vida «sedentaria» (tiempo de relajación) (II.6.2.4°). Las fuerzas de atracción mutua entre las partículas hacen que el movimiento térmico se transforme en oscilaciones térmicas caóticas en torno a los nudos de la red cristalina. El paso de la sustancia a una fase más ordenada se debe a la disminución de la entropía del sistema (II.4.4.3°).

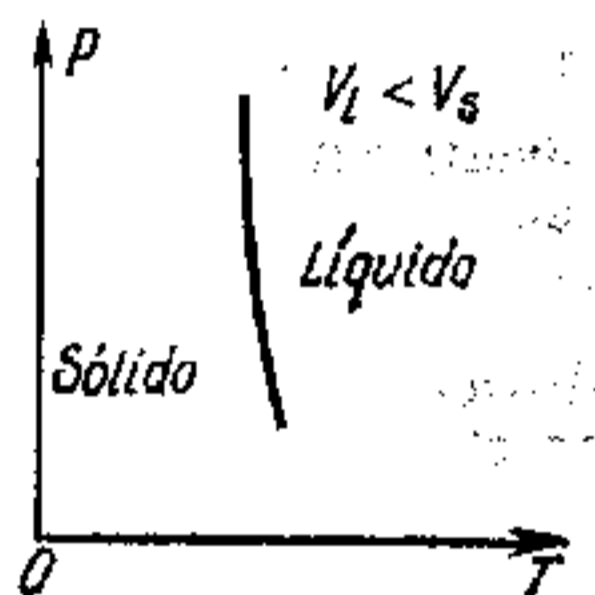


Fig. VII.1.6.

Capítulo VII.2. Algunos conocimientos acerca de la física cuántica de los sólidos

§ VII.2.1. Nociones de estadísticas cuánticas

1°. Se llama *estadística cuántica* el método estadístico de investigación (II.1.2.2°) que se aplica a los sistemas que constan de un gran número de partículas y se subordinan a las leyes de la mecánica cuántica (VI.1.1.1°).

2°. A diferencia de las posiciones de partida de la física estadística clásica (II.3.1.4°, 5°), la estadística cuántica se basa en el *principio de indistinguibilidad de las partículas idénticas*: todas las partículas iguales (por ejemplo, todos los electrones en los metales y todos los protones en los núcleos de los átomos) se consideran indistinguibles entre sí por principio.

3°. El problema fundamental de la estadística cuántica es la distribución de las partículas según sus coordenadas y velocidades*). Este problema se puede formular como la distribución de las partículas por las celdas de un «volumen fásico» cuyo elemento $\Delta\Gamma = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ (II.3.1.5°). La dualidad ondulatoria-corpúscular de las propiedades de las partículas de la sustancia (VI.1.1.3°) y las relaciones de incertidumbre de Heisenberg (VI.1.6.2°) conducen a que el volumen elemental $\Delta\Gamma$ no pueda ser menor que h^3 , siendo h la constante de Planck (IX). Al distribuir las partículas por celdas de volumen h^3 cada una, de acuerdo con el principio de indistinguibilidad de las partículas idénticas (p. 2°), se plantea el problema del número de partículas que puede haber en una celda dada, y no el de qué partículas, precisamente de un tipo dado, puede haber en dicha celda. El estado del sistema de partículas no varía como resultado de la permutación de las partículas idénticas, tanto dentro de una celda dada, como entre celdas distintas.

4°. Si el volumen elemental $\Delta\Gamma_i$ se divide en celdas de volumen h^3 , la relación $\Delta\Gamma_i/h^3 = \Delta g_i$ determina el *número de estados*

*) En la estadística clásica, las leyes de Maxwell (II.3.3.1°) y de Boltzmann (II.3.4.2°) permiten resolver un problema análogo.

cuánticos contenidos en el volumen $\Delta\Gamma_i$ con energía comprendida en el intervalo de W_i a $W_i + \Delta W_i$. Las partículas cuyo número es igual a ΔN_i y que se encuentran en el volumen $\Delta\Gamma_i$ se pueden distribuir por todos los procedimientos posibles entre los Δg_i estados de energía W_i .

§ VII.2.2. Funciones de distribución de Bose—Einstein y Fermi—Dirac

1°. Las partículas con espín entero o nulo (en unidades \hbar) (III.13.1.3°) se llaman *bosones* (por ejemplo, los fotones, fonones y algunos núcleos). Los sistemas de partículas de este tipo se describen mediante la *estadística cuántica de Bose—Einstein*. Los bosones no se subordinan al principio de Pauli (VI.2.3.1°) y a ellos no se les imponen limitaciones del número de partículas que pueden hallarse en un determinado estado cuántico.

2°. Se llama *función de distribución de Bose—Einstein* f_B la «población» media de bosones de estados de energía dada, es decir, el número medio de partículas que hay en un estado dado:

$$f_B = \frac{\Delta N(W_i)}{\Delta g_i},$$

donde $\Delta N(W_i)$ es el número de partículas cuyas energías se encuentran en el intervalo de W_i a $W_i + \Delta W_i$, y Δg_i es el número de estados cuánticos que hay en este intervalo de energía (VII.2.1.4°). Para hallar la función f_B se estudia la probabilidad termodinámica P (II.4.5.2°) de distribución de las partículas del sistema entre los estados cuánticos y se encuentra la distribución más probable con la condición de que el sistema conserve el número total de partículas N y la energía total W :

$$\sum_i \Delta N_i = N, \quad \sum_i \Delta N_i W_i = W.$$

La suma se extiende a todos los estados cuánticos del sistema.

3°. El método de multiplicadores indeterminados de Lagrange para hallar el extremo condicionado, permite obtener la siguiente expresión de la función de distribución de Bose—Einstein:

$$f_B = \frac{1}{\frac{W_i - \mu}{kT}}$$

Aquí k es la constante de Boltzmann (II.1.4.5°), y T , la temperatura absoluta. La magnitud $\mu = (U - TS + pV)/N$ se llama *potencial químico* referido a una partícula independiente, donde U es la energía interna del sistema (II.2.1.2°); S , su entropía (II.4.4.2°); V , el volumen del sistema; y p , la presión. El potencial químico es el trabajo que se realiza en condiciones isóbaro-isotérmicas cuando el número de partículas del sistema aumenta en la unidad.

4°. Las partículas con espín semientero (en unidades \hbar) (III.13.1.3°) se llaman *fermiones* (electrones, protones, neutrones, etc.). Los sistemas de fermiones se describen mediante la *estadística cuántica de Fermi—Dirac*. Los fermiones cumplen el principio de Pauli (VI.2.3.1°), y en un estado cuántico dado del sistema de fermiones no puede haber más de una partícula.

5°. La *función de distribución de Fermi—Dirac* f_F se determina de un modo análogo al expuesto en el p. 2°:

$$f_F = \frac{\Delta N(W_i)}{\Delta g_i}$$

El significado de los símbolos se indica en el p. 2°. La resolución del problema de la distribución más probable de los fermiones entre los estados, a condición de que el sistema conserve la energía total W y el número total de partículas N , nos lleva a la siguiente forma de la función f_F :

$$f_F = \frac{1}{e^{\frac{W_i - \mu}{kT}} + 1}$$

El significado de μ véase en el p. 3°.

6°. Las funciones de distribución en las estadísticas clásica y cuántica, introducidas como el número medio de partículas que hay en un estado (p. 2°), se puede expresar por medio de la fórmula única

$$f = \frac{1}{e^{\frac{W_i - \mu}{kT}} + \delta}$$

Para la distribución de Maxwell—Boltzmann (compárese con II.3.4.2°) $\delta = 0$ y $\mu = 0$; para la de Bose—Einstein, $\delta = -1$; y para la de Fermi—Dirac, $\delta = +1$. La fig. VII.2.1 representa estas tres funciones de distribución.

Ejemplo. En una cavidad de volumen V , a la temperatura $T = \text{const}$ se encuentra en equilibrio termodinámico con las paredes, la radiación del cuerpo negro (V.5.1.8°). Esta radiación se puede considerar como un gas de fotones que se subordina a la estadística de Bose—Einstein, ya que para el fotón, el espín es igual a \hbar (tabla VIII.2.1). El número de estados cuánticos de la radiación en el volumen V (VII.1.1.4°) constituye

$$dg = 2 \frac{2\pi p^2 dp V}{h^3} = \frac{8\pi W^2 dW}{h^3 c} V,$$

donde p es el impulso del fotón (V.6.2.2°) ligado con su energía W mediante la relación $p = W/c$, en la que c es la velocidad de

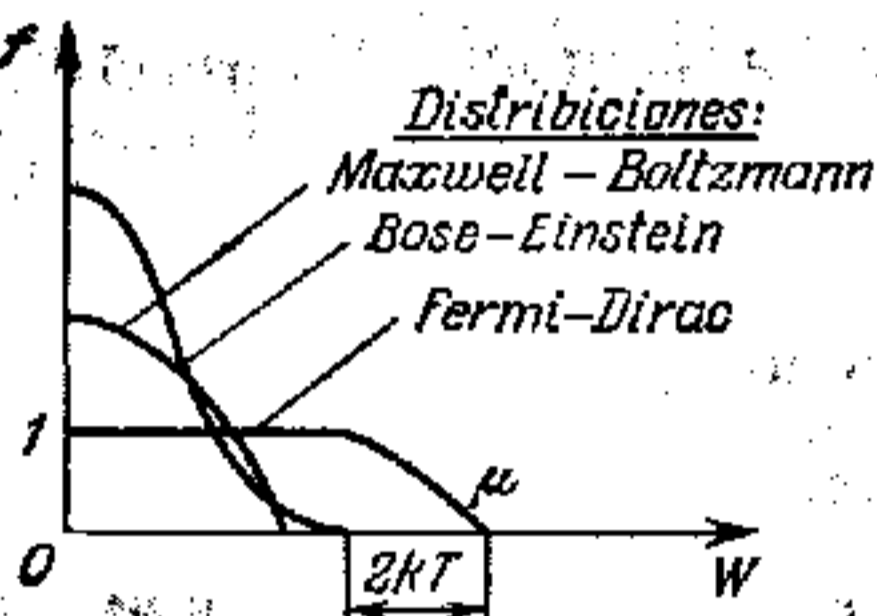


Fig. VII.2.1.

la luz en el vacío. El factor 2 aparece porque existen dos polarizaciones posibles de la luz (IV.4.1.8°). La energía del fotón $W = h\nu$ (V.6.1.4°), siendo ν la frecuencia.

El número de fotones con frecuencias en el intervalo de ν a $\nu + d\nu$ que hay en el volumen V , de acuerdo con el p. 2° constituye

$$dN = \frac{dg}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{8\pi\nu^2 d\nu V}{c^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}.$$

Aquí se tiene en cuenta que para el gas fotónico que no cumple la condición de conservación del número total de partículas, el potencial químico μ (p. 3°) es nulo.

La densidad volumétrica de la energía de radiación en el intervalo de frecuencias de ν a $\nu + d\nu$ es

$$\omega(\nu, T) = \frac{h\nu dN}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu d\nu}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)}$$

Este resultado es la fórmula de Planck para la densidad volumétrica de la energía de radiación del cuerpo negro (V.5.1.5°).

§ VII.2.3. Degeneración de los sistemas de partículas descritos por las estadísticas cuánticas

1°. Un sistema de partículas (en particular, un gas perfecto) se dice que está *degenerado* si sus propiedades, descritas por las leyes cuánticas, difieren de las propiedades de los sistemas ordinarios que cumplen las leyes clásicas. La discrepancia en el comportamiento de los gases de Bose y de Fermi respecto del gas clásico de Maxwell—Boltzmann se llama *degeneración de los gases* (*gas degenerado*). Esta degeneración se hace importante cuando las temperaturas son muy bajas y las densidades son grandes (p. 3°).

2°. Recibe el nombre de *parámetro de degeneración* A la magnitud

$$A = e^{\frac{\mu}{kT}},$$

en la que μ es el potencial químico (VII.2.2.3°). Con la condición $A \ll 1$ (pequeñez de la degeneración), en las funciones cuánticas de distribución f_B y f_F se puede despreciar la unidad que figura en sus denominadores y, entonces, estas funciones se transforman en la función clásica de distribución f_{M-B} de Maxwell—Boltzmann:

$$f_{M-B} = A e^{-W_i/kT}$$

El parámetro de degeneración se halla partiendo de la condición de normalización de las funciones de distribución: $\sum_i \Delta N_i = N$

(VII.2.2.2°), que significa la conservación del número total de partículas que hay en el sistema. La condición de pequeñez

de la degeneración tiene la forma siguiente:

$$A = \frac{n_0 h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \ll 1,$$

donde n_0 es la concentración de partículas; m , la masa de éstas; k , la constante de Boltzmann; h , la constante de Planck; y T , la temperatura absoluta.

3°. Se denomina *temperatura de degeneración* T_d aquella a la que la degeneración se hace importante (p. 1°). Esta temperatura se determina partiendo de la condición

$$A = \frac{n_0 h^3}{(2\pi m k T_d)^{3/2}} = 1, \text{ de donde } T_d = \frac{h^2 n_0^{2/3}}{2\pi m k}.$$

Criterio de temperatura de degeneración: si $T \leq T_d$, el sistema de partículas es degenerado; si $T \gg T_d$, el sistema de partículas no es degenerado y su comportamiento se describe por medio de las leyes clásicas.

Por ejemplo, para el hidrógeno en condiciones normales ($T = 300$ K y $n_0 \approx 3 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$), el parámetro de degeneración $A \approx 3 \cdot 10^{-5} \ll 1$. La temperatura de degeneración para el hidrógeno, $T_d \approx 1$ K. Para todos los demás gases, más pesados que el hidrógeno, A es todavía menor. Los gases en condiciones normales no son degenerados. La degeneración debida a las propiedades cuánticas de los gases, se manifiesta mucho menos que la desviación de los gases de la «perfección» debida a las interacciones entre las moléculas. El gas fotónico siempre es degenerado ($T_d = \infty$), puesto que para el fotón, la masa en reposo es nula $m_0 = 0$, tabla VIII.2.1). El gas de fotones se describe mediante la estadística cuántica de Bose—Einstein (VII.2.2.6°).

4°. Los electrones en los metales son un ejemplo de gas degenerado. En condiciones normales $n_0 \approx (10^{28} - 10^{29}) \text{ m}^{-3}$. Como la masa del electrón es pequeña ($m \approx 10^{-30}$ kg), resulta que $T_d \approx (16 - 20) \cdot 10^8$ K. El gas electrónico no se subordina a la estadística clásica de Maxwell—Boltzmann.

5°. La energía del gas electrónico degenerado (VII.2.4.5°) y de los otros gases que describen las estadísticas cuánticas no es función lineal de la temperatura. Por esto, la simple interpretación física de la temperatura absoluta (II.3.2.4°) no sirve en la región de los gases degenerados (p. 3°).

§ VII.2.4. Gas de Fermi electrónico degenerado en los metales

1°. La distribución de los electrones de conducción en los metales, entre las energías, viene definida por la función de distribución de Fermi—Dirac (VII.2.2.5°):

$$f_F = \frac{1}{e^{\frac{W-\mu}{kT}} + 1}$$

El número de estados cuánticos de los electrones en la unidad de volumen del metal, correspondiente al intervalo de energía de W a $W + dW$ (VII.2.1.4°):

$$dg(W) = \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{4\pi p^3 dp}{h^3} = \frac{2\pi (2m)^{3/2} W^{1/2} dW}{h^3}$$

Aquí se ha utilizado la relación entre el impulso del electrón y su energía:

$$p^2 = 2mW, \quad dp = \left(\frac{m}{2W}\right)^{1/2} dW.$$

El número de electrones $dn_0(W)$ que hay en la unidad de volumen del metal, cuya energía se encuentra en el intervalo de W a $W + dW$, según (VII.2.2.2°), constituye

$$dn_0(W) = 2f_F dg(W) = \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{h^3} \frac{W^{1/2} dW}{e^{\frac{W-\mu}{kT}} + 1}$$

El factor 2 tiene en cuenta que los electrones cumplen el principio de Pauli (VI.2.3.10°). Esta fórmula expresa la ley de distribución de los electrones de conducción del metal entre las energías.

2°. Las propiedades peculiares del gas electrónico se ponen de manifiesto en su comportamiento a la temperatura del cero absoluto ($T = 0$ K). Si μ_0 es el potencial químico del gas electrónico a $T = 0$ K (VII.2.2.3°), entonces

$$f_F = \frac{1}{e^{\frac{W-\mu_0}{kT}} + 1}$$

para $W < \mu_0$ la diferencia $W - \mu_0 < 0$ y $f_F = \frac{1}{e^{\frac{1}{\mu_0 - W} + 1} kT}$,

para $W - \mu_0 < 0$ y $T \rightarrow 0$, $\exp\left(\frac{\mu_0 - W}{kT}\right) \rightarrow \infty$ y $f_F \rightarrow 1$, para $W > \mu_0$ la diferencia $W - \mu_0 > 0$ y cuando $T \rightarrow 0$, $\exp\left(\frac{W - \mu_0}{kT}\right) \rightarrow \infty$ y $f_F \rightarrow 0$.

La gráfica de distribución de Fermi f_F para $T = 0$ K se da en la fig. VII.2.2. En el intervalo de energía de 0 a μ_0 , la fun-

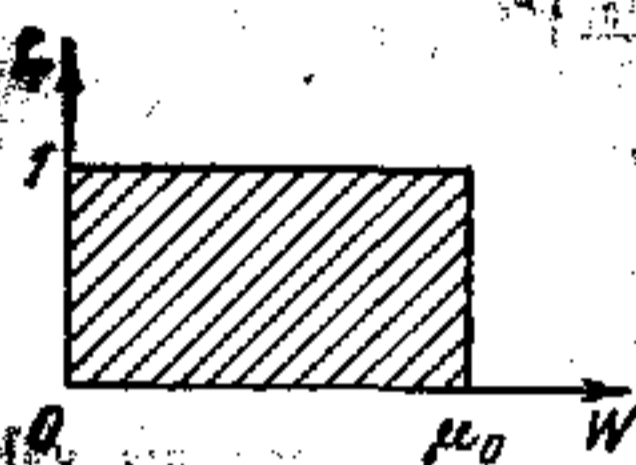


Fig. VII.2.2.

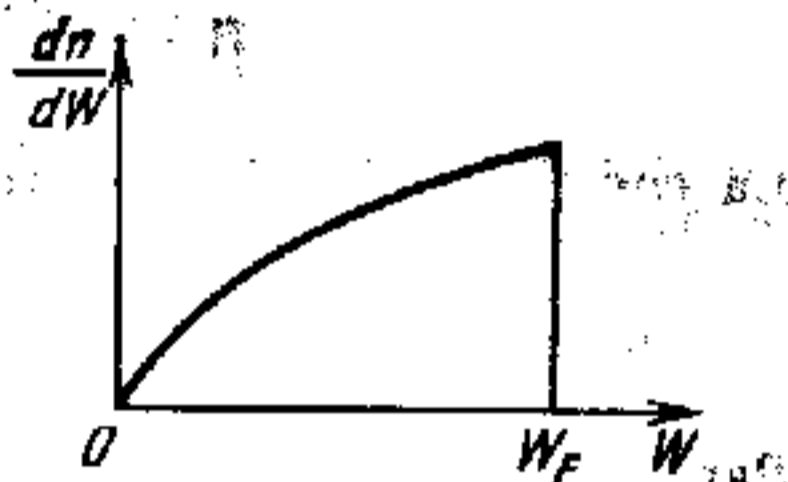


Fig. VII.2.3.

ción f_F es igual a la unidad, y al pasar por $W = \mu_0$, desciende de golpe hasta cero. Cuando $T = 0$ K los electrones del metal ocupan todos los niveles de energía permisibles, con una «densidad de población» igual a la unidad (VII.2.2.2°), hasta llegar al nivel de energía $W = \mu_0$. Todos los niveles con energía mayor que μ_0 están desocupados (su «densidad de población» es cero). Así, pues, μ_0 es la energía máxima que pueden tener los electrones de conducción en el metal a la temperatura del cero absoluto. Esta energía se conoce con el nombre de *energía de Fermi*: $\mu_0 = W_F$. Si en la fig. VII.2.2 se toman sobre el eje de abscisas los números de orden de los niveles de energía ocupados por los electrones de conducción en la unidad de volumen, el mayor será el nivel con el número $n_0/2$, donde n_0 es la concentración de electrones. El nivel más alto ocupado por los electrones se llama *nivel de Fermi*. A este nivel corresponde la energía de Fermi W_F que tiene el electrón en este nivel.

3°. La ley de distribución de los electrones de conducción entre las energías a $T = 0$ K tiene la forma si-

guiente:

$$dn_0(W) = \frac{4\pi (2m)^{3/2} W^{1/2} dW}{h^3}$$

y gráficamente se representa por la curva de la fig. VII.2.3.

El número total de electrones de conducción que hay en la unidad de volumen del metal constituye

$$n_0 = \int_0^{W_F} dn_0(W) = \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{W_F} W^{1/2} dW = \frac{4\pi (2m)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} W_F^{3/2}$$

De donde

$$W_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n_0}{8\pi} \right)^{2/3}$$

La energía media del electrón $\langle W \rangle$ a $T = 0$ K es

$$\langle W \rangle = \frac{3}{5} W_F = \frac{3}{5} \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n_0}{8\pi} \right)^{2/3}$$

Para $n_0 = 6 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, sustituyendo h y m por sus valores, obtenemos:

$$\langle W \rangle = 9 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 5,4 \text{ eV.}$$

Si se compara esta energía con la energía media de las moléculas de un gas monoatómico no degenerado $\langle W \rangle = 3/2 kT$ (II.3.2.4°), resulta que la molécula podría tener la energía de Fermi W_F a la temperatura $T \simeq 10^4$ K. En otras palabras, en las condiciones normales $kT/W_F \ll 1$.

4°. A temperatura distinta del cero absoluto, la función de distribución de Fermi—Dirac f_F tiene la forma representada en la fig. VII.2.4 por una curva continua. En esta misma figura,

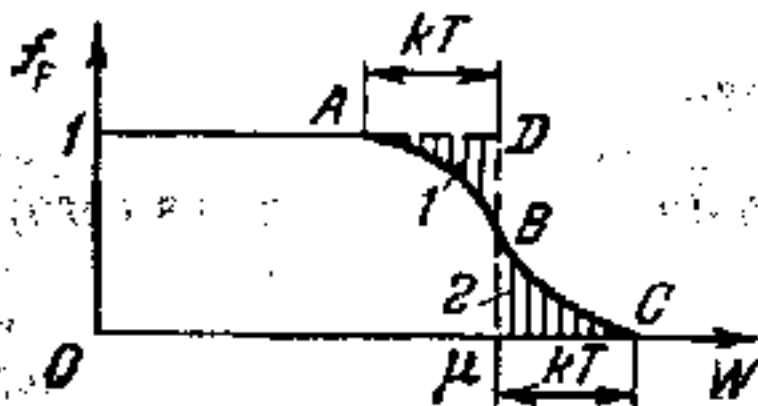


Fig. VII.2.4.

con línea de trazos, se representa la función f_F para $T = 0$ K. Estas curvas difieren, por el carácter de caída, en las proximidades del valor $W = \mu$. El brusco descenso vertical para $W = \mu_0 = W_F$ en el caso de $T = 0$ K (fig. VII.2.2) es sustituido por la curva suave ABC cuando $T \neq 0$. Es esencial que los

estados de los electrones que se encuentran en los niveles de energía que satisfacen la condición $W \ll \mu$, no varían al elevarse la temperatura desde 0 K hasta T . La deformación de la función f_F sólo ocurre en su «cola», en el intervalo de energía de anchura $2kT$ próximo al valor $W = \mu$, con el cual $f_F = 1/2$.

5°. El potencial químico μ (VII.2.2.3°) del gas electrónico a la temperatura T es

$$\mu = W_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{W_F} \right)^2 \right].$$

La energía interna U (II.2.1.2°) de un mol de gas electrónico,

$$U = \frac{3}{5} N_A W_F \left[1 + \frac{5}{12} \frac{\pi^2 (kT)^2}{W_F^2} \right].$$

Aquí N_A es el número de Avogadro (IX) y k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°). Las magnitudes μ y U prácticamente no varían al elevarse la temperatura.

El calor molecular $C_{V\mu}$ (II.2.5.2°) del gas electrónico,

$$C_{V\mu} = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\pi^2}{2} N_A k \frac{kT}{W_F}.$$

Su comparación con la capacidad calorífica de un gas monoatómico no degenerado (II.3.7.1°) $C_{V\mu}^{\text{clas}} = 3/2 N_A k$, muestra que

$$\frac{C_{V\mu}}{C_{V\mu}^{\text{clas}}} = \frac{\pi^2}{3} \frac{kT}{W_F}.$$

A la temperatura ambiente $kT/W_F \approx 0,01$ (p. 3°), por lo que $C_{V\mu}/C_{V\mu}^{\text{clas}} \approx 0,03$. La capacidad calorífica del gas electrónico degenerado es insignificante. Esto se debe a que en el proceso de variación de la energía interna de dicho gas al calentarse, interviene un número insignificante de electrones que se encuentran en la «región de caída» de la función de distribución f_F de Fermi—Dirac (zonas rayadas 1 y 2 en la fig. VII.2.4). De este modo se elimina una de las grandes dificultades con que tropezaba la teoría electrónica clásica de la conductibilidad de los metales.

§ VII.2.5. Noción de la teoría cuántica de la conductibilidad eléctrica de los metales

1°. La teoría de la conductibilidad eléctrica de los metales construida sobre la base de la mecánica cuántica (VI.1.1.1°) y de la estadística cuántica de Fermi—Dirac (VII.2.2.5°) se llama *teoría cuántica de la conductibilidad de los metales*. De esta teoría, valiéndose de la función de distribución de Fermi—Dirac (VII.2.2.5°), se ha deducido la ley de Ohm para la densidad de la corriente (III.7.3.4°):

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}.$$

2°. La conductividad eléctrica γ se calcula, en la teoría cuántica de la conductibilidad eléctrica, por medio de la fórmula

$$\gamma = \frac{n_0 e^2 \langle \lambda_F \rangle}{m u_F},$$

en la que n_0 es el número de electrones de conducción que hay en la unidad de volumen del metal; $\langle \lambda_F \rangle$, el recorrido libre medio del electrón (II.3.5.1°) que tiene la energía de Fermi (VII.2.4.2°); y u_F , la velocidad del movimiento térmico de este electrón. Aunque a primera vista esta fórmula se parece a la fórmula para γ de la teoría electrónica clásica (III.7.3.4°), su contenido físico es completamente otro y, a diferencia de la clásica, está totalmente de acuerdo con los datos experimentales.

3°. En la teoría cuántica de la conductibilidad de los metales se explica la variación de la conductividad en función de la temperatura: $\gamma \sim 1/T$, así como la magnitud anormalmente grande del recorrido libre medio de los electrones en el metal (III.7.3.7°). El movimiento ordenado de los electrones en el metal, es decir, la corriente eléctrica se considera, en la teoría cuántica, como un proceso de propagación de las ondas de De Broglie (VI.1.1.4°) electrónicas que se difunden en las oscilaciones térmicas inarmónicas de los nodos de la red del metal (VII.1.2.4°). En óptica, un fenómeno análogo se produce cuando una onda luminosa se propaga a través de un medio turbio que contiene centros de difusión (partículas suspensas en el líquido, soluciones coloidales, etc.) (V.3.3.1°). Si las distancias entre los centros de difusión son de un orden comparable con la longitud de onda λ , se produce la difusión de la luz, y su intensidad

disminuye a medida que ésta se propaga en el medio. Si las distancias entre los centros de difusión son mucho menores que $\lambda/2$, el medio es ópticamente homogéneo y la difusión de la luz no se produce.

4°. Una red cristalina ideal, en la que no existen alteraciones de la periodicidad y en cuyos nodos se hallan partículas en reposo, se comporta de un modo semejante a un medio óptico homogéneo, no difunde las ondas electrónicas, y los electrones de conducción pasan por esta red sin resistencia. La difusión de las ondas electrónicas se produce únicamente cuando se ponen de manifiesto las alteraciones de periodicidad de la red, es decir, las heterogeneidades que desempeñan el papel de centros de difusión. Estos centros son, por ejemplo, las fluctuaciones de la densidad de la red (II.4.6.3°) que se producen como resultado de las oscilaciones inarmónicas térmicas de los iones positivos del metal. A excepción de los superconductores (VII.2.6.1°) esta difusión hace que los metales puros tengan resistencia eléctrica.

5°. Al elevarse la temperatura aumenta la difusión de las ondas electrónicas en las oscilaciones térmicas de los nodos de la red y disminuye el recorrido libre medio de los electrones.

La magnitud $\langle \lambda_F \rangle$ se calcula por la fórmula

$$\langle \lambda_F \rangle = \frac{Ed}{\pi n_0 kT},$$

en la que E es el módulo de Young (VII.1.3.6°); d , el período de la red cristalina; n_0 , el número de átomos que hay en la unidad de volumen; k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°); y T , la temperatura absoluta. La conductividad resulta ser inversamente proporcional a la temperatura y no depende de n_0 en los metales monovalentes *):

$$\gamma = \frac{e^2 E d}{m u_F \pi k T}.$$

Esta fórmula concuerda con los datos experimentales en la región de temperatura ambiente. Por ejemplo, para la plata ($E = 10^7$ N/m², $d = 3 \cdot 10^{-10}$ m, $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, $kT \sim 4,2 \times 10^{-21}$ J, $u_F = 1,4$ m/s) se obtiene $\gamma_{\text{teor}} \approx 5 \cdot 10^7$ $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, mientras que $\gamma_{\text{exp}} \approx 6,3 \cdot 10^7$ $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. A temperaturas muy bajas

*) En estos metales, la concentración de electrones de conducción y la concentración de iones de la red coinciden.

estas fórmulas no son correctas. El recorrido libre medio depende, en estas condiciones, de la temperatura según la ley $\gamma \sim 1/T^5$ que está de acuerdo con los datos experimentales.

6°. Además de las fluctuaciones de la densidad, son causa de la difusión de las ondas electrónicas y de la resistencia eléctrica de los metales, las alteraciones de la periodicidad de la red cristalina, debidas a las inclusiones en ella de átomos de impurezas. La resistividad ρ del metal ($\rho = 1/\gamma$) consta de dos partes:

$$\rho = \rho_T + \rho_{\text{imp}}$$

Aquí ρ_T es la resistividad debida a la difusión de las ondas electrónicas por las fluctuaciones de la densidad, y ρ_{imp} , la resistividad causada por la difusión en las impurezas. Es esencial que ρ_{imp} no depende de la temperatura y, por lo tanto, como $T \rightarrow 0$

y $\rho_T \rightarrow 0$, al descender la temperatura, $\rho \rightarrow \rho_{\text{imp}}$; ρ_{imp} se llama *resistividad residual*. Esta resistencia persiste en el metal cuando éste se enfría hasta el cero absoluto. En la fig. VII.2.5 se muestra la variación de la resistividad en función de la temperatura. El segmento cortado sobre el eje de ordenadas por la prolongación de la curva hasta $T = 0$ K representa la resistividad residual; ρ_0 es la resistividad a 0°C.

§ VII.2.6. Fenómeno de superconductividad

1°. El fenómeno de superconductividad consiste en que en ciertos metales y aleaciones se produce un descenso brusco de la resistividad en las proximidades de una temperatura T_s llamada *temperatura de transición al estado superconductor*. Los cuerpos que poseen estas propiedades se dice que son *superconductores*. En la actualidad se conocen más de 500 elementos puros y aleaciones que manifiestan la propiedad de superconductividad. El intervalo de temperatura AB (fig. VII.2.6) de transición al estado superconductor para las muestras puras no supera varias milésimas de grado y, por esto, tiene sentido el valor determinado de T_s . La anchura del intervalo AB depende de la heterogeneidad del metal, y en primer lugar de la existencia

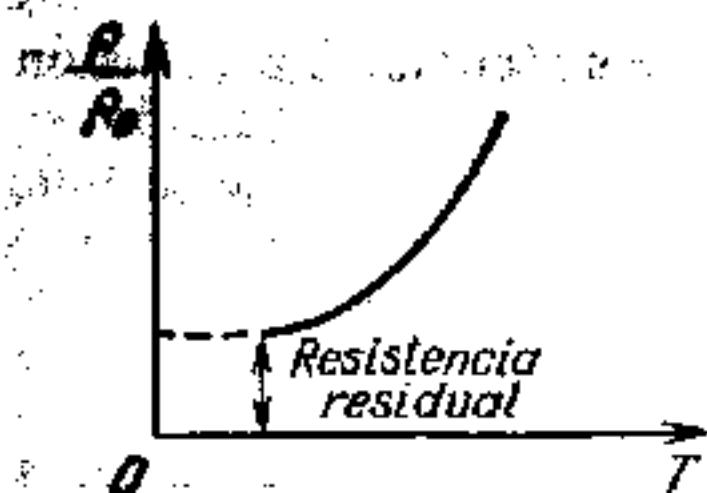


Fig. VII.2.5.

en él de impurezas y tensiones internas. Las temperaturas T_s conocidas actualmente varían dentro de los límites de 0,155 K (BiPt) y 23,2 K (Nb₃Ge).

El efecto isotópico en los superconductores consiste en que la temperatura T_s es inversamente proporcional a las raíces cuadradas de las masas atómicas de los isótopos (VIII.1.1.2°) del mismo metal superconductor.

2°. Un campo magnético suficientemente intenso destruye, a una temperatura determinada, el estado superconductor de la

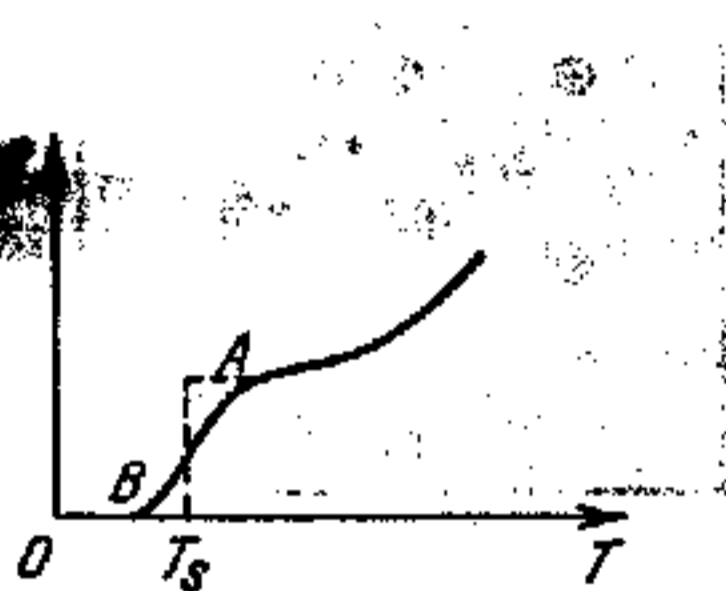


Fig. VII.2.6.

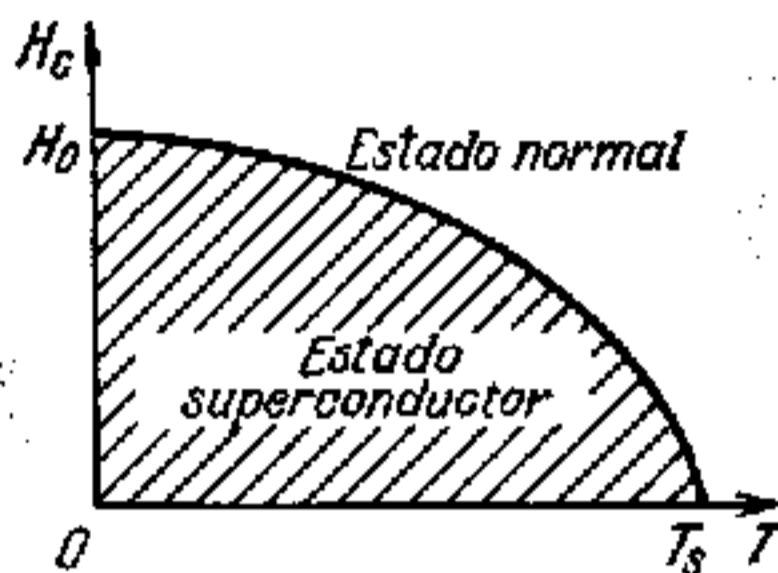


Fig. VII.2.7.

substancia. Cuando sobre un superconductor actúa un campo magnético, la temperatura T_s (p. 1°) desciende.

El campo magnético de tensión H_c , que a una temperatura dada provoca la transición de la substancia del estado superconductor al normal, se llama *campo crítico*. Al disminuir la temperatura del superconductor, la magnitud H_c aumenta en primera aproximación según la ley $H_c = H_0 [1 - (T/T_s)^2]$. La curva de la fig. VII.2.7 divide las regiones de los estados superconductor y normal de la substancia.

Las propiedades superconductoras de los conductores desaparecen cuando pasa por éstos una corriente eléctrica intensa, la cual crea un campo magnético que destruye el estado superconductor.

3°. Un campo magnético externo más débil que el crítico (p. 2°) no penetra en el superconductor. La inducción magnética B (III.10.1.2°) siempre es nula en el volumen del superconductor. En la fig. VII.2.8, el campo magnético uniforme (III.10.7.3°) está dirigido a lo largo del eje de un superconductor cilíndrico. Éste se comporta como si «echara» el campo magnético fuera de la parte del espacio ocupada por él, y es un diamagnético ideal

cuya susceptibilidad magnética $\chi_m = -1$ (III.13.4.4°). En este caso la permeabilidad magnética $\mu = 1 + \chi_m = 0$ y $B = \mu_0 \mu H = 0$.

4°. El paso de una substancia al estado superconductor va acompañado de la variación de las propiedades térmicas de ésta. Así, en ausencia de campo magnético, a la temperatura de transición T_c (p. 1°) varía bruscamente la capacidad calorífica (II.2.5.1°). En presencia de campo magnético, la transición isotérmica del estado superconductor al estado normal va ligada

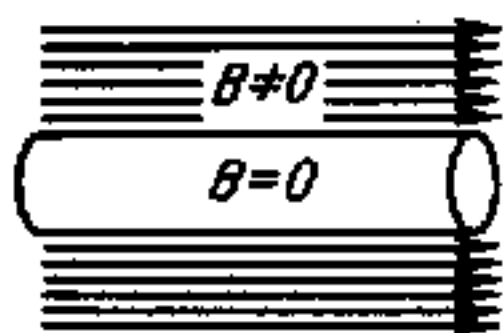


Fig. VII.2.8.



Fig. VII.2.9.

a la variación a saltos de la conductibilidad calorífica y de la capacidad calorífica. Estos fenómenos son indicios característicos de una transición de fase de II orden (II.5.4.2°).

5°. La teoría mecanocuántica considera el fenómeno de superconductividad como una superfluidez (II.5.4.3°) de los electrones en el metal, con la ausencia de rozamiento peculiar de dicha superfluidez. Los electrones de conducción se mueven en el superconductor sin dificultad, sin «rozamiento» en los nudos de la red cristalina. La característica fundamental de los superconductores consiste en que en ellos se produce una atracción mutua de los electrones, los cuales forman parejas. La causa de esta atracción es la interacción entre los electrones, adicional a la repulsión coulombiana que se efectúa bajo la influencia de la red cristalina y que hace que los electrones se atraigan. El modelo de cómo se produce esta atracción se representa en la fig. VII.2.9. El electrón de conducción e_1 atrae al ion I de la red cristalina y lo desplaza de su posición de equilibrio. Con esto varía el campo eléctrico dentro del cristal. El ion I genera un campo eléctrico que actúa sobre los electrones de conducción, entre los que se incluye el electrón e_2 . La interacción entre los electrones e_1 y e_2 se efectúa con ayuda de la red cristalina. El desplazamiento del ion por la acción del electrón hace que este

último se vea envuelto por una «nube» de carga positiva mayor que su propia carga negativa. El electrón, junto con esta «nube», tiene carga total positiva y atrae a otro electrón.

6°. En la teoría cuántica de los metales, la atracción entre los electrones (intercambio de fonones) se relaciona con la aparición de excitaciones elementales de la red cristalina. Un electrón que se mueve en el cristal e interacciona con otro electrón mediante la red, hace que ésta pase a un estado excitado. Al volver la red a su estado fundamental, ella emite un cuanto de energía de frecuencia sonora, es decir, un *fonón* (VII.2.7.5°), el cual es absorbido por otro electrón. La atracción entre los electrones podemos figurárnosla como un intercambio de fonones entre los electrones. El efecto de atracción será máximo si los impulsos de los electrones que interaccionan son anti-paralelos.

7°. La aparición del estado superconductor de una sustancia está relacionada con la posibilidad de que se formen en el metal pares de electrones enlazados. La distancia δ entre los electrones de un par es

$$\delta = \frac{h u_F}{k T_s},$$

donde h es la constante de Planck; u_F , la velocidad del electrón en el nivel de Fermi (VII.2.5.2°); k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°); y T_s , la temperatura de transición al estado superconductor (p. 1°). La evaluación da que $\delta \approx 10^{-4}$ cm, es decir, que los electrones que forman un par se hallan entre sí a distancias del orden de 10^4 períodos de la red cristalina. Todo el sistema electrónico de un superconductor constituye una «colectividad» ligada que se extiende a distancias que, comparadas con las escalas atómicas, son enormes.

Si a temperaturas tan bajas como se desee, la repulsión coulombiana entre los electrones prevalece sobre la atracción que forma los pares, la sustancia (metal o aleación), por sus propiedades eléctricas, permanece en estado normal. Si, por el contrario, a temperatura T_s (p. 1°) las fuerzas de atracción superan las de repulsión, la sustancia pasa al estado superconductor.

8°. Una peculiaridad muy importante de la «colectividad» de electrones ligados por parejas en un superconductor es la imposibilidad del intercambio de energía entre dichos electrones y la red en porciones pequeñas, menores que la energía de enlace de los pares de electrones. Esto significa que en las colisiones

de los electrones con los nodos de la red cristalina, la energía de los electrones no varía, y la sustancia se comporta como un superconductor de resistividad nula. El estudio mecanocuántico muestra que con esto no se produce difusión de las ondas electrónicas en las oscilaciones térmicas de la red o en las impurezas. Esto significa, a su vez, que no existe resistencia eléctrica.

9°. La destrucción del estado superconductor requiere un gasto de energía determinado. A la temperatura $T = T_s$ (p. 1°) se produce la alteración de los estados ligados de los pares de electrones, cesa la atracción entre éstos y desaparece el fenómeno de superconductividad.

10°. El fenómeno de superconductividad se utiliza para obtener campos magnéticos potentes, ya que al pasar por el superconductor corrientes intensas, generadoras de campos magnéticos fuertes, no se producen pérdidas térmicas. Sin embargo, como el campo magnético destruye el estado de superconducción (p. 2°), para obtener campos magnéticos intensos se utilizan *superconductores de II orden*, especiales (ciertas aleaciones y películas delgadas superconductoras). En estos superconductores, los campos magnéticos de intensidad mayor que H_c (p. 2°) penetran en la sustancia en forma de hilos que atraviesan la muestra. Entre estos hilos la sustancia sigue siendo superconductora y las corrientes intensas pueden crear campos magnéticos superintensos. Han alcanzado gran difusión los electroimanes basados en solenoides superconductores.

§ VII.2.7. Capacidad calorífica de los sólidos

1°. En los sólidos no se hace distinción entre las capacidades caloríficas C_V y C_p (II.2.5.4°, 7°). La aportación fundamental a la capacidad calorífica de los sólidos no metálicos la hace la energía de las oscilaciones térmicas de las partículas que se encuentran en los nodos de las redes cristalinas. En los metales hace una aportación insignificante a la capacidad calorífica, el gas electrónico degenerado (VII.2.4.5°).

2°. La teoría clásica de la capacidad calorífica de los sólidos se basa en la ley de equipartición de la energía entre los grados de libertad (II.3.6.4°). Un sólido homogéneo se considera como un sistema de partículas independientes entre sí, con 3 grados de libertad, que efectúan oscilaciones térmicas con igual frecuencia. La energía media $\langle W \rangle$, correspondiente a un grado de libertad, constituye $\langle W \rangle = kT$ (II.3.6.5°). La energía interna U

(II.2.1.2°) de un mol de un sólido será

$$U = 3N_A \langle W \rangle = 3N_A kT = 3RT,$$

donde N_A es el número de Avogadro (IX); k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°); $R = kN_A$, la constante universal de los gases (II.1.4.4°). La capacidad calorífica molar *) (II.2.5.4°) de un sólido con red cristalina atómica constituye

$$C_\mu = \frac{\partial U}{\partial T} = 3R = 25 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 5,97 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

Ley de Dulong y Petit: la capacidad calorífica molar de todos los sólidos cristalinos químicamente simples es aproximadamente

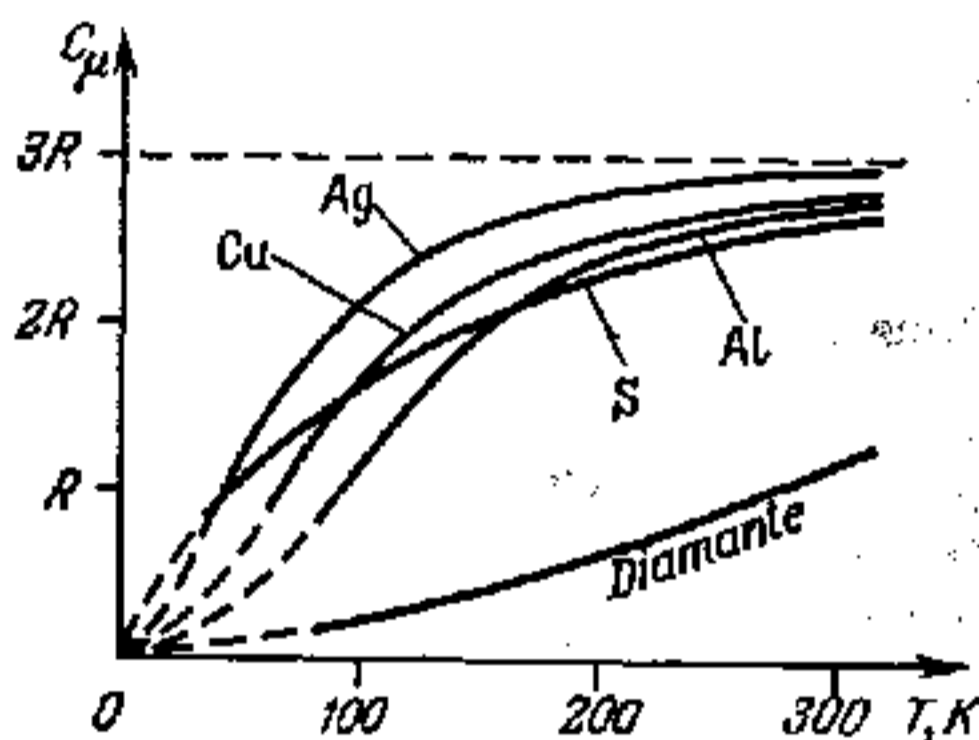


Fig. VII.2.10.

igual a $6 \text{ cal/mol} \cdot \text{K}$. De acuerdo con esta ley, la capacidad calorífica molar de los sólidos no debe depender de la temperatura ni de ninguna característica de los cristales. Las experiencias contradicen esto e indican que la capacidad calorífica depende de la temperatura, sobre todo en la región de temperaturas bajas (fig. VII.2.10). Las causas de discrepancia de la teoría clásica de la capacidad calorífica de los sólidos, con la experiencia, son el carácter limitado de la ley de equipartición de la energía entre los grados de libertad y su inutilidad en la región de bajas temperaturas, en la cual la energía media de las partículas oscilantes de la red cristalina tiene que ser calculada por las leyes de la mecánica cuántica (VI.1.5.9°).

* Suele decirse con frecuencia, capacidad calorífica referida a un átomo—gramo del sólido.

3°. En la teoría cuántica inicial de la capacidad calorífica de los sólidos, el cristal se considera como un sistema de N átomos, cada uno de los cuales es un oscilador armónico cuántico. Las oscilaciones de todos los átomos se efectúan independientemente unas de otras y con la misma frecuencia ω . La energía media $\langle W \rangle$, correspondiente a un grado de libertad de un átomo oscilador armónico cuántico, constituye (VI.1.5.9°)

$$\langle W \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

La energía interna U (II.2.1.2°) de un mol de un sólido se expresa como sigue:

$$U = 3N_A \langle W \rangle = 3N_A \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

de donde se deduce la capacidad calorífica molar del sólido: *)

$$C_\mu = 3R \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2}$$

Si se introduce la temperatura característica $T_\theta = \frac{h\nu}{kT}$,

$$C_\mu = 3R \left(\frac{T_\theta}{T} \right)^2 \frac{e^{T_\theta/T}}{\left(e^{T_\theta/T} - 1 \right)^2}$$

Este resultado describe cualitativamente la variación de las capacidades caloríficas de los sólidos en función de la temperatura, representada en la fig. VII.2.10.

A altas temperaturas ($h\nu \ll kT$), como se indica en VI.1.5.9°, $\langle W \rangle = kT$ de acuerdo con la ley de equipartición de la energía entre los grados de libertad (II.3.6.5°), y $C_\mu = 3R$.

A bajas temperaturas ($h\nu \gg kT$)

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \sim e^{\frac{h\nu}{kT}} \quad \text{y} \quad C_\mu = 3R \left(\frac{T_\theta}{T} \right)^2 e^{-T_\theta/T}$$

*) Véase la llamada de la pág. 597.

Cuando $T \rightarrow 0$ tenemos que $T_\theta/T \rightarrow \infty$ y $e^{-T_\theta/T} \rightarrow 0$ más de prisa que aumenta $(T_\theta/T)^2$. Por esto, cuando $T \rightarrow 0$, la capacidad calorífica $C_\mu \rightarrow 0$, lo que cualitativamente está de acuerdo con la experiencia. Pero esta teoría cuántica simple no describe el comportamiento cuantitativo de la capacidad calorífica de los sólidos en las proximidades del cero absoluto.

4°. La suposición de que todos los átomos del sólido realizan oscilaciones térmicas independientemente unos de otros y con la misma frecuencia, simplifica demasiado la imagen real de las partículas en la red cristalina. Entre los átomos (u otras partículas) del sólido existen interacciones tan fuertes, que la totalidad de N partículas del sólido forman un sistema ligado que posee $3N$ grados de libertad y, además, las oscilaciones de todos los átomos pueden tener distintas frecuencias. Un problema tan complejo como el de la distribución de las frecuencias de las oscilaciones de los átomos en el sólido sirvió en su tiempo de base a la teoría precisada de la capacidad calorífica de los sólidos. El sólido tiene un amplio espectro de frecuencias de oscilación. Existen en él oscilaciones con frecuencias bastante bajas y con frecuencias más altas. Las frecuencias bajas corresponden a las oscilaciones elásticas del cristal en la banda sonora (o ultrasonora). El enlace entre las partículas de la red cristalina hace que en el cristal se propaguen las ondas sonoras elásticas.

La idea física de la teoría de la capacidad calorífica de los sólidos, que precisó la teoría expuesta en el p. 3°, consistió en que la aportación principal a la energía de las oscilaciones térmicas del cristal la hacen las oscilaciones de frecuencias bajas, correspondientes a las ondas elásticas con longitudes mayores que el período de la red cristalina. Esto se deduce, en particular, de la fig. VI.1.7, que muestra que la mayor aportación a la energía media de un oscilador cuántico la hacen las oscilaciones con frecuencias pequeñas (VI.1.5.9°). Las ondas elásticas que se propagan se comportan como si lo hiciesen en un medio continuo. La estructura atómica del cristal no influye en la propagación por él de las ondas elásticas con longitudes mayores que $\lambda_{\min} = v/v_{\max}$, donde v es la velocidad de la onda elástica correspondiente, y v_{\max} , su frecuencia. La longitud de onda λ_{\min} debe ser conmensurable con el período de la red, es decir, $\lambda_{\min} \sim d \sim (V/N)^{1/3}$, siendo N el número de partículas (nodos de la red cristalina) que hay en el volumen V del cristal.

5°. Las ondas elásticas en el cristal tienen propiedades cuánticas que se manifiestan en que existe una porción mínima —cuanto de energía de la onda de frecuencia ν dada. Esto permite comparar la onda de frecuencia ν con ciertas *cuasipartículas* —fonones— cuya propagación con velocidad del sonido v concuerda con la velocidad de la onda sonora.

El fonón posee energía $W = h\nu$, en la que h es la constante de Planck (IX), y el cuasiimpulso $p = h\nu/v$. La dirección del *cuasiimpulso* p del fonón coincide con la dirección de propagación de la onda sonora. La diferencia más importante entre el cuasiimpulso y el impulso consiste en que en los choques de los fonones en los cristales, el cuasiimpulso se puede transmitir (en porciones discretas) a la red cristalina sin conservarse *).

Resumiendo, análogamente a como la cuantización del campo electromagnético conduce los fotones (V.6.1.4°), la cuantización del campo sonoro lleva a los fonones.

6°. El espín de los fonones es nulo, por lo que éstos se supeditan a la estadística de Bose—Einstein (VII.2.2.2°). Los fonones pueden ser emitidos y absorbidos, pero su número no permanece constante; por esto, el potencial químico del gas de fonones (VII.2.2.3°) es igual a cero (compárese con VII.2.2.6°)

La energía del cristal se puede considerar como la energía del gas fonónico y puede calcularse de un modo análogo a como se hace en VII.2.2.6°. El número dN de fonones cuyas frecuencias se encuentran en el intervalo de ν a $\nu + d\nu$ constituye

$$dN = \frac{dg}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

donde dg es el número de estados cuánticos (número de celdas) que hay en el volumen V del cristal:

$$dg = 3 \frac{4\pi p^2 dp V}{h^3} = 3 \frac{4\pi \nu^2 d\nu}{v^3} V,$$

donde $p = h\nu/v$ es el cuasiimpulso del fonón, y v , la velocidad del sonido en el cristal. El factor 3 tiene en cuenta que en el sólido pueden propagarse ondas longitudinales y transversales

*) El examen detallado de las propiedades de las cuasipartículas, relacionado con la importancia de la periodicidad de la estructura del cristal, rebasa los límites de este manual.

con dos polarizaciones perpendiculares entre sí*) (IV.4.1.8°). De este modo,

$$dN = \frac{12\pi v^2 dv V}{v^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}$$

La energía interna U (II.2.1.2°) del cristal (salvo la energía de punto cero) constituye

$$U = \int_0^{v_{\text{máx}}} h\nu dN = \frac{12\pi V h}{v^3} \int_0^{v_{\text{máx}}} \frac{v^3 dv}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

donde $v_{\text{máx}} = v (3N/4\pi V)^{1/3}$ es el límite superior de las frecuencias de los fonones que hacen aportación a la energía de las oscilaciones térmicas del cristal. En el p. 4° se da la evaluación de $v_{\text{máx}}$ en orden de magnitud.

Al calcular U se introduce la *temperatura característica de Debye* $T_D = h\nu_{\text{máx}}/k$ y se consideran dos casos límites:

a) *Altas temperaturas* $T \gg T_D$.

En este caso $e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}$ y $U = \frac{12\pi V}{v^3} kT \int_0^{v_{\text{máx}}} v^2 dv =$

$$= \frac{12\pi V kT}{v^3} \frac{v_{\text{máx}}^3}{3} = 3NkT.$$

Para un mol del cristal $N = N_A$, donde N_A es el número de Avogadro (IX), y la capacidad calorífica molar C_μ concuerda con la ley de Dulong y Petit (p. 2°):

$$C_\mu = \frac{\partial U}{\partial T} = 3N_A k = 3R.$$

b) *Bajas temperaturas* $T \ll T_D$.

Cuando se calcula la integral $\int_0^{v_{\text{máx}}} \frac{v^3 dv}{\exp(h\nu/kT) - 1}$ se introduce la nueva variable $\xi = h\nu/kT$, y el límite superior se sus-

*) No tenemos en cuenta la diferencia de velocidades de las ondas longitudinales y transversales, simplemente triplicamos el número de estados cuánticos de los fonones.

tituye por ∞ :

$$U = \frac{12\pi Vh}{v^3} \int_0^{v_{\text{máx}}} \frac{v^3 dv}{\exp(hv/kT) - 1} = \frac{12\pi Vh}{v^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{\xi^3 d\xi}{e^{\xi} - 1} = \frac{4\pi^5 k^4 V}{5h^3 v^3} T^4.$$

La capacidad calorífica molar C_{μ} es proporcional al cubo de la temperatura absoluta y se subordina a la *ley de Debye*:

$$C_{\mu} = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{16\pi^5 k^4 V T^3}{5h^3 v^3} = \text{const } T^3.$$

§ VII.2.8. Nociones acerca de la teoría de las bandas en los sólidos

1°. El orden remoto en los cristales (VII.1.1.1°) hace que en los sólidos exista un campo eléctrico que es función periódica de las coordenadas. En un metal, por ejemplo, en que los iones

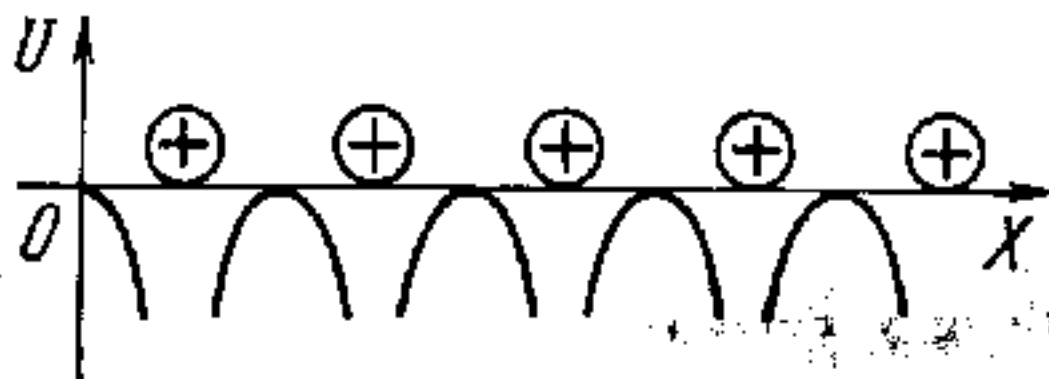


Fig. VII.2.11.

positivos se encuentren en los nodos de la red en orden riguroso, la energía potencial del electrón varía a lo largo de cierta dirección OX como se ve en la fig. VII.2.11. Los mínimos de energía corresponden a los puntos en que se encuentran los iones positivos.

2°. El campo eléctrico periódico de un cristal de cualquier tipo (VII.1.1.3°) hace que varíen notablemente los estados energéticos de los electrones en el sólido, en comparación con sus estados en los átomos aislados. En los átomos aislados, los elec-

trones se encuentran en estados de energía discretos (VI.1.2.5°). En el sólido, los estados de energía de los electrones vienen determinados tanto por su interacción con el núcleo de su átomo, como por el campo eléctrico de la red cristalina, es decir, por la interacción con los otros átomos. Como resultado de esta interacción, los niveles de energía de los electrones se descomponen. En vez del nivel de energía discreto, característico del átomo aislado, en el sólido integrado por N átomos que accionan entre sí, aparecen N niveles de energía próximos unos a otros y que forman una *banda energética*. En los cristales se origina un *espectro energético de bandas de los electrones*.

3°. La formación del espectro energético de bandas en el cristal se deduce de la relación de incertidumbre (VI.1.6.6°). En un átomo aislado, en virtud de la finitud del tiempo τ de vida del electrón en estado excitado ($\tau \sim 10^{-8}$ s) (VI.2.1.5°), la anchura ΔW del nivel energético constituye

$$\Delta W \sim \frac{\hbar}{\tau} \approx 10^{-7} \text{ eV}$$

(anchura natural del nivel energético).

En el cristal, los electrones de valencia de los átomos (VI.2.3.9°) están más débilmente ligados a los núcleos que los electrones internos, y mediante el efecto túnel (VI.1.7.2°) pueden pasar de un átomo a otro. Se produce la infiltración de los electrones a través de la barrera de potencial (VI.1.7.1°) que separa los átomos en el cristal.

Valoremos la magnitud τ del tiempo de vida medio de un electrón de valencia en un átomo dado. Admitamos que la transparencia de la barrera D viene expresada por la fórmula (VI.1.7.2°)

$$D \approx e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}L}$$

en la que $U_0 - W$ es la altura de la barrera constituida por la energía de ionización e igual, aproximadamente, a 10 eV, y L es la anchura de la barrera conmensurable con el período de la red cristalina $L \approx d \approx 10^{-10}$ m. La frecuencia ν de infiltración de un electrón a través de la barrera constituye:

$$\nu = \frac{v}{d} D \approx \frac{v}{d} e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}L}$$

donde la velocidad v del electrón en el átomo —pozo de potencial— se puede tomar igual a $\approx 10^6$ m/s. El tiempo medio τ

de vida del electrón en un átomo dado es

$$\tau = \frac{1}{\nu} \approx \frac{d}{v} e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - W)}L}$$

Sustituyendo todas las magnitudes por sus valores numéricos, obtenemos que $\tau \approx 10^{-16}$ s. Y de la relación de incertidumbre se obtiene que

$$\Delta W \approx \frac{\hbar}{\tau} \approx 1 \text{ eV.}$$

En lugar de la anchura natural $\Delta W \approx 10^{-7}$ eV del nivel de energía del electrón en el átomo aislado, en el cristal aparece una banda de valores permisibles de la energía.

4°. Para los electrones internos de los átomos, la frecuencia de infiltración a través de la barrera de potencial y de paso de un átomo a otro es insignificante. Esto se debe a que la altura de la barrera es mayor, $U_0 - W \approx 10^3$ eV, y la anchura también, $L \sim 3 \cdot 10^{-10}$ m. Los cálculos dan que $\tau \sim 10^{20}$ años. El ensanchamiento de los niveles de energía de los electrones internos es poco importante, y estos electrones de los átomos de los cristales se comportan, prácticamente, lo mismo que en los átomos aislados.

5°. Si N es el número total de átomos del sólido, la banda de energía formada por el nivel de energía electrónico del electrón de valencia de un átomo constará de N niveles próximos entre sí. Los niveles de energía vecinos de una banda distan entre sí, aproximadamente, 10^{-22} eV.

Las bandas de energía permitidas están separadas por bandas de valores prohibidos de la energía de los electrones. La anchura de las *bandas prohibidas* es conmensurable con las de las bandas permitidas. Cuando aumenta la energía, crece la anchura de las bandas de energía permitidas y decrece la anchura de las bandas prohibidas. El esquema de las bandas de energía en un sólido se representa en la fig. VII.2.12.

6°. Las bandas de energía permitidas del sólido pueden estar distintamente ocupadas por los electrones. En los casos límites, ellas pueden estar completamente ocupadas (saturadas) o completamente desocupadas (vacías) (VII.2.9.1°). Los electrones de los sólidos pueden saltar de una banda permitida a otra. Para que un electrón pueda saltar de una banda inferior a otra vecina superior, se requiere un gasto de energía igual a la anchura de la banda prohibida que hay entre ellas (energía del orden de varios eV).

Para las transiciones dentro de una misma banda, los electrones necesitan una energía muy pequeña. Por ejemplo, para esto es suficiente la energía de $(10^{-4} - 10^{-8})$ eV que adquiere el electrón en el metal durante el recorrido libre medio, y debida a la acción del campo eléctrico con diferencia de potencial ordinaria. Para que un electrón salte de una banda a otra, esta

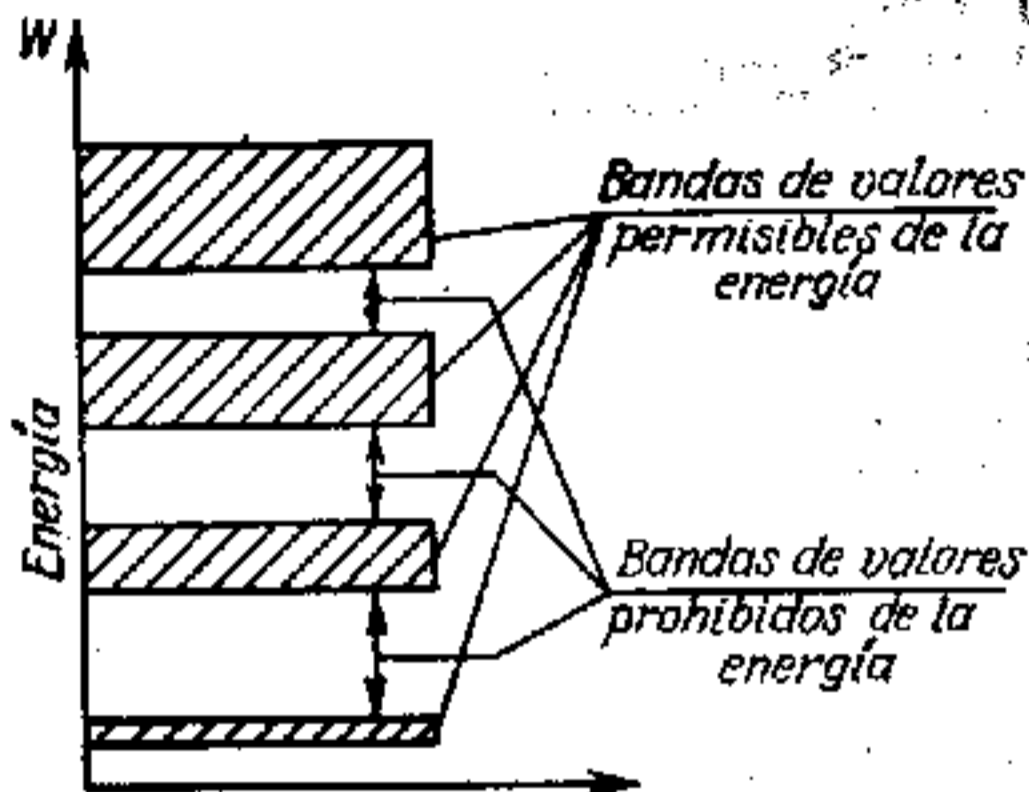


Fig. VII.2.12.

energía es insuficiente. Mediante la excitación térmica, los electrones pueden recibir distinta energía suficiente tanto para las transiciones dentro de una misma banda, como para los saltos entre las bandas.

§ VII.2.9. Metales y dieléctricos en la teoría de las bandas

1°. La diferencia entre las propiedades eléctricas de los sólidos se explica, en la teoría de las bandas (VII.2.8.2°), por la distinta forma de ocupar los electrones las bandas de energía permitidas (VII.2.8.2°) y por la anchura de las bandas prohibidas (VII.2.8.5°). Estos dos factores determinan el hecho de que un sólido dado sea conductor de corriente eléctrica o que sea dieléctrico. La condición necesaria para que un sólido pueda ser conductor, es que tenga niveles de energía vacíos, a los cuales el campo eléctrico pueda hacer pasar electrones. Debe tenerse

en cuenta que este campo sólo puede producir transiciones de electrones dentro de una misma banda (VII.2.8.6°).

2°. Representantes típicos de los conductores son los metales del primer grupo del sistema periódico de Mendeléiev (VI.2.3.5°), por ejemplo, el sodio. En un átomo aislado de sodio hay dos capas electrónicas ocupadas que contienen, respectivamente, 2 y 8 electrones (VI.2.3.4°). El undécimo electrón de valencia del átomo de sodio, de acuerdo con el principio de

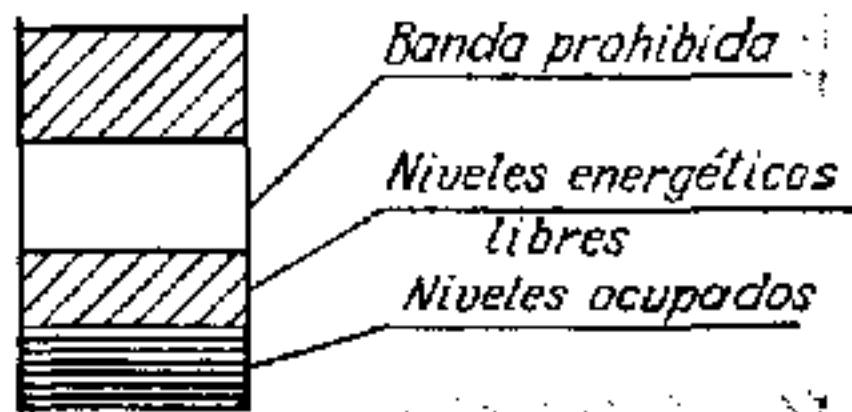


Fig. VII.2.13.

Pauli (VI.2.3.1°), ocupa solamente la mitad del nivel de energía superior. En el cristal de sodio, a las dos primeras capas ocupadas de los átomos aislados corresponden bandas de energía totalmente ocupadas por electrones.

Los electrones de valencia de los átomos de sodio del cristal ocupan la mitad de los niveles de la banda de valores permitidos de la energía (rayada horizontalmente en la fig. VII.2.13). Esta banda se llama *banda de conducción*, porque los electrones que hay en ella participan en la generación de la corriente de conducción (III.7.1.2°). Bajo la influencia del campo eléctrico que crea en el cristal una fuente de energía eléctrica, la energía de los electrones de valencia aumenta y éstos pasan a niveles de energía vacíos más altos de la banda de conducción. Con esto ellos se ponen en movimiento ordenado y por el cristal pasa corriente.

De este modo, si una banda del sólido no está totalmente ocupada por electrones de valencia, éste es siempre conductor de corriente eléctrica.

3°. En los cristales es posible la *hibridación* de las bandas de energía permitidas. La banda que aparece al descomponerse el nivel excitado superior, puede recubrir la banda debida a la descomposición del estado inferior de los electrones de valencia. Esto se observa en los cristales de los elementos del segundo

grupo del sistema periódico de Mendeléiev (Be, Cd, Mg, Zn). Con esto se forma una *banda híbrida* más ancha, en la cual se establecen los electrones de valencia ocupándola sólo parcialmente. Por esto la banda híbrida es una banda de conducción, y estos cristales son conductores de corriente eléctrica.

4°. En los dieléctricos sólidos, las bandas de energía no se recubren. La banda que reúne los niveles energéticos de los electrones de valencia de los átomos o iones está completamente llena de electrones, y todas las bandas que se encuentran más altas están completamente vacías cuando $T = 0$ K. La banda completamente llena de electrones se llama *banda de valencia*. Las bandas vacías son bandas de conducción. Un ejemplo de dieléctrico cristalino es la sal común (NaCl). En la molécula de NaCl se efectúa el enlace heteropolar (VI.2.4.4°) que conduce a la formación de iones Na^+ y Cl^- con capas electrónicas completamente ocupadas. En el cristal NaCl existe una banda de valencia del ion Cl^- , y todas las bandas inferiores están saturadas de electrones, en tanto que la banda superior del ion Na^+ , situada más arriba, se halla completamente vacía. Las bandas Cl^- y Na^+ están separadas por 6 eV, y el campo eléctrico de una fuente de energía eléctrica no puede hacer que los electrones salten de la banda saturada Cl^- a la banda de conducción vacía Na^+ . Esto explica las propiedades dieléctricas del NaCl.

§ VII.2.10. Conductibilidad eléctrica de los semiconductores

1°. Se denominan *semiconductores* las sustancias cuya resistividad varía en un amplio intervalo, de 10^{-5} a 10^8 $\Omega \cdot \text{m}$, y disminuye muy rápidamente (según una ley exponencial) al elevarse la temperatura (p. 2°). Los semiconductores típicos más utilizados son los siguientes elementos químicos: germanio, silicio y telurio. En la capa exterior de los átomos de germanio y selenio hay 4 electrones de valencia ligados, por enlaces covalentes (VI.2.4.5°), con los electrones de valencia de los átomos vecinos. En los cristales químicamente puros de estos semiconductores no hay electrones de valencia «libres». Desde el punto de vista de la teoría de las bandas (VII.2.8.2°), los semiconductores cristalinos pertenecen al tipo de sólidos en los cuales la banda de valencia (VII.2.9.4°) está separada de la banda de conducción vacía (a $T = 0$ K) por un intervalo de energía ΔW_0 relativamente estrecho (fig. VII.2.14), menor que el de los

crisales dieléctricos (VII.2.9.4°). En el silicio $\Delta W_0 = 1,1$ eV, y en el germanio a 0,72 eV.

2°. La conductibilidad eléctrica de los semiconductores químicamente puros se llama *conductibilidad intrínseca*. La *conducción por electrones* (o *conducción del tipo n*) se produce cuando éstos saltan de la banda de valencia a la banda de conducción. Para esto se requiere un gasto de energía no menor que la anchura ΔW_0 de la banda prohibida (fig. VII.2.14). La magnitud ΔW_0 se llama *energía de activación* de la conductibilidad

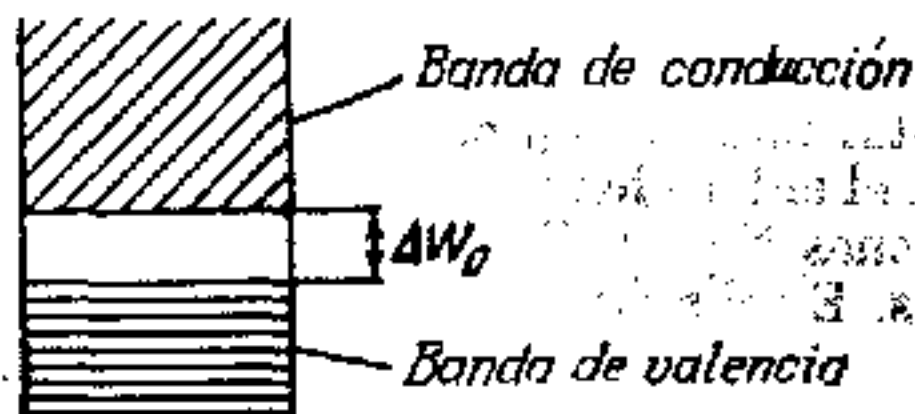


Fig. VII.2.14.

intrínseca. A medida que aumenta la temperatura del semiconductor, crece el número de electrones que, a consecuencia de la excitación térmica, saltan de la banda de valencia a la de conducción y toman parte en la conducción eléctrica. La conductividad eléctrica (III.7.3.4°) de los semiconductores crece al aumentar la temperatura T según la ley

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{\Delta W_0}{2kT}},$$

en la que k es la constante de Boltzmann (II.1.4.5°). La resistividad (III.7.3.4°) de los semiconductores disminuye bruscamente al aumentar la temperatura de acuerdo con la ley

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\Delta W_0}{2kT}}.$$

En esto los semiconductores difieren esencialmente de los metales (III.7.3.7°).

3°. El paso de un electrón de la banda de valencia del semiconductor a la banda de conducción significa que los enlaces covalentes (VI.2.4.5°) de los átomos del cristal semiconductor se alteran. Cualquiera de los electrones de valencia de uno de los átomos de la red abandona su puesto. En el lugar que deja este

electrón se produce un exceso de carga positiva, es decir, un *hueco positivo*. Desde el punto de vista de la teoría de las bandas, esto quiere decir que en la banda de valencia del cristal queda vacante un nivel de energía. El hueco positivo se comporta como una carga positiva de igual magnitud que la carga del electrón. Al sitio desocupado por el electrón (hueco) se puede trasladar otro electrón, lo que equivale a una traslación del hueco positivo que aparece en el nuevo lugar dejado por este último electrón. En un campo eléctrico externo, los electrones de toda la masa del semiconductor se mueven en sentido opuesto al de la intensidad del campo eléctrico (III.2.1.2°). Los huecos positivos se trasladan en el sentido de la intensidad del campo, o sea, hacia donde, según la acción del campo eléctrico, debería trasladarse la carga positiva.

La conductancia de un semiconductor, debida a la traslación de los huecos, recibe el nombre de *conducción por huecos* o *conductibilidad del tipo p*.

4°. La conductibilidad intrínseca de un semiconductor se debe a dos tipos de portadores de carga: los electrones de la banda de conducción y los huecos de la banda de valencia. A cada electrón que salta a la banda de conducción le corresponde un hueco en la banda de valencia. La concentración de electrones n_e es igual a la concentración de huecos n_h y ambas crecen rápidamente al aumentar la temperatura T , según la ley

$$n_e = n_h = \text{const } e^{-\frac{\Delta W_0}{2kT}},$$

en la que ΔW_0 es la energía de activación de la conductibilidad intrínseca (p. 2°), y k , la constante de Boltzmann (II.1.4.5°). Esto explica el carácter de variación de la conductividad y de la resistividad de los semiconductores (p. 2°) en función de la temperatura, que difiere mucho de la variación de estas magnitudes en los metales (III.7.3.7°).

5°. La conductibilidad de los semiconductores, debida a la existencia en ellos de centros de impurezas, se llama *conducción por impurezas*.

Los *centros de impurezas* (*impurezas*) son átomos o iones de elementos extraños, así como diversos defectos y deformaciones de la red cristalina (nodos vacíos, dislocaciones producidas por deformación del cristal, etc.).

Las impurezas hacen que varíe el campo eléctrico en el sólido e influyen en el movimiento de los electrones y en sus estados de energía. Los niveles de energía de los electrones de valencia

de los átomos de impureza no se encuentran en las bandas de energía permitidas (VII.2.9.2°) del cristal básico y surgen *niveles de energía de las impurezas (niveles locales)*, situados en la banda prohibida.

6°. Las impurezas pueden ser suministradoras adicionales de electrones en el sólido. Por ejemplo, si en la red del germanio se sustituye un átomo de este elemento por otro de impureza que tenga cinco electrones de valencia (como el fósforo, el antimonio o el arsénico), un electrón del átomo de impureza no puede

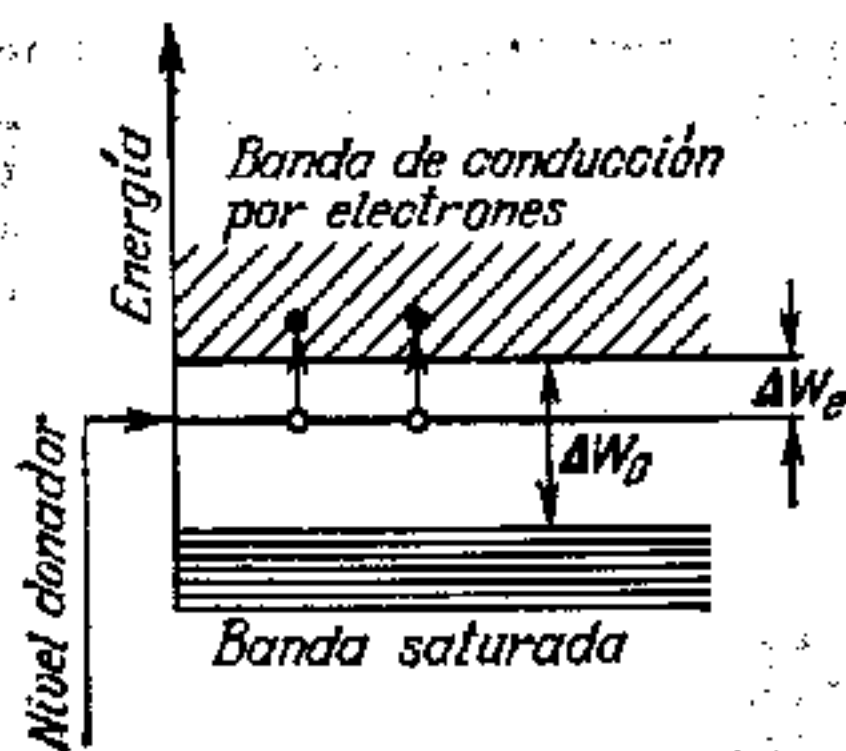


Fig. VII.2.15.

entrar en enlace covalente (VI.2.4.5°) con los átomos del germanio y resulta «superfluo». Los niveles de energía de estos electrones se encuentran más abajo que la banda de conducción del cristal básico (fig. VII.2.15). Estos niveles, saturados de electrones, se llaman *donadores*, y los átomos de impurezas que suministran electrones «superfluos» reciben el nombre de *átomos donadores*. Para hacer que los electrones pasen de los niveles de energía donadores a la banda de conducción, se necesita una energía ΔW_e muy pequeña que se obtiene, por ejemplo, con la excitación térmica. Así, para el silicio, $\Delta W_e = 0,054$ eV si la impureza es arsénico. Si los electrones son lanzados de los niveles donadores a la banda de conducción, en el semiconductor surge *conductibilidad por electrones de impureza (o conductibilidad por impureza del tipo n)*. Estos semiconductores se llaman *extrínsecos por exceso o semiconductores del tipo n*.

7°. Si en la red del semiconductor se sustituye un átomo tetravalente por otro trivalente de impureza (boro, aluminio o indio), se ocasiona la falta de un electrón para formar enlaces covalentes saturados. El electrón que falta puede ser atrapado

al átomo inmediato de germanio de la red, en el cual, en este caso, se formará un hueco positivo (p. 3°). La sucesiva ocupación (por los electrones) de los huecos que se van produciendo en los átomos de germanio, equivale a un movimiento de huecos que da origen a la conductibilidad del semiconductor. Los niveles de energía de estas impurezas, no ocupados por electrones, se llaman *niveles colectores* o *aceptores*. Los átomos de impureza se conocen, en este caso, con el nombre de *átomos aceptores*. Los niveles aceptores están más altos que el borde superior de la

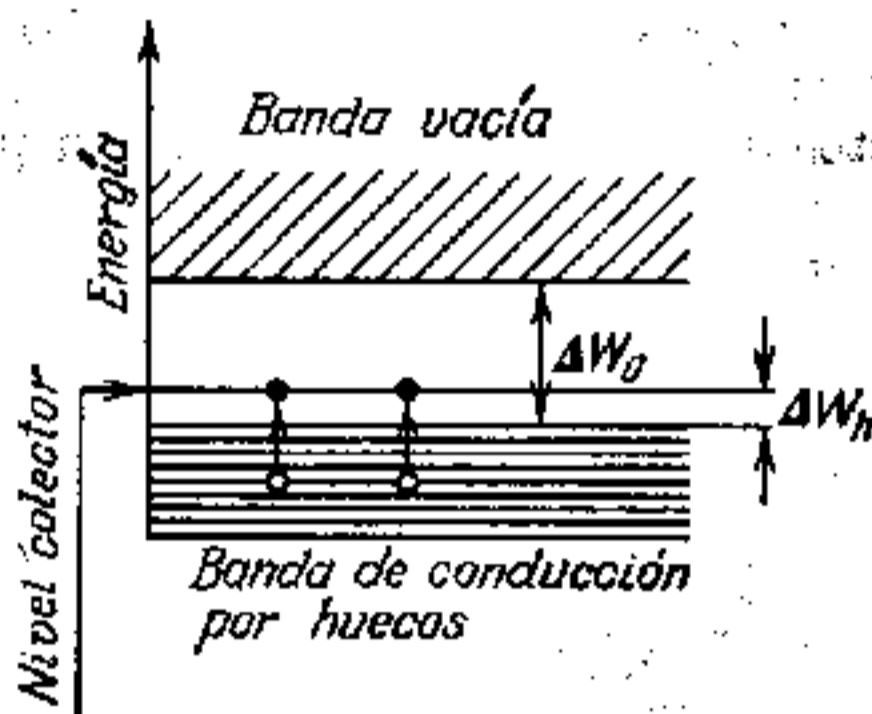


Fig. VII.2.16.

banda de valencia (VII.2.9.4°) del cristal básico (fig. VII.2.16). Así, cuando se introduce boro en los cristales de silicio, los niveles aceptores se encuentran $\Delta W_h = 0,08$ eV por encima de la banda de valencia. El paso de los electrones de la banda de valencia saturada, a los niveles aceptores, hace que aparezcan en dicha banda huecos positivos, con lo cual la banda de valencia se convierte en banda de conducción por huecos. En el semiconductor se produce la *conductibilidad por huecos de impureza* (o *conductibilidad por impurezas del tipo p*). Estos semiconductores se denominan *extrínsecos por defecto* o *semiconductores del tipo p*.

8°. Con la introducción simultánea de impurezas donadoras yceptoras en los semiconductores, el carácter de conducción (tipo *n* o *p*) dependerá de las impurezas que originen mayor concentración de portadores de carga. La concentración y la energía de los electrones (o de los huecos) en los semiconductores, a diferencia de los metales, depende mucho de la temperatura y aumenta con su elevación.

§ VII.2.11. Nociones sobre los fenómenos eléctricos de contacto en los metales y semiconductores

1°. Se llama *trabajo de salida* A de un electrón de un metal, el que debe realizarse para arrancar el electrón del metal en el vacío. El trabajo A se efectúa contra las fuerzas de atracción que ejerce la carga positiva excedente, originada en el metal como resultado de haberse desprendido el electrón. Además, hay que vencer las fuerzas de repulsión de los electrones ya arrancados si éstos no se han alejado y forman junto a la super-

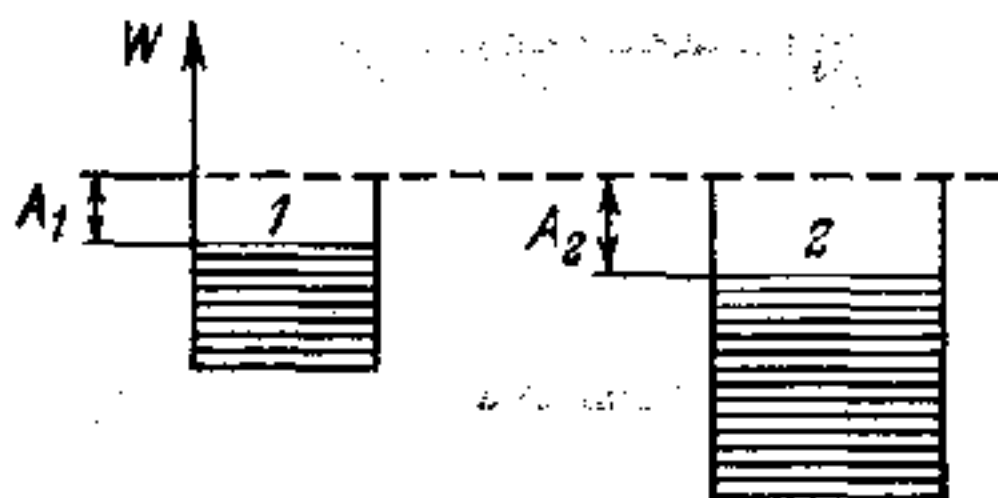


Fig. VII.2.17.

ficie del conductor una «nube» electrónica. El trabajo de salida tiene una magnitud del orden de varios eV y depende del tipo de metal y del estado de su superficie: la suciedad, las trazas de humedad y otras hacen que varíe. En la teoría cuántica del sólido, el trabajo de salida se cuenta a partir del nivel más alto ocupado por los electrones, nivel de Fermi (VII.2.4.2°) (fig. VII.2.17).

2°. Como resultado de que salgan del metal los electrones más rápidos, se origina una falta de carga negativa en el conductor metálico y un exceso de ella en el espacio que lo rodea. Esto se manifiesta en una capa delgada por ambos lados de la superficie del conductor (su espesor es de varias distancias interatómicas en el metal). Se considera la superficie del metal como una *doble capa eléctrica* (*capa de contacto*), semejante a un condensador muy delgado (III.4.2.4°).

3°. La diferencia de potencial $\Delta\phi$ (III.3.2.7°) que caracteriza el campo eléctrico de la capa doble se denomina *salto de potencial superficial* o *diferencia de potencial de contacto* entre

el metal y el vacío:

$$\Delta\varphi = \frac{A}{e},$$

donde A es el trabajo de salida (p. 1°), y e , la magnitud absoluta de la carga del electrón.

El campo eléctrico no existe fuera de la capa doble, mientras que el potencial, fuera del metal y más allá de dicha doble capa, es nulo. Dentro del metal, el potencial es positivo e igual a $\Delta\varphi$. La energía potencial de los electrones de conducción (III.7.3.1°) es negativa e igual a $-e\Delta\varphi = -A$. Para los electrones de conducción, todo el volumen del metal es un pozo de potencial (VI.1.4.1°) cuya profundidad es igual al trabajo de salida.

4°. Cuando se ponen en contacto dos metales de distinto tipo, 1 y 2, en los que los trabajos de salida sean, respectivamente, A_1 y A_2 , se produce el paso preferente de los electrones

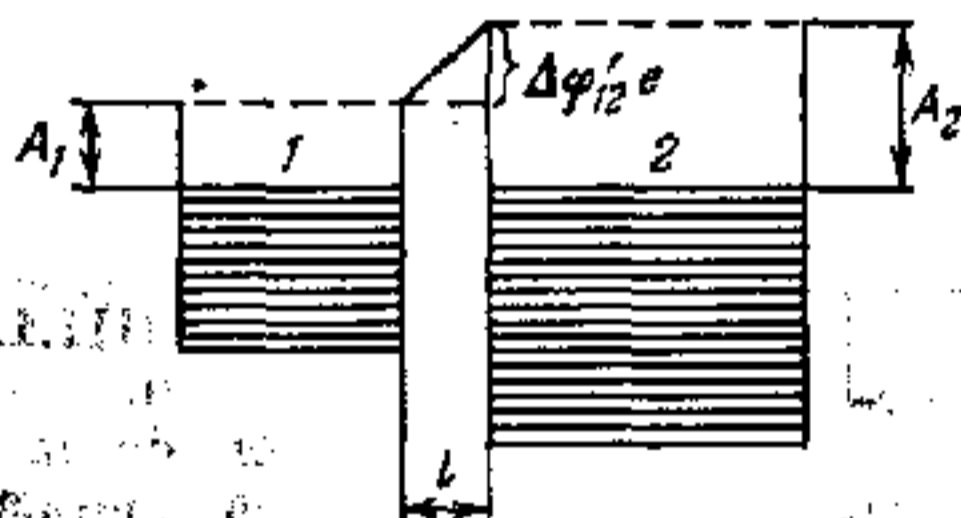


Fig. VII.2.18.

del metal en el que es menor el trabajo de salida, al metal en el que este trabajo es mayor. Los metales adquieren cargas de signo contrario y, en estado de equilibrio termodinámico (II.1.3.3°), entre ellos existe una diferencia de potencial $\Delta\varphi_{12}$ llamada *diferencia de potencial de contacto intrínseca*.

La diferencia de potencial $\Delta\varphi'_{12}$ entre dos puntos próximos a las superficies de los metales primero y segundo en contacto y fuera de ellos, se llama *diferencia de potencial de contacto externa*.

Al poner en contacto los dos metales representados en la fig. VII.2.17 ($A_1 < A_2$), los electrones pasarán preferentemente en el sentido que va del metal 1 al metal 2 y estos metales se cargarán: positivamente el primero y negativamente el segundo. Al mismo tiempo se produce el desplazamiento de los niveles energéticos de los electrones: en el metal 2 hacia arriba, y en el metal 1 hacia abajo. En estado de equilibrio termodinámico, los niveles de Fermi (VII.2.4.2°) de ambos metales coinciden (fig. VII.2.18).

En esta figura se ve que la diferencia de potencial de contacto externa: $\Delta\varphi'_{12}$ depende de los trabajos de salida A_1 y A_2 :

$$\Delta\varphi'_{12} = -\frac{A_1 - A_2}{e}$$

La diferencia de potencial de contacto intrínseca depende de los niveles de Fermi de los metales:

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_{F_1} - W_{F_2}}{e}$$

La variación del potencial desde φ_1 hasta φ_2 se produce en el transcurso de la doble capa eléctrica (p. 2°) cuyo espesor l (fig. VII.2.19) se calcula aproximadamente por la fórmula

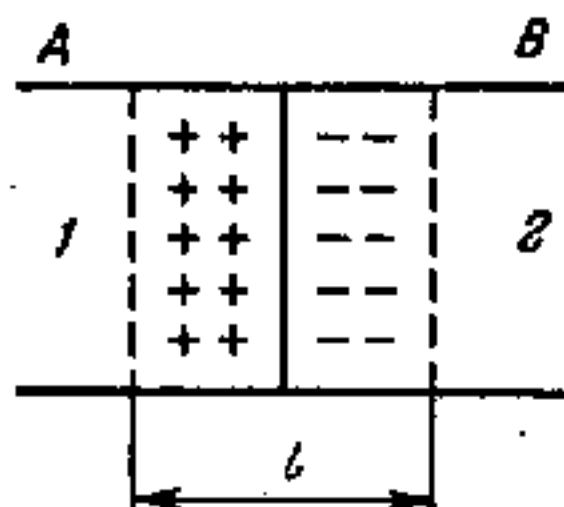


Fig. VII.2.19.

$$l = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\Delta\varphi'_{12}}{en_0}} \quad (\text{en el SI}).$$

Aquí n_0 es la concentración de cargas en la doble capa; ϵ_0 , la constante eléctrica en el SI (III.1.2.7°); y e , la carga del electrón.

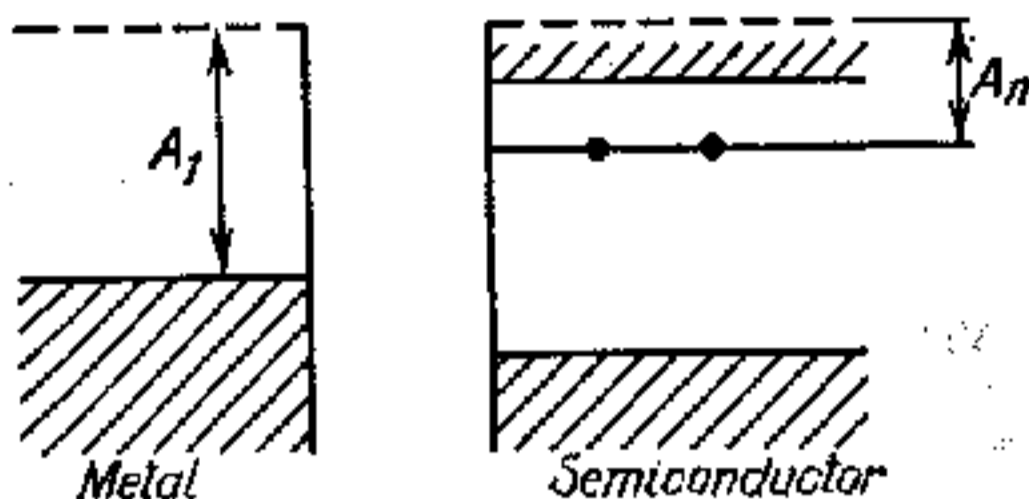
El espesor de la capa doble en los metales en contacto es del orden de las distancias entre los nodos de la red de los metales, y su resistividad no se distingue de la resistividad del resto del volumen de los metales. A través de la capa de contacto de dos metales, la corriente eléctrica pasa con igual facilidad en ambos sentidos y no existe efecto *rectificador de contacto* o *conductancia unilateral*.

5°. El contacto de un metal con un semiconductor del tipo n (VII.2.10.6°) produce la conductancia unilateral de contacto. Supongamos que $A_1 > A_n$, siendo A_1 y A_n , respectivamente, los trabajos de salida del electrón del metal y del semiconductor n . La posición de la banda de conducción del metal (VII.2.9.2°), de la banda saturada del semiconductor y de sus niveles donadores antes de ponerse en contacto, se muestra en la fig. VII.2.20. Cuando el metal se pone en contacto con el semiconductor, los electrones de los niveles donadores del semiconductor n (VII.2.10.6°) pasan al metal.

En la capa de contacto (p. 2°), en la parte del semiconductor n estará la carga positiva, y en la parte del metal, la carga

negativa. Debido a que la concentración de electrones en el semiconductor es pequeña en comparación con el metal (10^{15} cm^{-3} frente a 10^{22} cm^{-3}), el espesor de la capa de contacto en el límite metal-semiconductor resulta ser, aproximadamente, 10^4 veces mayor que en el metal.

6°. El pequeño número de portadores de carga que hay en la cara de contacto del semiconductor, así como el gran espesor de la misma, hacen que su resistividad sea mucho mayor que del resto del volumen del semiconductor. La capa de contacto



Antes del contacto

Fig. VII.2.20.

se llama, en este caso, *capa de barrera* y sirve de base al efecto rectificador del contacto del metal con el semiconductor para la corriente alterna. Si el metal se conecta al polo positivo de una fuente de energía eléctrica, y el semiconductor se conecta al polo negativo, el campo eléctrico externo irá del metal al semiconductor. En estas condiciones los electrones tienden a ir del volumen del semiconductor a la capa doble cuyo espesor disminuye y su conductividad aumenta. En este sentido, llamado *directo o conductor*, la corriente eléctrica pasa a través del contacto del metal con el semiconductor. Si, por el contrario, el campo eléctrico exterior va del semiconductor al metal, los electrones se desplazan de la capa doble hacia dentro del semiconductor. El espesor de la capa de barrera y su resistividad aumentan, y en este sentido, denominado *de bloqueo o de no conducción*, el contacto del metal con el semiconductor no deja pasar la corriente eléctrica. La conductancia unilateral de este contacto significa que, cuando por él pasa corriente alterna, ésta se rectifica.

7°. La región en que se unen dos semiconductores de distinto tipo de conducción, *n* y *p*, se llama *unión electrón-hueco*

unión $p-n$). El contacto de dos semiconductores de estos tipos, a causa del traslado de electrones y huecos a través de la superficie de separación, hace que se forme una doble capa eléctrica (p. 2°). Los electrones del semiconductor n pasan al semiconductor p y los huecos se trasladan en sentido opuesto.

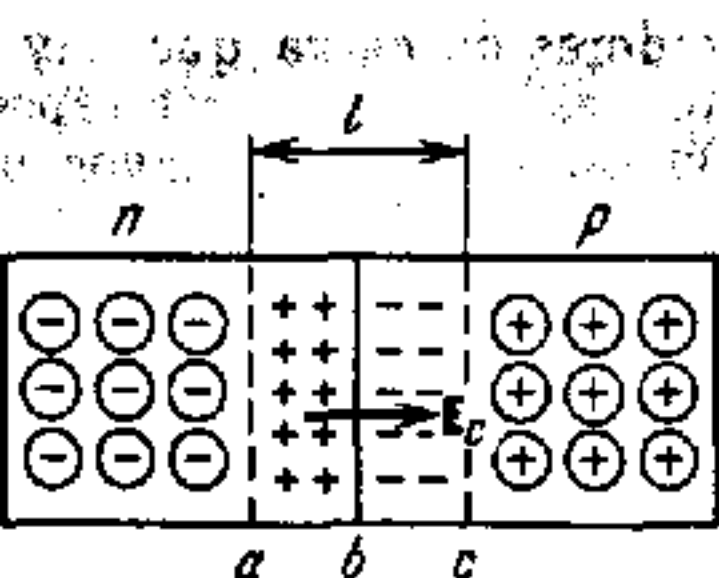


Fig. VII.2.21.

En la región ab del semiconductor n , y en la bc del semiconductor p se producen excesos de cargas de signos contrarios (fig. VII.2.21). La doble capa de espesor l crea un campo eléctrico de contacto de intensidad E_{np} y cierta diferencia de potencial en los límites de esa capa. Este campo dificulta la continuación del movimiento de electrones y huecos en direcciones opuestas. Para un espesor

terminado de la unión $p-n$, llega un momento en que produce el estado de equilibrio correspondiente a la igualación de los niveles de Fermi en ambos semiconductores y se forma

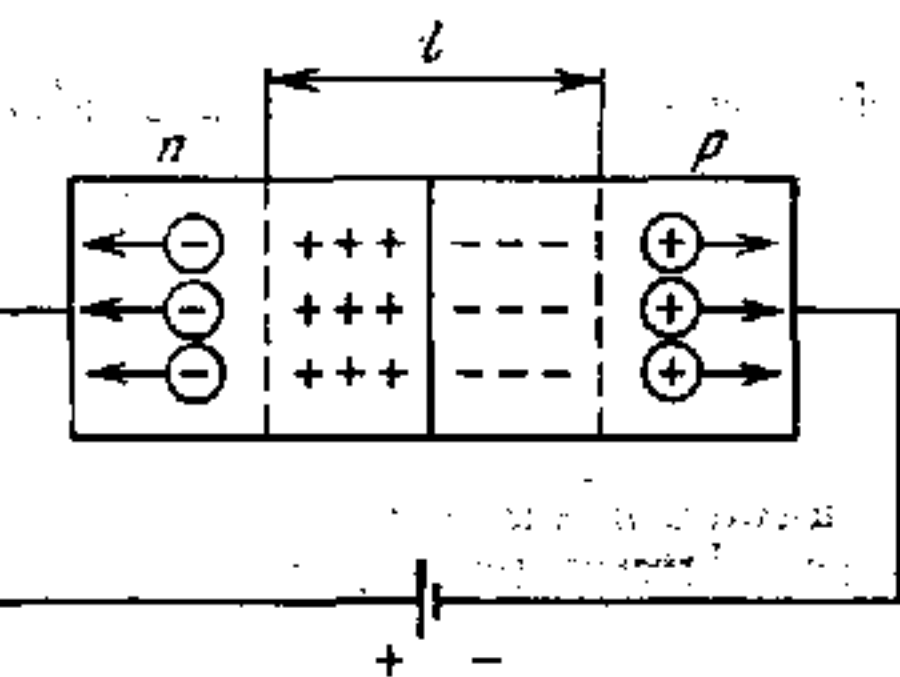


Fig. VII.2.22.

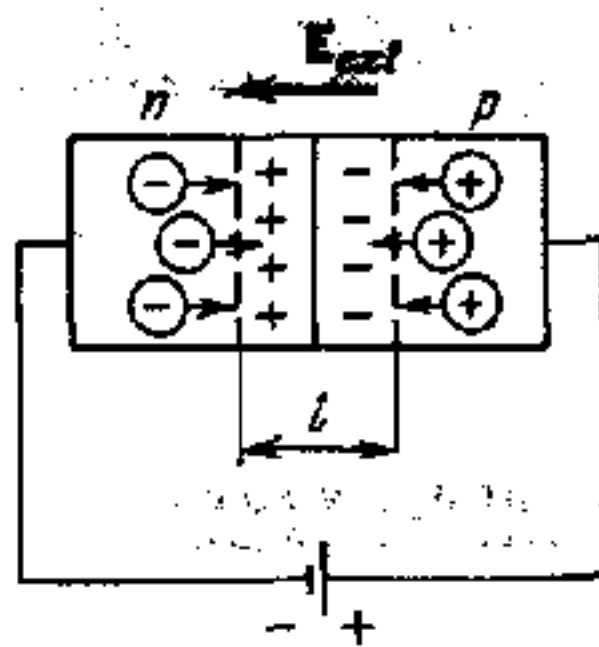


Fig. VII.2.23.

una capa de contacto en equilibrio, de bloqueo (p. 6°), cuya resistencia es mayor que la del resto de los volúmenes de los semiconductores.

8°. Si los semiconductores n y p en contacto se conectan al circuito externo de una fuente de energía eléctrica como muestra la fig. VII.2.22, el campo eléctrico externo amplifica el campo de la capa de contacto y hace que los electrones en el semicon-

tor n , y los huecos en el semiconductor p , se muevan alejándose del contacto. El espesor de la capa de bloqueo y su resistencia aumentan. Este sentido del campo eléctrico externo se dice *es de bloqueo*. En este sentido la corriente no pasa prácticamente a través de la unión $p-n$. Si se invierte la polaridad la tensión externa aplicada (fig. VII.2.23), el campo eléctrico externo, de intensidad E_{ext} , tendrá el sentido contrario al del campo de la capa de contacto (p. 7°). El movimiento de los electrones y huecos, que por la acción del campo eléctrico externo trasladan desde lo más profundo de los semiconductores hacia la región de la unión $p-n$, hace que aumente el número de portadores de carga móviles en el contacto. El espesor y la resistencia de la capa de contacto disminuyen con esto, y la corriente eléctrica pasa por la unión $p-n$ en este sentido, llamado *directo o conductor*. El efecto rectificador de la unión $p-n$ es análogo al de una válvula de dos electrodos (diodo), por lo que los dispositivos semiconductores que contienen una unión $p-n$ se llaman *diodos semiconductores*. Los *triodos de contacto* o *transistores* contienen dos uniones $p-n$.

Capítulo VIII.1. Estructura
y propiedades principales
de los núcleos atómicos§ VIII.1.1. Propiedades fundamentales y estructura
del núcleo

1°. Se llama *núcleo* la parte central del átomo, en la cual se halla concentrada prácticamente toda la masa de éste y su carga eléctrica positiva. Todos los núcleos atómicos están constituidos por partículas elementales (VIII.2.1.1°): *protones* y *neutrones*, los cuales se consideran como dos estados de carga de una misma partícula llamada *nucleón*. El protón tiene una carga eléctrica positiva igual en magnitud absoluta a la carga del electrón (III.1.1.2°). El neutrón carece de carga eléctrica.

2°. La *carga del núcleo* es una magnitud Ze en la que e es la magnitud de la carga del protón, y Z , el número de orden del elemento en el sistema periódico de Mendeléiev (VI.2.3.5°), igual al número de protones que hay en su núcleo. En la actualidad se conocen los núcleos con Z desde $Z = 1$ hasta $Z = 107$. Para todos los núcleos, excepto ${}^1_1\text{H}$, ${}^3_2\text{He}$ y algunos otros con déficit neutrónico, $N \geq Z$, siendo N el número de neutrones del núcleo. En los núcleos ligeros $N/Z \approx 1$; en los núcleos de los elementos químicos que se encuentran al final del sistema periódico, $N/Z \approx 1,6$.

3°. El número de nucleones (p. 1°) que hay en un núcleo, $A = N + Z$, se llama *número de masa* o *másico*. A los nucleones (protón y neutrón) se les asigna un número de masa igual a la unidad; y al electrón, un valor nulo de A .

*) En esta parte del manual se dan breves conocimientos de la física del núcleo y de las partículas elementales, a que se limita el programa de física de los centros de enseñanza técnica superior.

Los núcleos que tienen Z igual pero A distinta se llaman *isótopos*. Los que, teniendo A igual, tienen Z diferente se denominan *isóbaros*. El núcleo de un elemento químico X se designa por A_ZX , donde X es el símbolo del elemento químico.

En total se conocen alrededor de 300 isótopos estables de elementos químicos y más de 2000 isótopos radiactivos naturales y artificiales.

4°. La dimensión del núcleo se caracteriza por el *radio nuclear*, que tiene un sentido convencional a causa de la indeterminación de los límites del núcleo. La fórmula empírica del radio nuclear es $R = R_0 A^{1/3}$, en la que $R_0 = (1,3-1,7) \cdot 10^{-16}$ m se puede interpretar como la proporcionalidad del volumen del núcleo al número de nucleones que tiene.

La densidad de la sustancia nuclear es del orden de magnitud de 10^{17} kg/m³ y constante para todos los núcleos. Esta densidad es mucho mayor que la de las sustancias ordinarias más densas.

5°. Los nucleones de los núcleos atómicos son fermiones (VII.2.2.4°) y tienen un espín $\hbar/2$. El núcleo atómico tiene momento de impulso (momento angular o impulso angular) intrínseco —*espín nuclear*— $L_{\text{nuc}} = \sqrt{I(I+1)} \hbar$, en el que I es el *número cuántico interno (total) de espín* (compárese con III.13.1.3°), y $\hbar = h/2\pi$, siendo h la constante de Planck (IX).

El número I adquiere cualesquiera valores numéricos enteros o semienteros: 0, 1/2, 1, 3/2, 2, etc. Los núcleos con A par tienen un espín entero (en unidades \hbar) y se supeditan a la estadística de Bose—Einstein (VII.2.2.1°). Los núcleos con A impar tienen un espín semientero (en unidades \hbar) y se subordinan a la estadística de Fermi—Dirac (VII.2.2.4°).

6°. Las partículas nucleares tienen momentos magnéticos intrínsecos, los cuales determinan el *momento magnético del núcleo* $P_{m \text{ nuc}}$ en conjunto. De unidad de medida de los momentos magnéticos nucleares sirve el *magnetón nuclear* μ_{nuc} , análogo al magnetón de Bohr (III.13.1.4°):

$$\mu_{\text{nuc}} = \frac{e\hbar}{2m_p c} \quad (\text{en el SI}),$$

$$\mu_{\text{nuc}} = \frac{e\hbar}{2m_p c} \quad (\text{en el sistema de Gauss.})$$

Aquí e es la magnitud absoluta de la carga del electrón; m_p , la masa del protón; y c , la constante electrodinámica (IX). El magnetón nuclear es $m_p/m_e = 1836,5$ veces menor que el magne-

tón de Bohr, de donde se deduce que las propiedades magnéticas de los átomos vienen determinadas por las propiedades magnéticas de sus electrones.

Entre el espín nuclear L_{nuc} , medido en \hbar , y el momento magnético del núcleo, medido en magnetones nucleares, existe la relación

$$P_{m \text{ nuc}} = g_{\text{nuc}} L_{\text{nuc}},$$

en la que g_{nuc} es la *relación giromagnética nuclear* (compárese con III.13.1.4°). Los momentos magnéticos del neutrón y del protón se deben a su compleja estructura interna (VIII.2.6.2°). El neutrón tiene momento magnético negativo igual a $-(1,91314 \pm 0,00005) \mu_{\text{nuc}}$. El espín del neutrón y su momento magnético tienen sentidos contrarios. El momento magnético del protón es positivo e igual a $(2,79277 + 0,00003) \mu_{\text{nuc}}$. El sentido del momento magnético del protón coincide con el de su espín.

7°. La distribución de la carga eléctrica de los protones en el núcleo, en el caso general, no es simétrica. La medida de la discrepancia de esta distribución respecto de la simetría esférica es el *momento eléctrico cuadrupolar* Q . Si la densidad de carga se considera igual en todas partes, Q viene determinada solamente por la forma del núcleo. Así, para un elipsoide de revolución,

$$Q = \frac{2}{5} Ze (b^2 - a^2),$$

donde b es el semieje del elipsoide a lo largo de la dirección del espín, y a , el semieje de dirección perpendicular al eje anterior. Para un núcleo alargado en dirección del espín, $b > a$ y $Q > 0$. Para un núcleo achatado en esa misma dirección, $b < a$ y $Q < 0$. Para la distribución esférica de la carga en el núcleo, $b = a$ y $Q = 0$. Esto es correcto para los núcleos con espín 0 ó $(1/2) \hbar$.

§ VIII.1.2. Energía de enlace de los núcleos.

Defecto de masa

1°. Los nucleones se hallan en los núcleos en estados que difieren esencialmente de sus estados libres. A excepción del núcleo de hidrógeno ordinario, en todos los núcleos hay por lo menos dos nucleones entre los cuales existe una *interacción*

nuclear fuerte especial, de atracción, que asegura la estabilidad de los núcleos a pesar de la repulsión entre los protones con carga de igual signo.

2°. Se llama *energía de enlace de un nucleón* en un átomo, la magnitud física igual al trabajo que debe realizarse para separar el nucleón del núcleo sin comunicarle energía cinética.

La *energía de enlace del núcleo* se determina por la magnitud del trabajo que debe realizarse para desintegrar el núcleo en los nucleones que lo componen, sin comunicar a éstos energía cinética. De la ley de conservación de la energía se deduce que al formarse el núcleo deberá desprenderse la misma energía que hay que gastar para su desintegración en los nucleones que lo componen. La energía de enlace nuclear es igual a la diferencia entre las energías de todos los nucleones libres que componen el núcleo, y sus energías dentro de este último.

3°. Al formarse el núcleo disminuye la masa: la masa del núcleo es menor que la suma de las masas de los nucleones que lo integran. La disminución de la masa al formarse el núcleo se explica por el desprendimiento de energía de enlace. Si ΔW_{enl} es la cantidad de energía que se desprende al formarse el núcleo, la masa correspondiente a esta energía Δm será (I.5.7.6°)

$$\Delta m = \frac{\Delta W_{\text{enl}}}{c^2}.$$

Esta magnitud se llama *defecto de masa* y caracteriza la disminución de la masa total que se produce al formarse el núcleo con los nucleones que lo componen. Si un núcleo de masa M_{nuc} está constituido por Z protones de masa m_p y de $(A - Z)$ neutrones de masa m_n ,

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{nuc}}.$$

La magnitud Δm se puede expresar por medio de la masa atómica M_{at} , en vez de utilizar la masa del núcleo M_{nuc} :

$$\Delta m = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - M_{\text{at}},$$

donde m_{H} es la masa del átomo de hidrógeno.

Cuando en la práctica se calcula Δm , las masas de todas las partículas y átomos se expresan en unidades de masa atómica (IX).

El defecto de masa sirve de medida de la energía de enlace del núcleo:

$$\Delta W_{\text{enl}} = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{nuc}}]c^2.$$

A la unidad de masa atómica le corresponde la *unidad de energía atómica* (u.e.a.): $1 \text{ u.e.a.} = 931,5016 \text{ MeV}$.

4°. La *energía específica de enlace nuclear* Δw_{enl} es la energía de enlace correspondiente a un nucleón: $\Delta w_{\text{enl}} = \Delta w_{\text{enl}}/A$. La energía Δw_{enl} es igual, por término medio, a 8 MeV/nucleón . La fig. VIII.1.1 representa la curva de la energía específica de enlace en función del número de masa A , que caracteriza la

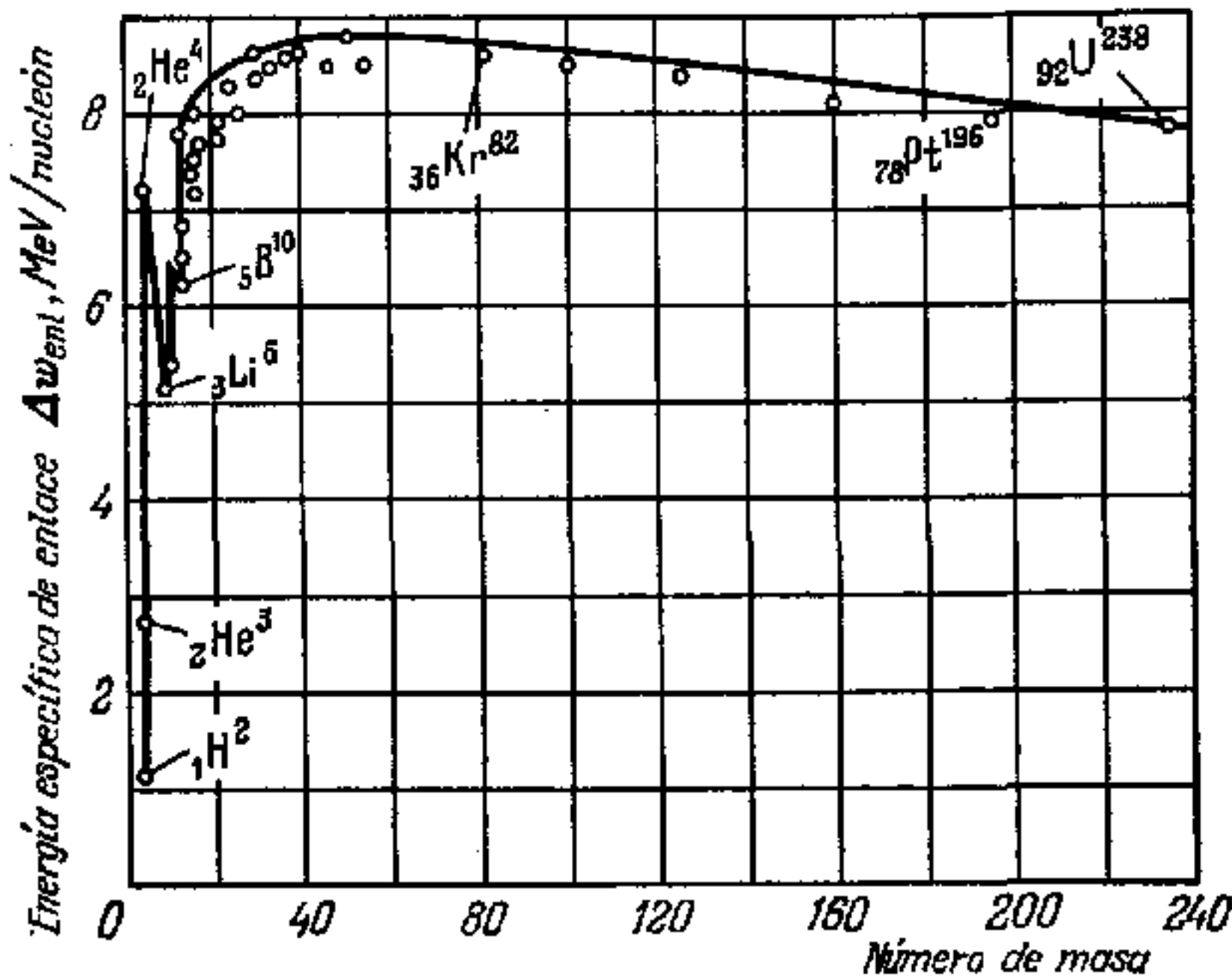


Fig. VIII.1.1.

estabilidad del enlace de los nucleones en los núcleos de los distintos elementos químicos. Los núcleos de los elementos de la parte media del sistema periódico (VI.2.3.5°) ($28 < A < 138$), es decir, desde ${}^{28}_{14}\text{Si}$ hasta ${}^{138}_{88}\text{Ba}$ son los más estables. En estos núcleos, Δw_{enl} se aproxima a $8,7 \text{ MeV/nucleón}$. A medida que aumenta el número de nucleones del núcleo, la energía específica de enlace disminuye. Los núcleos de los átomos de los elementos químicos que se encuentran al final del sistema periódico (por ejemplo, el núcleo del uranio), tienen $\Delta w_{\text{enl}} \approx 7,6 \text{ MeV/nucleón}$. Esto explica la posibilidad de que se des-

prenda energía al producirse la fisión de los núcleos pesados (VIII.1.10.2°). En la región de números másicos pequeños existen «picos» agudos de la energía específica de enlace. Los máximos son característicos de los núcleos con número par de protones y neutrones (${}^4_2\text{He}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{16}_8\text{O}$), y los mínimos, de los núcleos con cantidades impares de protones y neutrones (${}^3_3\text{Li}$, ${}^5_5\text{Be}$, ${}^7_7\text{N}$).

Si el núcleo tiene la menor energía posible $W_{\text{mfn}} = -W_{\text{enl}}$, el mismo se encuentra en el *estado energético fundamental*, y si su energía $W > W_{\text{mfn}}$, entonces se halla en un *estado energético excitado*. El caso en que $W = 0$ corresponde a la desintegración del núcleo en los nucleones que lo componen. A diferencia de los niveles energéticos del átomo, separados por unidades electrón-voltio (véase la fig. VI.2.1, escala izquierda), los niveles energéticos del núcleo distan unos de otros megaelectrón-voltios (MeV). Esto explica el origen y las propiedades de los rayos gamma (VIII.1.7.1°).

5°. Los datos sobre la energía de enlace y la utilización del modelo de una gota*) han permitido establecer ciertas leyes de la estructura de los núcleos.

De criterio de estabilidad de los núcleos atómicos sirve la relación entre el número de protones y neutrones que hay en el núcleo estable de isóbaros dados (VIII.1.1.3°) ($A = \text{const}$). La condición del mínimo de energía del núcleo conduce a la siguiente relación entre Z_{est} y A :

$$Z_{\text{est}} = \frac{A}{1,98 + 0,015 A^{2/3}} \cdot$$

Se toma el número entero Z_{est} más próximo al que se obtiene por la fórmula.

Para valores pequeños y medios de A , el número de neutrones y protones que hay en los átomos estables es aproximadamente el mismo: $Z \approx A - Z$.

A medida que crece Z , las fuerzas de repulsión coulombianas de los protones aumentan proporcionalmente a $Z(Z - 1) \sim Z^2$ (interacción pareada de los protones) y para compensarla con la atracción nuclear, el número de neutrones debe crecer más de prisa que el de protones.

*) El modelo de una gota se estudia en los cursos de física de los centros de enseñanza media.

§ VIII.1.3. Fuerzas nucleares

1°. La interacción nuclear pone de manifiesto que en los núcleos existen *fuerzas nucleares* peculiares irreducibles a ninguno de los tipos de fuerzas conocidas en la física clásica (gravitatorias y electromagnéticas).

2°. Las fuerzas nucleares son de corto alcance. Se manifiestan únicamente a distancias pequeñas, del orden de 10^{-16} m, entre los nucleones del núcleo. La longitud $(1,5-2,2) \cdot 10^{-16}$ m se llama *radio de acción de las fuerzas nucleares*.

3°. Las fuerzas nucleares son *independientes de la carga*: la atracción entre dos nucleones es la misma y no depende de si el estado de carga de éstos es protónico o neutrónico (VIII.1.1.1°). La independencia de la carga se deduce de la comparación de las energías de enlace de los *núcleos especulares*. Se llaman así los núcleos en los cuales es igual el número total de nucleones, pero el número de protones de uno de ellos es igual al de neutrones del otro. Por ejemplo, el núcleo de helio ${}^3_2\text{He}$ y el de hidrógeno pesado, tritio ${}^3_1\text{T}$. Las energías de enlace (VIII.1.2.4°) de estos núcleos son, respectivamente, 7,72 MeV y 8,49 MeV.

La diferencia de energía de los enlaces nucleares, igual a 0,77 MeV, se debe a la energía de repulsión coulombiana entre los protones en el átomo de ${}^3_2\text{He}$. Suponiendo que esta magnitud es igual a $e^2/4\pi\epsilon_0 r$ (III.3.2.6°), se puede hallar que la distancia media r entre los protones del núcleo ${}^3_2\text{He}$ es igual a $1,9 \cdot 10^{-16}$ m, lo que concuerda con la magnitud del radio de acción de las fuerzas nucleares (p. 2°).

4°. Las fuerzas nucleares tienen propiedad de saturación, que se manifiesta en el hecho de que un nucleón interacciona en el núcleo solamente con un número limitado de nucleones vecinos más próximos a él. Precisamente por eso se observa la variación lineal de la energía de enlace de los núcleos en función de los números másicos A (VIII.1.1.3°). Si cada nucleón interaccionara al mismo tiempo con todos los demás nucleones ($A - 1$) del núcleo, la energía de enlace nuclear sería proporcional al número posible de pares de nucleones que interaccionaran en el núcleo, es decir, al número de combinaciones de A dividido por dos: $A(A - 1)/2^*$. La variación de la energía de enlace en función de A no sería en este caso lineal, sino cuadrá-

*) En el supuesto de que la interacción nuclear se efectúa por pares.

tica, lo que contradice los datos experimentales. En la práctica, la saturación total de las fuerzas nucleares se alcanza en la partícula α (VIII.1.4.2°), que es una formación muy estable.

5°. Las fuerzas nucleares dependen de la orientación de los espines de los nucleones que interaccionan. Esto es confirmado por la diferencia de carácter que existe entre la difusión de los neutrones provocada por las moléculas del ortohidrógeno y del parahidrógeno. En la molécula de ortohidrógeno, los espines de ambos protones son paralelos el uno al otro, mientras que en la de parahidrógeno son antiparalelos. Si la interacción del neutrón con el protón no dependiera de la orientación mutua de los espines, la difusión de los neutrones provocada por las moléculas de orto y parahidrógeno se produciría del mismo modo. Las experiencias han demostrado que la difusión de los neutrones en el parahidrógeno es 30 veces mayor que la difusión que se produce en el ortohidrógeno. Esto demuestra la variación de las fuerzas nucleares en función de la orientación de los espines de los nucleones que interaccionan.

Las fuerzas nucleares no son centrales (I.3.3.4°).

§ VIII.1.4. Radiactividad

1°. Se llama *radiactividad* la transformación de los isótopos inestables (VIII.1.1.3°) de un elemento químico en isótopos de otro elemento, acompañada de la emisión de ciertas partículas.

Recibe el nombre de *radiactividad natural* la que se observa en los isótopos inestables que existen en la naturaleza.

Radiactividad artificial es la de los isótopos radiactivos obtenidos como resultado de las reacciones nucleares (VIII.1.9.1°).

2°. En la tabla VIII.1.1 se dan los tipos principales de radiactividad.

3°. Por lo general, todos los tipos de radiactividad van acompañados de emisión de rayos gamma, es decir, de radiación electromagnética dura de ondas cortas. Los rayos gamma son la forma principal de disminución de la energía de los productos excitados de las transformaciones radiactivas. El núcleo que experimenta desintegración radiactiva se llama *núcleo padre*, *ascendiente* o *precursor*; el *núcleo hijo* o *descendiente* que surge suele estar excitado y su transición al estado fundamental va acompañada de la emisión de un fotón γ .

4°. La desintegración espontánea de los núcleos atómicos se supedita y la *ley de desintegración radiactiva*:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

donde N_0 es la cantidad de núcleos que hay en un volumen dado de sustancia en el instante inicial $t = 0$; N , el número de núcleos que hay en ese mismo volumen en el instante t ; y λ , la *constante de desintegración* que tiene el sentido de probabilidad de desintegración de un núcleo por segundo y es igual a la parte de núcleos que se desintegran en la unidad de tiempo.

Tabla VIII.1.1

Tipo de radiactividad	Variación de la carga del núcleo Z	Variación del número másico A	Carácter del proceso
Desintegración alfa	$Z - 2$	$A - 4$	Emisión de una partícula α sistema de dos protones y dos neutrones unidos.
Desintegración beta	$Z \pm 1$	A	Transformaciones mutuas dentro del núcleo del neutrón (${}_0^1n$) y el protón (${}_1^1p$)
Desintegración β_-	$Z + 1$	A	${}_0^1n \rightarrow {}_1^1p + ({}_{-1}^0e + {}_0^0\tilde{\nu}_e)$
Desintegración β_+	$Z - 1$	A	${}_1^1p \rightarrow {}_0^1n + ({}_{+1}^0e + {}_0^0\nu_e)$
Captura electrónica (captura e o K)	$Z - 1$	A	${}_1^1p + {}_1^0e \rightarrow {}_0^1n + ({}_0^0\nu_e)$ ${}_0^0\nu_e$ y ${}_0^0\tilde{\nu}_e$ son, respectivamente, un neutrino y un anti-neutrino electrónicos. Entre paréntesis se indican las partículas emitidas por el núcleo.
Fisión espontánea	$Z - (1/2)Z$	$A - (1/2)A$	División del núcleo generalmente en dos fragmentos de masas y cargas aproximadamente iguales.

La ley de desintegración espontánea se basa en dos suposiciones: 1) la constante de desintegración no depende de las condiciones externas; 2) el número de núcleos que se desintegran durante el tiempo dt es proporcional a la cantidad inicial de núcleos. Estas suposiciones significan que la desintegración

es un proceso estadístico y que la desintegración de un núcleo dado es un suceso casual de probabilidad determinada.

La magnitud $1/\lambda$ es la *vida media* del isótopo radiactivo. En efecto, la vida total de dN núcleos es $t |dN| = t\lambda N dt$. Y la vida media τ de todos los núcleos que existían inicialmente constituye

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N t dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

5°. La característica de estabilidad de los núcleos a la desintegración es el *período de semidesintegración, semiperíodo* o *período medio* $T_{1/2}$. Se da este nombre al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la cantidad inicial de núcleos de una sustancia radiactiva dada. Entre λ y $T_{1/2}$ existe la relación

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} = 0,693 \tau.$$

6°. La radiactividad natural (p. 1°) se observa en los núcleos de los átomos de los elementos químicos que se encuentran detrás del plomo en el sistema periódico de Mendeléiev (VI.2.3.5°). En los núcleos ligeros y medios solamente se observa radiactividad natural en los átomos ${}_{19}^{40}\text{K}$, ${}_{37}^{87}\text{Rb}$, ${}_{49}^{115}\text{In}$, ${}_{57}^{138}\text{La}$, ${}_{62}^{147}\text{Sm}$, ${}_{71}^{175}\text{Lu}$ y ${}_{75}^{187}\text{Re}$.

La ley de conservación de las cargas eléctricas (III.1.1.3°) en la desintegración radiactiva es

$$Z_{\text{nuc}e} = \sum_i Z_i e,$$

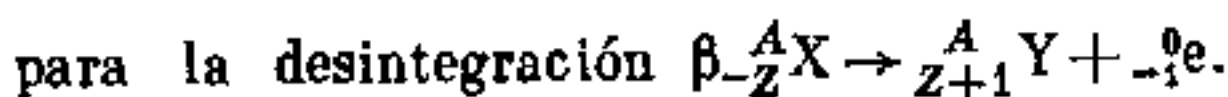
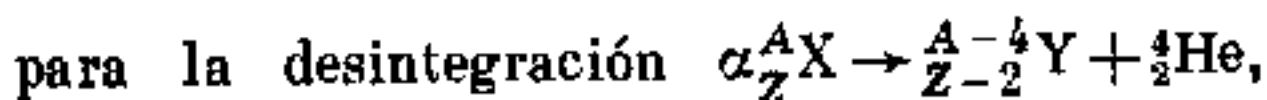
en la que $Z_{\text{nuc}e}$ es la carga del núcleo padre (p. 3°), y $Z_i e$ son las cargas de los núcleos y de las partículas que surgen como resultado de la desintegración. Esta ley se aplica también a la investigación de todas las reacciones nucleares (VIII.1.9.1°).

La ley de conservación de los números másicos (VIII.1.1.3°) en los fenómenos de radiactividad natural es

$$A_{\text{nuc}} = \sum_i A_i,$$

en la que A_{nuc} es el número másico del núcleo padre, y A_i , el número másico del núcleo o de las partículas que resultan de la desintegración.

7°. Las leyes de desplazamiento de Fajans y Soddy para las desintegraciones α y β_- son



Aquí ${}_Z^A X$ es el núcleo padre; Y, el símbolo del núcleo hijo; ${}_2^4 \text{He}$, el núcleo de helio; y ${}_{-1}^0 e$, el símbolo del electrón, para el cual $A = 0$ y $Z = -1$.

Si el núcleo hijo o descendiente es también radiactivo, se produce una serie de transformaciones radiactivas. Los núcleos radiactivos naturales forman tres familias radiactivas llamadas familia del uranio (${}_{92}^{238} \text{U}$), familia del torio (${}_{90}^{232} \text{Th}$) y familia del actinio (${}_{89}^{235} \text{Ac}$). Estas familias deben sus nombres al isótopo «progenitor» de larga vida y de mayor período de semidesintegración (p. 5°). Todas estas familias, después de las series de desintegraciones α y β_- , terminan en núcleos estables isótopos del plomo: ${}_{82}^{206} \text{Pb}$, ${}_{82}^{208} \text{Pb}$ y ${}_{82}^{207} \text{Pb}$. La familia del neptunio, que comienza en el elemento transuránico neptunio ${}_{93}^{237} \text{Np}$, fue obtenida artificialmente y termina en el ${}_{83}^{209} \text{Bi}$.

8°. Si se produce una serie de desintegraciones, y en el tiempo dt se desintegran, del número total N_m de núcleos padres, $\lambda_m N_m dt$ núcleos, y en este mismo tiempo se desintegran también $\lambda_h N_h dt$ núcleos hijos, la variación del total dN_h del número de núcleos de la sustancia descendiente, por unidad de tiempo, vendrá expresada como sigue:

$$\frac{dN_h}{dt} = \lambda_m N_m - \lambda_h N_h.$$

En caso de equilibrio transitorio entre las sustancias ascendiente y descendiente, $(dN_h/dt) = 0$ y se cumple la condición de equilibrio radiactivo:

$$\lambda_m N_m = \lambda_h N_h,$$

de donde

$$\frac{N_m}{N_h} = \frac{\lambda_h}{\lambda_m} = \frac{T_m}{T_h},$$

siendo T_m y T_h los períodos de semidesintegración (p. 5°) de los núcleos padre e hijo. El producto $A = \lambda N$ es la actividad de una sustancia radiactiva dada y es igual al número de desintegraciones por unidad de tiempo. La actividad referida a la uni-

dad de masa de la sustancia se llama *actividad específica*. La actividad se mide por el número de desintegraciones de núcleos de la sustancia radiactiva que se producen en la unidad de tiempo (s^{-1}). La unidad de radiactividad es el becquerel (Bq).

§ VIII.1.5. Desintegración α

1°. Se da el nombre de *desintegración alfa* a la emisión de partículas α por los núcleos de ciertos elementos químicos. La desintegración alfa (p. 2°) es una propiedad de los núcleos pesados con números másicos $A > 200$ y cargas nucleares $Ze > 82$. En el seno de estos núcleos se forman partículas α aisladas, constituidas (cada una) por dos protones y dos neutrones. Esto contribuye a la saturación de las fuerzas nucleares (VIII.1.3.4°). La partícula α recién formada está sometida a una acción mayor de las fuerzas de repulsión coulombianas de los protones del núcleo, y a la vez a una acción menor de las fuerzas nucleares de atracción de los nucleones del mismo, que los nucleones aislados.

2°. El núcleo es, para la partícula α , una barrera de potencial (VI.1.7.1°), cuya altura U es mayor que la energía W de la partícula α en el núcleo. La desintegración alfa se produce por infiltración de la partícula α a través de la barrera de potencial en virtud del efecto túnel (VI.1.7.2°). La fórmula de transparencia D de la barrera de potencial demuestra que variaciones insignificantes de la energía de la partícula α en el núcleo hacen que varíe mucho la magnitud

$$\exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m_\alpha [U(x) - W]} dx \right\}$$

Con esto se explican las grandes diferencias de los períodos de semidesintegración de los emisores alfa —desde 10^9 años hasta 10^{-7} s— para aumentos relativamente pequeños de las energías de las partículas α , desde 4 hasta 9 MeV.

3°. La constante de desintegración λ (VIII.1.4.4°) está relacionada con la transparencia D de la barrera de potencial para la partícula α . En el modelo simplificado de la barrera de potencial rectangular de longitud L (VI.1.7.2°),

$$\lambda = Dn, \quad \text{donde } n = \frac{v}{L}$$

donde n es el número de choques de la partícula α con la pared de la barrera por unidad de tiempo, $n = v/2L$; y $v = \sqrt{2W/m_\alpha}$ es la velocidad de la partícula α en el núcleo. La magnitud L se toma generalmente igual al radio R del núcleo ($2R$ es la anchura de la barrera de potencial).

La fórmula simplificada de la constante de desintegración es

$$\lambda = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2W}{m_\alpha}} e^{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha(U_0 - W)}R}$$

4°. *Ley (regla) de Geiger—Nuttall*: cuanto mayor es la constante de desintegración λ de un elemento radiactivo, tanto mayor es el alcance R_α de las partículas α emitidas por él en el aire:

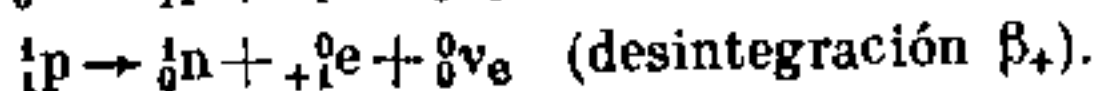
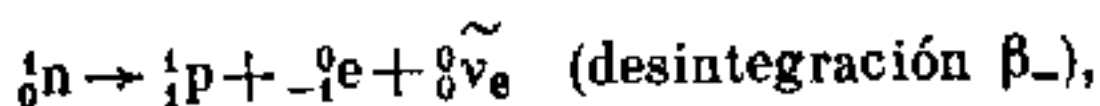
$$\ln \lambda = A + B \ln R_\alpha,$$

donde A y B son constantes empíricas que tienen valores distintos para cada una de las familias radiactivas (VIII.1.4.7°).

5°. Valiéndose de los conocimientos citados en los pp. 3° y 4°, se ha demostrado experimentalmente que en un mismo elemento con radiactividad α existen varios grupos de partículas α con distintos alcances. Dentro de cada grupo se observan alcances constantes. De esto se deduce que las partículas α emitidas por los núcleos poseen un espectro energético determinado y, por consiguiente, los núcleos atómicos tienen niveles de energía discretos.

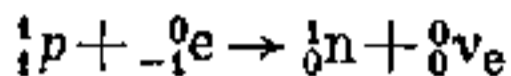
§ VIII.1.6. Desintegración beta

1°. Con el término desintegración beta se designan tres tipos de transformaciones nucleares: la desintegración *electrónica* (β_-), la desintegración *positrónica* (β_+) y la *captura electrónica* (captura e o K). Los dos primeros tipos de transformación consisten en que el núcleo emite un electrón (o un positrón) y un antineutrino electrónico (o un neutrino electrónico). Estos procesos se efectúan por transformación de un tipo de nucleón del núcleo en otro: de un neutrón en protón o de un protón en neutrón. Estas transformaciones se realizan según el esquema siguiente:



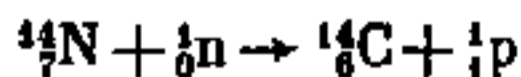
Aquí 1_0n y 1_1p son los símbolos respectivos del neutrón y del protón; ${}^0_{-1}e$ y ${}^0_{+1}e$, los símbolos del electrón y del positrón; ${}^0_0\nu_e$ y ${}^0_0\bar{\nu}_e$, los símbolos del neutrino y del antineutrino electrónicos (VIII.1.4.2°).

En caso de captura e, la transformación del protón en neutrón se efectúa de acuerdo con el esquema

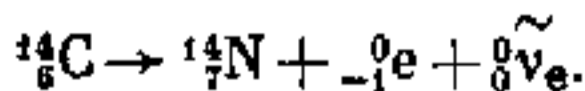


y consiste en que desaparece uno de los electrones de la capa K más próxima al núcleo del átomo. El protón, al transformarse en neutrón, parece como si «capturara» el electrón, y de aquí proviene el término de «captura electrónica» (o captura e). La peculiaridad de este tipo de desintegración beta es que el núcleo emite solamente una partícula ${}^0_0\nu_e$. Un ejemplo de captura e es la transformación del núcleo radiactivo del berilio ${}^8_4\text{Be}$ en núcleo estable de litio ${}^8_3\text{Li}$. La captura electrónica, a diferencia de la desintegración β_+ , va acompañada de radiación X característica, perteneciente a la raya K del elemento correspondiente (VI.2.5B, 9°).

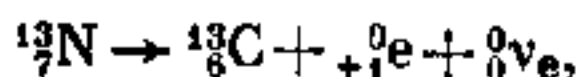
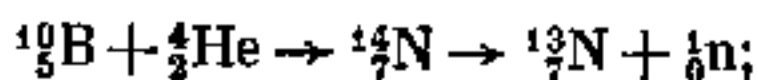
2°. La desintegración β_- se produce en los núcleos naturalmente radiactivos y en los artificialmente radiactivos; la desintegración β_+ es característica únicamente del fenómeno de radiactividad artificial, es decir, de las radiaciones radiactivas intrínsecas de los núcleos producidos por la acción de las partículas α , los neutrones u otras partículas. Con esto se altera la condición de estabilidad del núcleo atómico (VIII.1.2.5°). Por ejemplo, el isótopo radiactivo artificial del carbono ${}^{14}_6\text{C}$ se produce partiendo del núcleo estable del nitrógeno por la acción de los neutrones y con desprendimiento de protones:



y, después de experimentar la desintegración beta, vuelve a transformarse en isótopo estable ${}^{14}_7\text{N}$:

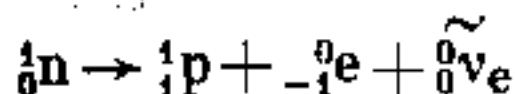


La infracción de la condición de estabilidad (VIII.1.2.5°) introduciendo en el núcleo protones de más, provoca la desintegración β_+ artificial. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo:



donde ${}^0_{+1}e$ es un positrón, y ${}^0_0\nu_e$, un neutrino electrónico.

3°. La desintegración β_- natural se produce de manera que un neutrón ${}^1_0\text{n}$ se transforma espontáneamente en protón. La energía en reposo (I.5.7.3°) del neutrón es 782 keV mayor que la energía en reposo del átomo de hidrógeno (es decir, que la del protón y el electrón juntos). Por esto, la transformación tipo (p. 1°).



energéticamente también es posible fuera del núcleo. En los flujos neutrónicos de gran intensidad que se producen en los reactores nucleares, se ha descubierto la *desintegración de neutrones*

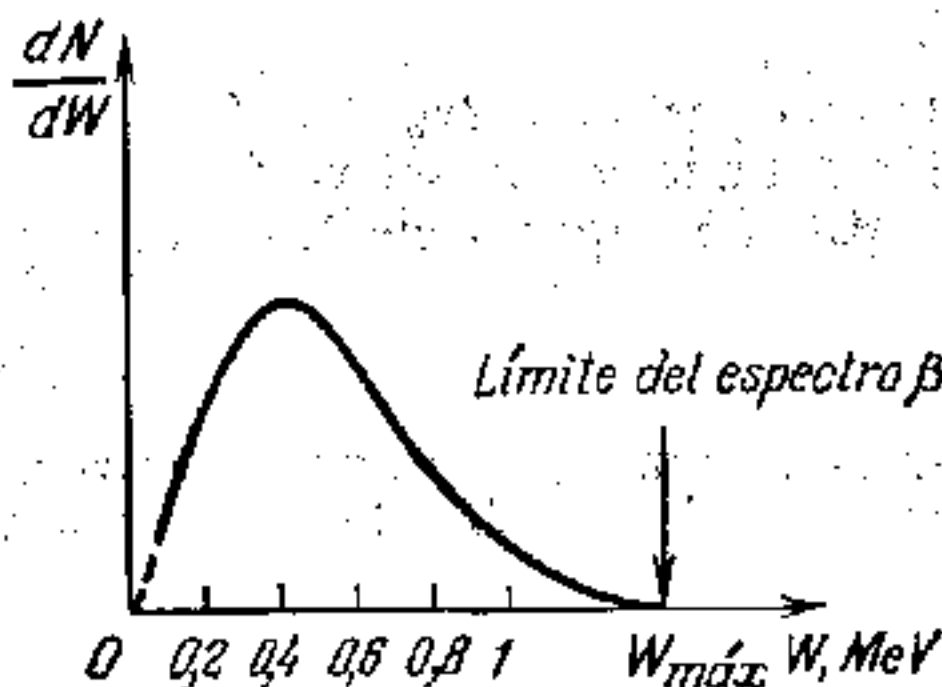


Fig. VIII.1.2.

libres, con período de semidesintegración (VIII.1.4.5°) de $(1,01 \pm 0,03) \cdot 10^3$ s. En los núcleos pesados, sobrecargados de neutrones, esta transformación ocasiona la emisión natural de rayos β_- .

La transformación tipo (p. 1°) ${}^1_1\text{p} \rightarrow {}^1_0\text{n} + {}^0_{+1}\text{e} + {}^0_0\nu_e$ sólo es posible en los núcleos en que la energía necesaria para ella pueden facilitarla las partículas vecinas. Esta transformación conduce a la desintegración β_+ artificial.

4°. Los semiperíodos de las desintegraciones beta (VIII.1.4.5°) varían, para las distintas fuentes de rayos β_{\pm} , dentro de un amplio intervalo de tiempo, desde 10^{-2} s hasta 10^{12} años, inconmensurablemente grande en comparación con el tiempo nuclear (10^{-22} — 10^{-23}) s (VIII.2.2.6°). Esto indica que la desintegración beta se debe a una interacción débil (VIII.2.2.8°).

5°. Un hecho experimental decisivo para comprender el mecanismo de desintegración β_- y establecer su teoría fue el

estudio del espectro energético de los electrones emitidos. Este espectro resultó ser continuo y extenderse hasta $W = W_{\text{máx}}$ (fig. VIII.1.2). La energía $W_{\text{máx}}$ se llama *límite superior de la energía* del espectro β_- y es la característica de la fuente de radiación radiactiva β_- . Para una fuente dada es imposible que los electrones tengan energías mayores que $W_{\text{máx}}$.

6°. Para coordinar la continuidad del espectro de la energía de los electrones con el carácter discreto de los niveles nucleares (VIII.1.5.5°), hay que admitir que, junto con el electrón ${}_{-1}^0e$, el núcleo emite otra partícula: el antineutrino electrónico*) ${}_{0}^{\sim}\nu_e$. La energía total que pierde el núcleo en la desintegración β_- es igual a $W_{\text{máx}}$, pero esta energía se distribuye de distinto modo entre el electrón y el antineutrino electrónico**). En particular, el punto límite de la curva de la fig. VIII.1.2 significa que toda la energía de la desintegración β_- se la lleva el electrón. El valor nulo de la energía del electrón en esta curva correspondería al caso en que toda la energía se la llevaría el antineutrino ${}_{0}^{\sim}\nu_e$.

Para la radiactividad β_- de los neutrones libres $W_{\text{máx}} = 782$ keV, lo que responde por completo a lo expuesto en el p. 3°. En la desintegración beta no varía el número másico A ni el espín del núcleo (VIII.1.4.5°).

§ VIII.1.7. Rayos gamma

1°. *Los rayos gamma* son una radiación electromagnética dura cuya energía es emitida durante las transiciones de los núcleos de sus estados de energía excitados al estado fundamental o a otro menos excitado (VIII.1.5.5°), y también durante las reacciones nucleares. En el primer caso, de acuerdo con la regla de las frecuencias de Bohr (VI.2.1.6°), la energía del fotón de rayos gamma es igual a la diferencia de energía entre los niveles inicial y final del núcleo:

$$h\nu_{ik} = W_i - W_k = \Delta W_{ik},$$

donde ν_{ik} es la frecuencia del fotón correspondiente a la transición del núcleo del estado con energía W_i al estado con energía

*) De las antipartículas se trata en VIII.2.5.1°.

***) Es evidente que $W_{\text{máx}}$ determina la diferencia ΔW_{ik} de energía entre dos niveles del núcleo.

W_h . La magnitud ΔW_{ik} es del orden de 0,1 MeV y mucho mayor que la diferencia de energía entre los niveles electrónicos del átomo (VI.2.1.5°). Los rayos gamma son una radiación electromagnética de onda muy corta, no mayor de 10^{-2} nm, es decir, de 0,1 Å. El espectro discreto (de rayas) de rayos γ confirma lo antedicho (véase el p. 4°).

2°. La radiación gamma no es un tipo independiente de radiactividad (VIII.1.4.2°). La misma acompaña los procesos de desintegración α y β y no hace que varíe la carga ni el número másico de los núcleos. Se ha establecido que los rayos son emitidos por el núcleo hijo (VIII.1.4.3°) que en el instante de su formación está excitado (p. 4°). La eliminación de la energía del núcleo excitado se efectúa en un tiempo (10^{-13} — 10^{-14} s) mucho menor que el tiempo de vida del átomo excitado ($\sim 10^{-8}$ s).

3°. El origen y las propiedades de los rayos gamma se confirman por las leyes de *conversión interna* de los rayos γ , fenómeno de efecto fotoeléctrico (V.6.1°) sobre los electrones de las capas internas del átomo, producido por la acción de los rayos gamma de su núcleo. Los electrones que se originan a consecuencia de este efecto fotoeléctrico interno se llaman *electrones de conversión*.

En una serie de casos, toda la energía de los rayos γ se invierte en el fenómeno de conversión interna, y en vez de dichos rayos se observan electrones de conversión. La energía $e\varphi_n$ del fotoelectrón de conversión se relaciona con la energía $h\nu$ del fotón de rayos γ por medio de la fórmula de Einstein para el efecto fotoeléctrico (V.6.1.4°):

$$e\varphi_n = h\nu - A_n,$$

donde A_n es el trabajo de salida del electrón de la n -ésima capa electrónica del átomo, igual numéricamente a las energías de los electrones que se encuentran en determinados niveles energéticos del átomo (VI.2.1.5°). Estas energías se conocen por los datos de los espectros característicos de rayos X de los átomos (VI.2.5B.9°). Un fotón gamma de energía $h\nu$ puede arrancar un electrón de cualquiera de las capas internas (K , M , u otra) del átomo (VI.2.3.6°). Respectivamente, las energías $e\varphi_n$ de los electrones de conversión se expresan así:

$$e\varphi_L = h\nu - A_L, \quad e\varphi_M = h\nu - A_M, \quad e\varphi_N = h\nu - A_N, \text{ etc.},$$

donde A_L , A_M , A_N , etc., son las energías de los niveles de emisión de rayos X del átomo.

4°. El resultado de la conversión interna (p. 3°) es la pérdida de electrones de las capas internas del átomo y, por consiguiente,

la creación de condiciones para la emisión de las rayas del espectro característico de los rayos X (VI.2.5B.9°). La conversión interna va acompañada de la emisión de rayos X característicos. La medida de la energía de los electrones de conversión, así como los datos sobre las magnitudes A_L , A_M , A_N , etc. (p. 3°), han permitido llegar a la convicción de que un núcleo puede emitir una serie determinada de rayos γ monocromáticos, es decir, que los rayos γ tienen espectro de rayas. Además, todos estos datos han demostrado que los rayos γ no los emite el núcleo padre, sino el núcleo hijo.

5°. Los rayos γ influyen poderosamente sobre la sustancia, en particular, sobre los objetos biológicos. La acción de los rayos γ y de otros tipos de radiación ionizante se valora por la *dosis de radiación* D , que es la razón de la energía de la radiación a la masa de la sustancia irradiada. La unidad de dosis de radiación es el J/kg, es decir, la dosis de radiación con la cual a la masa de 1 kg de sustancia irradiada se transmite una energía de radiación ionizante de 1 J*). Esta unidad se conoce con el nombre de *gray* (Gy). También se utiliza la unidad no sistematizada denominada *rad*; $1 \text{ rad} = 10^{-2} \text{ Gy}$.

La *intensidad* N de dosis de radiación es la dosis D referida a la unidad de tiempo:

$$N = D/t.$$

La unidad de intensidad de dosis de radiación es el vatio por kilogramo ($\text{W/kg} = \text{Gy/s}$).

6°. La característica energética de radiación, evaluada por la ionización del aire atmosférico seco, es la *dosis de exposición a la radiación* D_e . Su unidad es el culombio por kilogramo (C/kg), es decir, la dosis de exposición a los rayos X o gamma, con la cual la suma de las cargas eléctricas de los iones de un mismo signo, generados por los electrones liberados en 1 kg de masa del aire irradiado, aprovechando totalmente su poder ionizante, es igual a 1 C. Como unidad no sistematizada de dosis de exposición se emplea el *roentgen* (R): $1 \text{ R} = 2,58 \times 10^{-4} \text{ C/kg}$.

Con una dosis de exposición igual a 1 R en 10^{-6} m^3 de aire seco a presión atmosférica normal, se produce una carga total de iones de igual signo de $(1/3) \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

*) Teniendo en cuenta el carácter peculiar de los conocimientos sobre los efectos biológicos de los rayos gamma, las unidades de las magnitudes físicas correspondientes no se dan en el apéndice IX del manual, sino aquí.

Se llama *intensidad* N_e de dosis de exposición, la dosis de exposición D_e referida a la unidad de tiempo, $N_e = D_e/t$. De unidad de N_e sirve el amperio por kilogramo (A/kg), es decir, la intensidad de dosis de exposición a la radiación electromagnética con la cual esa dosis aumenta 1 C/kg por segundo. Otras unidades de intensidad de dosis de exposición no sistematizadas son 1 R/s = $2,58 \cdot 10^{-4}$ A/kg; 1 R/min = $4,30 \cdot 10^{-6}$ A/kg y 1 R/h = $7,17 \cdot 10^{-8}$ A/kg.

7°. La dosis de radiación se puede valorar también por la acción biológica. Con este fin se introduce el *equivalente biológico del roentgen* (*rem* o *reh**)). Así se llama la energía de radiación absorbida, equivalente biológicamente a un roentgen,

$$1 \text{ rem} = 10^{-2} \text{ J/kg.}$$

Para el hombre se considera permisible una intensidad de dosis aproximadamente 250 veces mayor que la intensidad que crea el fondo cósmico y las radiaciones radiactivas de la Tierra.

§ VIII.1.8. Efecto Mössbauer

1°. Todos los niveles energéticos del núcleo excitados tienen valores de energía determinados con una exactitud de hasta la magnitud ΔW definida por la relación de incertidumbre (VI.1.6.6°),

$$\Delta W \approx \frac{\hbar}{\Delta t},$$

donde Δt es el período de vida del núcleo en estado excitado. Sólo para el estado fundamental de un átomo estable, $\Delta t = \infty$ y $\Delta W = 0$, es decir, el valor de la energía del núcleo es igual exactamente a W^{**}). Por ejemplo, el núcleo de iridio $^{191}_{77}\text{Ir}$, en el tiempo Δt que se puede tomar igual al período de semidesintegración (VIII.1.4.5°) $T = 10^{-10}$ s, pasa del estado excitado con energía $W = 129$ keV al estado fundamental emitiendo un fotón γ . La magnitud ΔW de la indeterminación de la energía resulta ser $\Delta W = 5 \cdot 10^{-6}$ eV.

*) *rem*, del inglés «roentgen equivalent man», en español se llama a veces *reh*, de roentgen equivalente humano. (*N. del T.*)

***) Esto se refiere en igual medida a los niveles energéticos de los electrones en los átomos.

La finitud del período de vida de los estados energéticos excitados del núcleo, hace que la radiación γ que acompaña el paso del núcleo del estado excitado al estado normal, no sea monocromática. Esta no monocromaticidad se llama *anchura natural de las rayas de radiación γ* , y la incertidumbre ΔW de la magnitud de la energía del estado excitado recibe el nombre de *anchura natural Γ del nivel energético del núcleo**).

2°. Se denomina *absorción por resonancia* de los rayos γ por un núcleo, la absorción por el núcleo de fotones gamma de frecuencia ν tal, que la energía $h\nu$ del fotón es igual a la diferencia entre la energía de uno de los estados energéticos excitados del núcleo, y la del estado fundamental. El sentido de tal denominación consiste en que esta misma frecuencia ν la tendrá la raya del fotón γ que emita el núcleo al pasar del estado excitado al estado normal.

En los actos de emisión y absorción de fotones γ por el núcleo, se tiene en cuenta el *rechazo* de éste. Al pasar el núcleo del estado excitado de energía W al estado fundamental (cuya energía se considera igual a cero), el fotón γ adquiere la energía W_f :

$$h\nu_{em} = W_f = W - W_{nuc} < W,$$

siendo W_{nuc} la energía de rechazo del núcleo.

Para excitar el núcleo y hacer que él pase del estado fundamental al estado de energía W , el fotón gamma debe tener una energía W'_f igual a $h\nu_{abs} = W'_f = W + W_{nuc} > W$.

Las frecuencias de los máximos de las rayas de emisión ν_{em} y de absorción ν_{abs} están desplazadas entre sí a la distancia de

$$\nu_{abs} - \nu_{em} = \Delta\nu \text{ tal, que } h\Delta\nu = 2W_{nuc}.$$

La energía de rechazo del núcleo W_{nuc} se determina por el impulso p_f del fotón (V.6.2.2°), que en los procesos de emisión y absorción del fotón γ debe ser igual al impulso del núcleo ($p_f = p_{nuc}$):

$$W_{nuc} = \frac{p_{nuc}^2}{2M_{nuc}} = \frac{p_f^2}{2M_{nuc}} = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \frac{1}{2M_{nuc}},$$

*) Estas definiciones son también válidas para las transiciones del átomo del estado excitado al estado normal. En este caso se dice *anchura natural de la raya espectral* y *anchura natural de los niveles energéticos de los electrones* en el átomo.

donde $M_{\text{núcl}}$ es la masa del núcleo. Para el núcleo ${}_{77}^{191}\text{Ir}$ con energía del estado excitado $W = 129 \text{ keV}$, los cálculos dan: $W_{\text{núcl}} = 0,05 \text{ eV}$ y los máximos de las rayas de emisión y absorción están desplazados entre sí en la magnitud $\Delta\nu = 2W_{\text{núcl}}/h$. Con esto, $h\Delta\nu = 0,1 \text{ eV}$ es mucho mayor que la anchura natural Γ del nivel (p. 1°).

3°. Una reducción brusca de la energía de rechazo de los núcleos durante la emisión y absorción de rayos γ se consigue si estos procesos se observan en núcleos que se encuentran en una red cristalina, es decir, en estado ligado. En estas condiciones, el impulso y la energía de rechazo no se transmiten solamente al núcleo que emite (o absorbe) el fotón γ , sino a toda la red cristalina. La masa del cristal es mucho mayor que la del núcleo, pero la pérdida de energía $W_{\text{núcl}}$ durante la emisión y absorción de rayos γ resulta muy pequeña. En este caso se observa la absorción y emisión por resonancia de un fotón γ de frecuencia ν rigurosamente determinada, y la anchura de la raya será comparable con la anchura natural (p. 1°). El fenómeno de absorción (emisión) por resonancia de rayos γ sin rechazo se llama *efecto Mössbauer*.

4°. En la espectroscopia nuclear se utiliza el efecto Mössbauer para medir con exactitud los niveles de energía de los núcleos atómicos. Así, por ejemplo, para las transiciones γ en los núcleos ${}^{57}\text{Fe}$ con energía de transición $W = 14,4 \text{ keV}$, la variación de la energía del nivel se ha determinado con una exactitud de hasta $\Gamma/W = 3 \cdot 10^{-13}$. Para la transición γ en el ${}^{67}\text{Zn}$ con energía de transición $W = 93 \text{ keV}$, la magnitud Γ/W resultó ser igual a $5 \cdot 10^{-16}$.

El efecto Mössbauer se ha utilizado para comprobar la deducción del desplazamiento de la frecuencia de las rayas espectrales en el campo gravitatorio (I.6.2.1°). Al moverse un fotón en el campo de gravitación, su energía varía en la magnitud $\Delta W = -m(\varphi_2 - \varphi_1)$, en la que $m = h\nu/c^2$ es la masa del fotón (V.6.2.1°), y φ_1 y φ_2 son los potenciales del campo gravitatorio en los puntos 1 y 2 (I.6.2.4°). El signo menos indica que el aumento de la energía del fotón en el campo de gravitación se efectúa a expensas de la disminución de su energía $W = h\nu$:

$$h\Delta\nu = -m\Delta\varphi.$$

La variación relativa de la frecuencia, cuando el fotón atraviesa la diferencia de potencial gravitatorio $\Delta\varphi$, constituye

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\varphi}{c^2}$$

Aquí $\Delta\varphi > 0$, ya que el potencial del campo de atracción del Sol aumenta a medida que nos alejamos de él. En la superficie de la Tierra es mayor que en la superficie del Sol. Por consiguiente, $\Delta v/v < 0$ y todas las frecuencias de las rayas del Sol y de las estrellas se registran en la Tierra desplazadas hacia la zona roja del espectro. Este efecto se conoce con el nombre de «desplazamiento hacia el rojo» gravitatorio.

El efecto Mössbauer ha permitido descubrir el desplazamiento gravitatorio de la frecuencia del fotón γ al moverse éste en el campo de gravedad de la Tierra. Si el mismo se mueve verticalmente desde el suelo hasta el techo del laboratorio, a una altura del orden de 10 m, la variación de la frecuencia será

$$\left| \frac{\Delta v}{v} \right| = \frac{\Delta\varphi}{c^2} = \frac{g\Delta h}{c^2} \approx 10^{-16},$$

donde g es la aceleración de la gravedad (I.7.3.3°). Para poder registrar este corrimiento de la frecuencia hay que efectuar la absorción por resonancia de los fotones γ de tal modo que la fuente y el receptor de los rayos γ tengan una anchura relativa de las rayas menor o igual a 10^{-16} . En este caso la absorción no se producirá si la frecuencia del fotón γ que incide sobre el núcleo difiere de la frecuencia del fotón que puede absorber éste en la magnitud $\Delta v = 10^{-16} v$.

El experimento se llevó a cabo con dos fuentes cristalinas iguales de rayos γ , que podían situarse 20 m más alto la una de la otra. Cuando el receptor de rayos γ estaba a la misma altura que la fuente de fotones γ , se producía la absorción por resonancia, pero cuando el receptor se elevaba 20 m, la absorción cesaba debido al desplazamiento gravitatorio de la frecuencia. Para restablecer la absorción se utilizó el efecto Doppler (VI.3.6.1°). A una determinada velocidad de aproximación del receptor a la fuente de radiación, el aumento Doppler de la frecuencia compensaba su disminución gravitatoria y la absorción por resonancia de los rayos γ se restablecía. Este experimento sirvió de confirmación (en condiciones de laboratorio) del «desplazamiento hacia el rojo» gravitatorio.

§ VIII.1.9. Reacciones nucleares

1. Se llaman *reacciones nucleares* las transformaciones de los núcleos atómicos inducidas por sus interacciones entre sí o con partículas elementales (VIII.2.1.1°). Por regla general,

en las reacciones nucleares intervienen dos núcleos y dos partículas. Un par núcleo-partículas es el inicial, y el otro par, el final.

Una reacción nuclear se representa simbólicamente así:



donde A y B son los núcleos inicial y final, y a y b, las partículas inicial y final de la reacción. En una serie de casos la reacción se puede producir de forma no unívoca, es decir, no sólo como antes se ha indicado, sino también según el esquema $A + a \rightarrow C + c$, o sea, $A(a, c)C$ o por otros. Los posibles esquemas de desarrollo de una reacción nuclear se llaman *canales* de la reacción. La etapa inicial de la reacción se denomina *canal de acceso*.

2. Toda reacción nuclear se caracteriza por la *energía de reacción nuclear* Q , igual a la diferencia entre las energías de los pares final e inicial de la reacción (p. 1°). Si $Q < 0$, la reacción se efectúa con absorción de energía y se llama *endotérmica*; si $Q > 0$, la reacción se efectúa con liberación de energía y recibe el nombre de *exotérmica*. La reacción nuclear endotérmica es posible cuando los núcleos o las partículas que la producen tienen cierta energía cinética mínima (umbral) W_{umb} :

$$W_{\text{umb}} = \frac{M_A + M_a}{M_A} |Q|,$$

donde M_A es la masa del núcleo en reposo o *núcleo-blanco*, y M_a , la masa de la partícula (o núcleo) incidente (proyectil).

En las reacciones nucleares se cumplen las leyes de conservación de la energía, del impulso, de la carga eléctrica y de los números másicos. Si la energía cinética de las partículas que reaccionan es suficiente para que se genere un par nucleón-antinucleón (VIII.2.5.6°), el número másico puede variar. Además, en la física nuclear existen leyes de conservación especiales que no hay en otras ramas de la física (VIII.2.4.1°—4°).

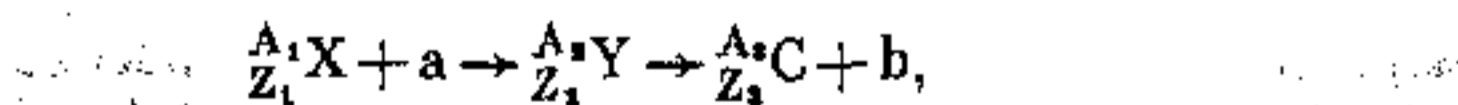
3. El rendimiento de una reacción nuclear viene determinado por la magnitud de la *sección transversal eficaz* σ de una reacción dada (*sección de reacción*). La magnitud σ tiene dimensión de área y caracteriza el rendimiento de la reacción por partícula que bombardea el núcleo:

$$\sigma = \frac{dn_0}{n_0 N_0 dx}$$

En esta definición se considera que, en la unidad de tiempo, sobre la unidad de área de la sección transversal de la sustancia, en la que hay N_0 núcleos por unidad de volumen, incide un flujo plano-paralelo que contiene n_0 partículas; dn_0 es el número de estas partículas que sufren la reacción nuclear en una capa de espesor dx .

4°. Atendiendo al carácter de interacción de la partícula a con el blanco A, las interacciones se dividen en: *directas*, en las cuales la reacción nuclear se efectúa en una sola etapa según el esquema del (p. 1°), e *indirectas*, que se desarrollan en dos etapas formándose un *núcleo compuesto*. En la primera etapa, la partícula incidente queda retenida en el núcleo-blanco y su energía no se transmite a un nucleón cualquiera, sino que se distribuye uniformemente entre todas las partículas del núcleo compuesto, de manera que ninguna de ellas recibe la energía suficiente para escapar del núcleo *). El núcleo compuesto se considera como un sistema estadístico excitado de partículas que efectúan un movimiento desordenado semejante al de las partículas de una gota de agua. La redistribución rápida de la energía entre las partículas sólo es posible cuando éstas chocan con frecuencia, lo cual es característico de la redistribución de la energía entre las partículas de una gota de líquido. Como resultado de las desviaciones casuales de la distribución uniforme de la energía de excitación entre las partículas del núcleo compuesto, en una cualquiera de ellas se concentra la energía suficiente para su escape del núcleo. Esta segunda etapa de la reacción nuclear se produce al cabo de un tiempo (10^7 — 10^8) τ_{nuc} después de la primera etapa, siendo τ_{nuc} el tiempo nuclear característico (VIII.2.2.6°).

El esquema de una reacción nuclear que se desarrolla con la formación de un núcleo compuesto es



donde ${}_{Z_1}^{A_1}X$ es el núcleo-blanco inicial; a , la partícula incidente; ${}_{Z_2}^{A_2}Y$, el núcleo compuesto; ${}_{Z_3}^{A_3}C$, el núcleo-producto de la reacción nuclear; y b , la partícula que escapa del núcleo como resultado de la reacción. Si $a = b$, se produce la difusión de la partícula por el núcleo (elástica o inelástica, en dependencia

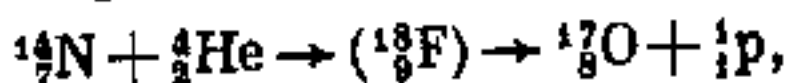
*) El "proyectil" capturado por el núcleo, la partícula α o el deuterón, puede estar constituido por varias partículas.

de si la energía de dicha partícula, antes y después de la difusión, era igual o distinta). Si $b \neq a$ se desarrolla la reacción nuclear en el sentido directo del término.

5°. Las reacciones nucleares se clasifican por diversos indicios, a saber: por la energía de las partículas que las inducen, por el tipo de partículas que intervienen en ellas, y por el carácter de las transformaciones nucleares que ocurren. Las reacciones nucleares de pequeñas energías (del orden de eV) se efectúan principalmente por la acción de los neutrones. Las de energías medias (de hasta varios MeV) son inducidas, además, por las partículas con carga (partículas α , protones, deuterones y núcleos de hidrógeno pesado) y también por los fotones γ . Las partículas con carga que inducen las reacciones nucleares pueden ser de carga múltiple de los elementos químicos pesados o pueden ser partículas con carga aceleradas en aceleradores. Las reacciones de altas energías (de centenares y millares de MeV) ocasionan la generación de partículas elementales que no existen en estado libre (mesones, hiperones y otras).

6°. Ejemplos de reacciones nucleares inducidas por partículas α y deuterones ${}^2_1\text{D}$:

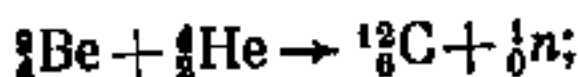
a) históricamente, la primera reacción nuclear fue la transmutación del nitrógeno en oxígeno:



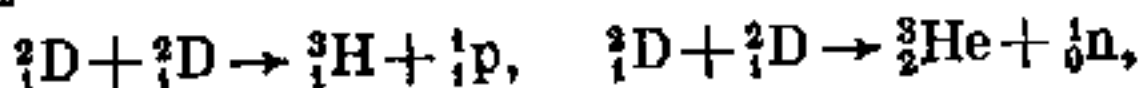
o abreviadamente:



b) la reacción nuclear que por primera vez proporcionó neutrones es

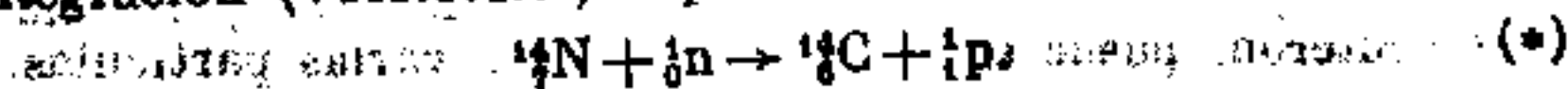


c) las reacciones nucleares inducidas por deuterones ${}^2_1\text{D}$ —núcleos de hidrógeno pesado (deuterio) — pueden conducir a la síntesis de núcleos pesados — tritio ${}^3_1\text{H}$, o del isótopo ligero del helio ${}^3_2\text{He}$ con la formación de un protón o un neutrón:

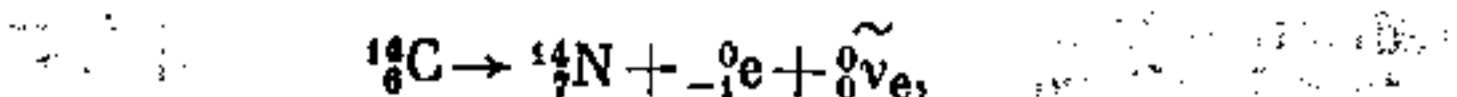


(véase también el p. 13°).

7°. Bajo la acción de los neutrones ${}^1_0\text{n}$ se produce la formación de isótopos radiactivos artificiales como, por ejemplo, el carbono radiactivo (radiocarbono) ${}^{14}_6\text{C}$ con período de semidesintegración (VIII.1.4.5°) superior a 5000 años:



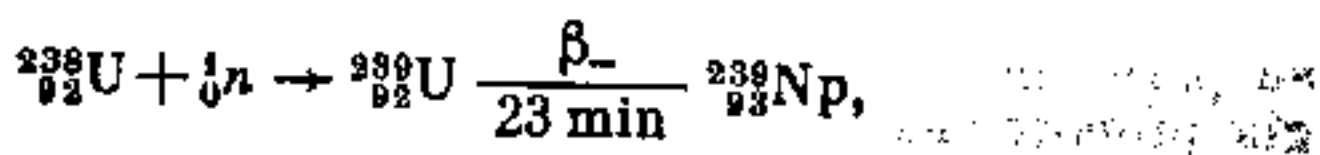
La desintegración ulterior es



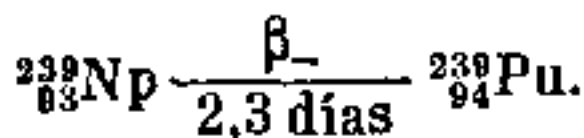
en la que ${}^0_{-1}\text{e}$ y ${}^0_0\tilde{\nu}_e$ son los símbolos del electrón y del antineutrino electrónico. El gran período de semidesintegración del ${}^{14}_6\text{C}$ sirve de base al método del radiocarbono para fines cronológicos en arqueología. La determinación de la cantidad relativa de carbono radiactivo no desintegrado (que dejó de acumularse en un organismo muerto) por la reacción (*), permite establecer la fecha en que dicho organismo dejó de absorber de la atmósfera el isótopo ${}^{14}_6\text{C}$, el cual se forma en esta última a partir del nitrógeno, por la acción de los neutrones cósmicos.

8°. El carácter de interacción de los neutrones con los núcleos es distinto para los neutrones rápidos y para los lentos. Los neutrones se dice que son rápidos (*neutrones rápidos*) cuando su velocidad v es tan grande que la longitud de onda de De Broglie correspondiente, $\lambda = h/mv$, es menor que el radio R del núcleo, es decir, $h/mv < R$, o $v > h/mR$. La energía de los neutrones rápidos está comprendida dentro de los límites de 0,1 MeV y 50 MeV. Si $\lambda > R$, los neutrones se llaman lentos (*neutrones lentos*). La energía de estos neutrones no pasa de 100 keV. Los neutrones lentos, con energías de 0,005 eV a 0,5 eV, se llaman *neutrones térmicos*. Cuando las energías son menores que 0,005 eV se hace distinción entre dos tipos de neutrones: *fríos* y *ultrafríos*.

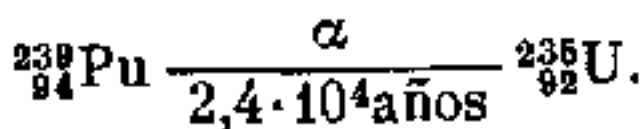
La interacción de los neutrones con los núcleos consiste principalmente en la dispersión elástica de los neutrones por los núcleos, o en la captura de los primeros por los segundos. En las sustancias llamadas *moderadoras* (grafito, agua pesada D_2O , HDO y compuestos de berilio), los neutrones rápidos se dispersan en los núcleos y su energía se transforma en energía del movimiento térmico de los átomos de la sustancia moderadora. Como resultado de esto, los neutrones se convierten en térmicos. Su energía a la temperatura ambiente se hace aproximadamente igual a 0,025 eV. Cuando la energía de los neutrones térmicos coincide con la del núcleo compuesto (p. 4°), se produce la *absorción por resonancia* (*captura por resonancia*) de los neutrones. Este proceso sirve de base para obtener *elementos químicos transuránicos*. Así, el elemento transuránico denominado neptunio ${}^{239}_{93}\text{Np}$ se origina al capturar por resonancia neutrones el más abundante de los isótopos del uranio, el ${}^{238}_{92}\text{U}$, según el esquema siguiente:



donde se indica el período de semidesintegración del isótopo radiactivo ${}^{239}_{93}\text{U}$ que se transforma en ${}^{239}_{93}\text{Np}$. Después, el núcleo del isótopo ${}^{239}_{93}\text{Np}$ se transforma en plutonio ${}^{239}_{94}\text{Pu}$:



En virtud de la eficaz fisión inducida por los neutrones térmicos (p. 10°), el plutonio desempeña un papel destacado en la obtención de energía nuclear. El plutonio ${}^{239}_{94}\text{Pu}$ es α -radiactivo, tiene un período de semidesintegración enorme (24 000 años) y se transforma en el isótopo estable del uranio ${}^{235}_{92}\text{U}$:



9°. Las reacciones nucleares inducidas por núcleos acelerados de elementos químicos han permitido prolongar la tabla de Mendeléiev hasta el elemento con número $Z = 107$. Al elemento con $Z = 105$ se le dio el nombre de nielsbohrio (Ns). Bombardeando el isótopo ${}^{242}_{94}\text{Pu}$ con núcleos de neón ${}^{22}_{10}\text{Ne}$ se obtuvo un elemento químico con $Z = 104$, el kurchatovio ${}^{260}_{104}\text{Ku}$. Después de la captura del núcleo ${}^{22}_{10}\text{Ne}$ por el plutonio, se formó el núcleo compuesto de kurchatovio ${}^{264}_{104}\text{Ku}$ y, en un caso por 10 mil millones de núcleos compuestos, después de ser emitidos cuatro neutrones, se originó el núcleo del elemento ${}^{260}_{104}\text{Ku}$:



En los haces más potentes de núcleos de neón acelerados, un núcleo de kurchatovio tarda en generarse varias horas.

10°. Un núcleo pesado compuesto, excitado por la captura por resonancia de un neutrón, se puede dividir en dos partes aproximadamente iguales (*reacción de fisión de núcleos pesados*). Las partes así formadas se llaman *fragmentos de fisión*. La inestabilidad de los núcleos pesados a la fisión se debe a la gran cantidad de protones que hay en ellos, que experimentan la repulsión coulombiana entre sí.

La fisión de un núcleo pesado, en dos fragmentos, va acompañada de la liberación de una energía enorme. Esto se deduce de la comparación de las energías específicas de enlace de los núcleos de los elementos químicos situados al final del sistema periódico de Mendeléiev, con los que se encuentran en su parte media. En la reacción de fisión se libera una energía proporcional a la diferencia entre la energía del núcleo

“poroso” inestable y la energía de los dos fragmentos de fisión “empaquetados” estables. Esta diferencia es de 1.1 MeV por nucleón (VIII.1.2.4°). En la fisión del núcleo de uranio ${}_{92}^{238}\text{U}$, que tiene 238 nucleones, deberá liberarse una energía del orden de 200 MeV. Al fisionarse los núcleos contenidos en 1 g de uranio ${}_{92}^{235}\text{U}$, se liberan $8 \cdot 10^{10}\text{J}$ ó 22 000 kW·h de energía.

Los núcleos pesados son aptos para la fisión si para ellos se cumple la condición $Z^2/A \geq 17$, en la que Z^2/A se denomina *parámetro de fisión*. Esta condición la cumplen todos los núcleos a partir de la plata ${}_{47}^{108}\text{Ag}$, para la que $Z^2/A \approx 20$. Los núcleos para los cuales $(Z^2/A)_{\text{crit}} \geq 49$ (*parámetro de fisión crítico*), son totalmente inestables a la fisión y no pueden existir. Para el kurchatovio ($Z = 104$) (p. 9°) $Z^2/A \approx 41$.

Con valores de $Z^2/A < (Z^2/A)_{\text{crit}}$ es posible la *fisión espontánea de los núcleos*, que se produce de un modo análogo a la radiactividad α (VIII.1.5.1°), en virtud del efecto túnel (VI.1.7.2°). El período de semidesintegración (VIII.1.4.5.°) para la fisión espontánea de los núcleos es de $(10^{16} - 10^{17})$ años.

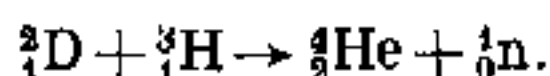
11°. Los fragmentos de fisión recién formados tienen exceso de neutrones frente a los protones. Los neutrones sobrantes que emiten los fragmentos se conocen con el nombre de *neutrones de fisión*. Su número puede variar, y el proceso de fisión de los núcleos va acompañado de una multiplicación de los neutrones que se caracteriza por el número medio $\langle \nu \rangle$ de neutrones formados durante un acto de fisión. Para los núcleos de plutonio ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ y de uranio ${}_{92}^{235}\text{U}$ que se fisionan por la acción de los neutrones térmicos, $\langle \nu \rangle$ es igual, respectivamente, a 3,0 y 2,5. Entre los neutrones de fisión, los hay *inmediatos (secundarios)* y *retardados*. Los neutrones inmediatos son emitidos durante la fisión del núcleo, en un tiempo del orden de 10^{-14} s. Los neutrones retardados son emitidos por los productos de fisión al cabo de cierto tiempo de producirse ésta.

12°. Si cada uno de los neutrones inmediatos que aparecen en las reacciones de fisión (p. 11°), interaccionando con los átomos vecinos de la sustancia fisil, provoca en ellos una reacción de fisión, se produce un aumento en avalancha del número de actos de fisión, es decir, una *reacción de fisión en cadena*. La condición necesaria para que se produzca la reacción en cadena, es que existan neutrones que se multipliquen.

Se llama *factor de multiplicación neutrónica* k la razón del número de neutrones que se producen en un eslabón determinado de la reacción, al número de estos neutrones que había en el eslabón precedente. La condición para el desarrollo de la reacción

en cadena es $k \geq 1$. En la práctica, la posibilidad de las reacciones en cadena ha sido demostrada por el desarrollo de la energética nuclear, rama de la técnica en la que se han creado diversos tipos de reactores nucleares, es decir, dispositivos en los cuales se realizan las reacciones en cadena controladas.

13. Las reacciones de síntesis de los núcleos de tritio y helio, por fusión de los núcleos de deuterio, indicadas en el p. 6°b), son la segunda vía de liberación de la energía intraatómica, además de la de fisión de los núcleos pesados. Entre las energías específicas de enlace (VIII.1.2.4°) de los núcleos ${}^2_1\text{D}$, ${}^3_1\text{H}$ y ${}^4_2\text{He}$ existe, aproximadamente, la relación 1 : 3 : 6. Esto significa que las reacciones nucleares examinadas en el p. 6°h) van acompañadas de la liberación de grandes cantidades de energía: en la primera de ellas se liberan 4,04 MeV, y en la segunda, 3,27 MeV. Una energía aún mayor, 17,58 MeV, se libera en la reacción



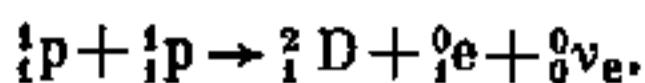
Esta energía será igual, por partícula, a $17,6/5 \text{ MeV} = 3,5 \text{ MeV}$, es decir, aproximadamente, 4 veces mayor que la que proporciona la reacción de fisión del uranio ${}^{235}_{92}\text{U}$ (p. 10°): $200/238 \text{ MeV} = 0,85 \text{ MeV}$. Aún más eficaz, desde el punto de vista de liberación de energía específica, es la reacción de síntesis de núcleos de helio ${}^4_2\text{He}$ por fusión de cuatro protones, la cual produce 6,70 MeV por partícula.

14°. En las reacciones de síntesis de núcleos ligeros hay que superar la energía potencial de repulsión, y las mismas se pueden desarrollar eficazmente a temperaturas ultraelevadas del orden de $(10^8 - 10^9) \text{ K}$, mayores que la temperatura de las regiones centrales del Sol ($T = 1,3 \cdot 10^7 \text{ K}$). Estas reacciones se llaman *termonucleares* (reacciones termonucleares de fusión), y la sustancia en que se efectúan se halla en estado de plasma (III.9.6.1°). Las reacciones termonucleares son, por lo visto, las fuentes de energía de las estrellas, que compensan su radiación. El Sol emite $3,8 \cdot 10^{26} \text{ J}$ de energía por segundo, lo que corresponde a un desprendimiento de energía, por unidad de masa y por segundo, de sólo $1,88 \cdot 10^{-4} \text{ J/s} \cdot \text{kg}$. Esto constituye únicamente un 1% de la energía específica que se desprende en un organismo vivo durante el proceso metabólico.

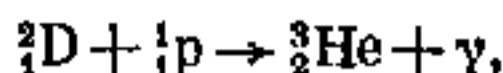
Se supone que las reacciones termonucleares se pueden desarrollar en el Sol en forma de ciclos termonucleares en los cuales la liberación de energía se produce a expensas de la transmutación de los núcleos de hidrógeno en núcleos de helio.

Una de las variantes del ciclo *protón-protón* comienza por la fusión de dos protones para formar deuterio emitiendo un po-

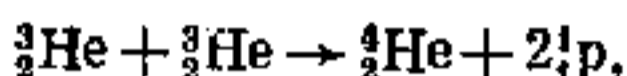
sitrón y un neutrino electrónico:



Después el ciclo transcurre según el esquema



donde la radiación γ se produce no sólo en forma de exceso de energía de la reacción, sino también al unirse el positrón con los electrones que siempre existen en el plasma (VIII.2.5.4°). La continuación probable del ciclo es la reacción con liberación de energía:



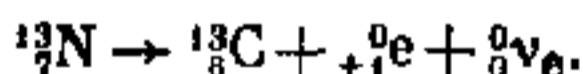
donde ${}^4_2\text{He}$ es el símbolo de la partícula α .

En el *ciclo del carbono-nitrógeno*, los núcleos de carbono son «catalizadores» de la reacción de fusión de los núcleos de hidrógeno en el núcleo de helio.

Al principio del ciclo, un protón rápido penetra en el núcleo de carbono:



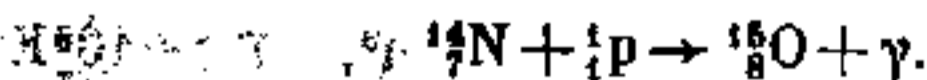
En el isótopo radiactivo del nitrógeno ${}^{13}_7\text{N}$, con período de semidesintegración de 14 min, se produce la transformación (VIII.1.6.1°) ${}^1_1\text{p} \rightarrow {}^1_0\text{n} + {}^0_{+1}\text{e} + {}^0_0\nu_{\text{e}}$ y se forma un núcleo isótopo del carbono:



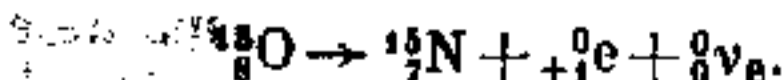
Cada 2,7 millones de años, aproximadamente, el núcleo ${}^{13}_6\text{C}$ captura un protón y forma el núcleo del isótopo estable del nitrógeno ${}^{14}_7\text{N}$:



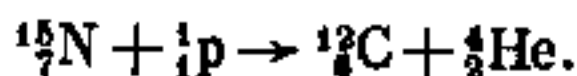
Al cabo de 32 millones de años, por término medio, el núcleo ${}^{14}_7\text{N}$ captura un protón y se transforma en el núcleo de oxígeno ${}^{15}_8\text{O}$:



El núcleo inestable ${}^{15}_8\text{O}$, con período de semidesintegración de 3 min, emite un positrón y un neutrino y se transforma en el núcleo ${}^{15}_7\text{N}$:

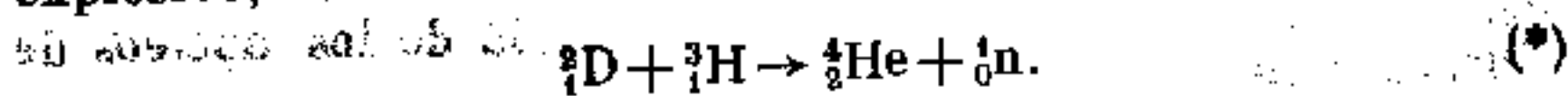


El ciclo finaliza aproximadamente 100 mil años después, con la reacción siguiente:



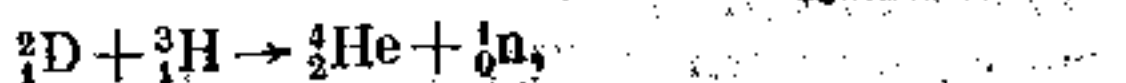
De este ciclo resulta la transformación de cuatro protones en un núcleo de helio, con la aparición de dos positrones y de radiación γ . Por cada núcleo de helio se liberan 26,8 MeV, lo que, referido a un átomo-gramo de helio, constituye 700 mil kW·h de energía. Esta energía es suficiente para compensar la radiación del Sol. Algunas de las reacciones del ciclo están separadas entre sí por períodos de tiempo desmesuradamente grandes respecto de las escalas terrestres. Pero este ciclo es cerrado y se efectúa continuamente. Por esto, todos los estados del ciclo se producen en el Sol al mismo tiempo, aunque empiezan en distintos instantes.

15°. Condiciones parecidas a las que ocurren en las entrañas del Sol se producen en la *bomba de hidrógeno*, en la cual se desarrolla una reacción termonuclear automantenida, de carácter explosivo, en una mezcla de deuterio y tritio del tipo

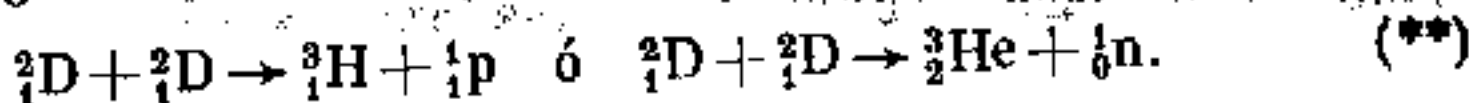


La alta temperatura necesaria para esta reacción termonuclear se obtuvo a expensas de la explosión de una bomba atómica «ordinaria», basada en una rápida reacción en cadena de fisión de núcleos pesados.

La base teórica de las reacciones termonucleares artificiales controladas son las reacciones del tipo



y del tipo



Para que se efectúen estas reacciones es necesario que el plasma esté bastante caliente y que la concentración n de partículas en él y el tiempo τ de su mantenimiento en el plasma satisfagan la condición llamada *criterio de Lawson*:

$$\text{para la reacción } (*) \quad n\tau > 10^{14} \text{ s/cm}^3, \quad T > 10^8 \text{ K},$$

$$\text{para la reacción } (**) \quad n\tau > 10^{16} \text{ s/cm}^3, \quad T > 10^9 \text{ K}.$$

La realización práctica de las reacciones termonucleares controladas es en la actualidad un problema de enorme importancia que posiblemente sea resuelto dentro de pocos años.

Capítulo VIII.2. Partículas elementales

§ VIII.2.1. Nociones generales acerca de las partículas elementales

1°. En el micromundo se destacan tres niveles que se diferencian por las escalas características de R y las energías E . El primero de ellos es el nivel molecular-atómico (VI.2.4.1°, VI.2.1.1°), para el cual $R \sim 10^{-8} - 10^{-10}$ m y $E \sim 1 - 10$ eV; el segundo nivel es el nuclear (VIII.1.1.1°), que tiene $R \sim 10^{-14} - 10^{-15}$ m y $E \sim 10^6 - 10^8$ eV. En el tercer nivel se encuentran las micropartículas más pequeñas, que ya no son moléculas, átomos ni núcleos *). Estas, por tradición, se llaman *partículas elementales* aunque no sean necesariamente formaciones sin estructura. A veces se les da el nombre de partículas subatómicas, y los físicos, por lo general, prefieren decir simplemente «partículas». En la actualidad, el nivel de partículas elementales se ha desdoblado en dos subniveles: el de hadrones y el de partículas fundamentales (VIII.2.4).

2°. La física de las partículas elementales establece las características de estos microobjetos, los clasifica, estudia las propiedades de sus interacciones fundamentales y analiza los procesos que ellas condicionan. Durante los últimos años se viene estudiando intensamente la estructura interna de las partículas elementales. De las relaciones de incertidumbre (VI.1.6.2°) se deduce que para poner de manifiesto los detalles de las estructuras de dimensiones del orden de Δr , se requieren partículas de sondeo cuyo impulso p no sea menor que $\Delta p \sim \hbar/\Delta r$. De aquí que para estudiar detalles muy pequeños hagan falta energías muy grandes. Por eso la física de las partículas elementales se llama también *física de las altas energías*. Las energías máximas posibles que se obtienen hoy en los laboratorios son del orden de 100 GeV, a las que corresponden distancias mínimas de $R \sim 10^{-18}$ m.

3°. El número total de partículas elementales (junto con las antipartículas) conocidas hasta ahora se aproxima a 400. Algunas de ellas son estables o casi estables y existen en la naturaleza en estado libre o débilmente ligado. Estas son: los electrones ${}^0_1e \equiv e^-$ (III.1.1.2°) **) que se encuentran en la com-

*) A excepción del protón o átomo de hidrógeno.

**) Y también los positrones ($p. 7^\circ$), e^+ .

posición de los átomos (VI.1.2); los *protones* ${}^1_1\text{H} \equiv p$ (III.1.1.2°) y los *neutrones* ${}^1_0\text{n} \equiv n$ que entran en la composición de los núcleos atómicos y que se agrupan bajo la denominación común de *nucleones* N (VIII.1.1.1°); y los *fotones* γ que son cuantos de campo electromagnético (V.6.1.4°). También pueden incluirse aquí los *neutrinos y antineutrinos electrónicos* ν_e^* que se generan en los procesos de desintegración beta (VIII.1.6.6°) y en las reacciones termonucleares que se desarrollan en las estrellas (VIII.1.9.14°).

4°. Todas las demás partículas elementales son extremadamente inestables y se forman en la radiación cósmica secundaria (VIII.2.2.5°) o sea obtienen en los laboratorios. El procedimiento principal de su generación es el de los choques de partículas estables rápidas (VIII.2.2.4°) durante los cuales una parte de la energía cinética inicial se transforma en energía en reposo (I.5.7.3°) de las partículas que se forman. Apenas generadas, las partículas inestables se desintegran y, en definitiva, vuelven a formarse partículas estables (por lo general distintas de las que chocaron).

5°. En 1937 se registró en los rayos cósmicos el *muón* μ^- , análogo pesado del electrón ($m_\mu \approx 200 m_e$) (**). A finales de la década del 40 se descubrieron los *piones* (mesones pi) π^+ , π^0 y π^- , portadores de la interacción nuclear (VIII.1.3.6°). En los años 50 se registraron, en los rayos cósmicos y en los aceleradores, las *partículas extrañas*: kaones (mesones K) K^+ y K^0 , los hiperones lambda Λ^0 , los hiperones sigma Σ^+ , Σ^0 y Σ^- , los hiperones xi Ξ^0 y Ξ^- , y el hiperón sigma omega Ω^- (***)). En la década del 60 se descubrieron más de cien partículas efímeras, con vida media (VIII.1.4.4°) $\tau \sim 10^{-24}$ a 10^{-23} s. Estas partículas recibieron el nombre de *resonancias*, ya que se manifiestan en forma de picos característicos en las gráficas de dependencia de la sección de dispersión (VIII.1.9.3°) respecto de la energía ****). En 1974

*) Y otros tipos de neutrino y antineutrino (VIII.2.3.3°).

**) En 1975, utilizando haces de "choque" electrón-positrón (VIII.2.2.5°), se descubrió un análogo más pesado del electrón, el leptón pesado o *taón* τ^- ($m_\tau \approx 3500 m_e$).

***) El hiperón omega fue predicho en 1962, basándose en profundos razonamientos teóricos, y descubierto experimentalmente en 1964.

****) El recorrido de las resonancias desde el instante en que se generan hasta el instante en que se desintegran, es de cerca de 10^{-16} m y no puede ser registrado directamente por medio de detectores ordinarios.

fueron descubiertos los mesones jota-psi, J/ψ , de gran masa (triple que la del protón) y relativamente estables ($\tau \sim 10^{-19}$), iniciadores del grupo de las *partículas con «encanto»* (D^+ , D^0 , F^+ , Λ_c^+ y otras). En 1977 se descubren los extraordinariamente pesados mesones ípsilon Υ ($m_\Upsilon \approx 11 m_p$), que se suponen iniciadores de otro grupo de partículas, con «hechizo». Finalmente, el año 1983 fueron registrados los *bosones intermediarios* W^+ , W^- y Z^0 , portadores de la interacción débil (VIII.2.4.11°).

6°. Para describir las propiedades de las partículas elementales por separado se introduce una serie de magnitudes físicas (números cuánticos), por cuyos valores se distinguen aquéllas. Las magnitudes físicas más conocidas son: la masa, la vida media, el espín, la carga eléctrica y el momento magnético.

a) *La masa m* se mide en unidades de energía (MeV o GeV), de acuerdo con la relación de Einstein (I.5.7.3°). El espectro de masas de las partículas elementales conocidas no es regular y se extiende desde 0 (fotón) hasta 90 GeV (mesones intermedios). Para que pueda compararse, recordaremos que la masa de electrón es aproximadamente igual a 0,5 MeV. Inicialmente la sistematización de las partículas elementales se basó en los valores de sus masas, de ahí proceden los términos leptones («ligeros»), mesones («medianos»), bariones («pesados») e hiperones (en griego el prefijo «hiper» significa «superioridad» o «exceso»). Estos términos se han conservado, pero perdieron su sentido inicial *).

b) *La vida media τ* sirve de medida de la estabilidad de la partícula **) y se mide en segundos (VIII.1.4.4°). Los valores de τ varían dentro de un intervalo extraordinariamente amplio. El fotón, el neutrino, el electrón y el protón son absolutamente estables ($\tau = \infty$ ***), mientras que las resonancias son extremadamente inestables ($\tau \sim 10^{-24}$ a 10^{-23} s). Para las partículas inestables, en las tablas se indican, además de la vida media, los *tipos de desintegración*.

*) Por ejemplo, el leptón τ^- es 3 veces y pico más pesado que el barión p.

**) De acuerdo con la relación de incertidumbre (VI.1.6.6°), para $W = mc^2$ la masa de la partícula inestable no tiene un valor rigurosamente determinado. Como medida de la inestabilidad de las resonancias se suele tomar precisamente la anchura $\Gamma \sim \hbar/\tau$ medida en unidades de energía.

***) Últimamente la estabilidad absoluta del protón se pone seriamente en duda (VIII.2.4.15°).

c) *El espín J* , momento de impulso (o angular) intrínseco de la partícula, se mide en unidades \hbar (III.13.1.3°) y toma valores enteros o semienteros. Una partícula elemental, con espín J , tiene $2J + 1$ estados de espín que se diferencian por las proyecciones J_z (VI.2.2.3°). El valor del espín determina unívocamente el *tipo de estadística* a que se subordinan las partículas dadas: todas las partículas con espín entero son bosones (VII.2.2.1°), y todas las que tienen espín semientero son fermiones (VII.2.2.4°) para los cuales es correcto el principio de Pauli (VI.2.3.1°). Los valores del espín J de las partículas conocidas se encuentran en el intervalo de 0 (por ejemplo, el de los piones π) hasta 6 (resonancia mesónica ρ registrada en el acelerador de Sérpujov en 1983)

d) *La carga eléctrica q* se mide en unidades de carga elemental e (III.1.1.2°). Para todas las partículas que existen en estado libre, esa carga sólo toma valores numéricos enteros *); por lo general 0 y ± 1 , y para algunas resonancias, ± 2 . Esta regla de cuantización (compárese con VI.2.2.1°) se cumple con gran exactitud: así, de acuerdo con las últimas mediciones,

$$|q_p + q_e| < 10^{-21}e, \quad |q_n| < 10^{-21}e.$$

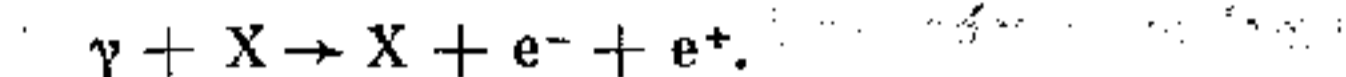
e) *El momento magnético μ* es el valor máximo de la proyección del vector momento magnético intrínseco \mathbf{p}_m de la partícula. El vector \mathbf{p}_m y el vector de espín \mathbf{J} son colineales; si son paralelos, $\mu > 0$, y si son antiparalelos, $\mu < 0$. Los momentos magnéticos μ de las partículas elementales suelen medirse en unidades de los correspondientes magnetones $\mu_0 = e\hbar/2m$. Si $m = m_e$, será μ_0 el magnetón de Bohr μ_B (III.13.1.4°), y si $m = m_p$, se obtendrá el magnetón nuclear μ_{nuc} (VIII.1.1.6°).

7°. Cada partícula tiene su *antipartícula* que, por lo general, se representa con el mismo símbolo, pero con una tilde encima. La masa, la vida media y el espín de la partícula y la antipartícula son iguales. Las demás características, incluso la carga eléctrica y el momento magnético, tienen el mismo módulo pero signos contrarios. Ejemplos de partículas y antipartículas son: el electrón e^- y el positrón e^+ , el protón p y el antiprotón \tilde{p} , el neutrón n y el antineutrón \tilde{n} , el neutrino ν_e y el antineutrino $\tilde{\nu}_e$. Los dos primeros pares se diferencian, por ejemplo, por

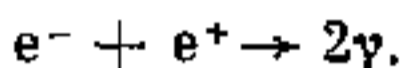
*) Los quarks o cuarks, a los cuales se les atribuyen valores fraccionarios de la carga eléctrica, requieren un estudio especial, ya que sólo pueden existir dentro de los hadrones (VIII.2.4.7°).

los signos de la carga eléctrica; n y \bar{n} , por los signos del momento magnético *), y ν_e y $\bar{\nu}_e$, por los signos de la llamada «espiralidad» o proyección del espín sobre la dirección del movimiento**). Algunas partículas, llamadas *verdaderamente neutras*, son idénticas a sus antipartículas. A ellas pertenecen: el fotón γ , el pion neutro π^0 y algunas otras.

La primera antipartícula, el *positrón* e^+ , fue registrada en 1932. El positrón se forma frecuentemente a la vez que el electrón, al chocar un fotón de energía $E_\gamma > 2m_e c^2$ con una partícula X cargada ***):



Al encontrarse un electrón lento con un positrón también lento, se aniquilan engendrando dos (rara vez tres) fotones:



En las colisiones de electrones y positrones suficientemente rápidos pueden engendrarse partículas muy diversas, incluso más pesadas. La utilización de haces de choque electrón-positrón es uno de los métodos más eficaces de generación e investigación de partículas nuevas y se emplea mucho en la física moderna (VIII.2.2.5°).

Los conceptos de partícula y antipartícula son relativos, y no absolutos. Por ejemplo, llamamos p al protón y \bar{p} al anti-protón únicamente porque en el Universo existe un número infinitamente mayor de objetos del primer tipo que del segundo. Pero las ecuaciones fundamentales de la teoría no cambian si la partícula se sustituye por la antipartícula y viceversa. La naturaleza de la asimetría de carga del Universo real no ha sido aún comprendida hasta el fin y constituye uno de los enigmas de la física y de la cosmología modernas.

*) Pero lo principal son los signos de la carga bariónica B y la proyección del isospín T_3 (VIII.2.3.8°).

***) La «espiralidad» del neutrino es negativa, la del anti-neutrino, positiva. Además, ν_e y $\bar{\nu}_e$ se diferencian por los signos de la carga leptónica L (VIII.2.3.4°) (compárese con la llamada anterior).

****) Esta partícula (por lo general un núcleo) se necesita para que se satisfagan las leyes de conservación de la energía y el impulso. El fotón libre, carente de masa, no puede transformarse espontáneamente en un par electrón-positrón con masa.

§ VIII.2.2. Transmutaciones de las partículas elementales. Interacciones fundamentales

1°. El principal método experimental y teórico de investigación en la física de las partículas elementales (y en la nuclear) es el *método de dispersión*. En los experimentos de dispersión, primero se preparan dos haces de partículas. A menudo uno de ellos se forma en un *acelerador* (III.11.4), y en lugar del otro se utiliza un *blanco* en reposo. Durante los últimos diez años se emplean mucho los *haces de «choque»* formados por aceleradores, así como los anillos llamados acumuladores protón-protón, protón-antiprotón, electrón-electrón y electrón-positrón. En una región determinada, los haces se cortan y las partículas de haces distintos interactúan. Como resultado, esas partículas se dispersan: varían sus estados de movimiento o se engendran nuevas partículas. Las partículas dispersadas se registran por medio de *detectores* y se miden sus características. Por los datos experimentales se juzga la interacción entre las partículas y su estructura interna. La característica dinámica fundamental de todo proceso de dispersión es la *sección eficaz* σ (VIII.1.9.3°). Todos los procesos de dispersión obedecen las *leyes de conservación*, entre las cuales señalaremos las de conservación de la energía y el impulso (1.5.6.2° y 1.5.7.2°) y la de conservación de la carga eléctrica (III.1.1.3°). Otras leyes de conservación se estudian en el párrafo (VIII.2.3).

2. Las interacciones entre las partículas condicionan procesos muy diversos y se dividen en tres grandes grupos.

a) En la *dispersión elástica*

$$a + b \rightarrow a + b$$

(a y b son los símbolos de las partículas), éstas no sufren transformaciones, solamente varía su estado de movimiento. Ejemplos: la dispersión de Compton (V.6.3) y la dispersión de partículas α por los núcleos en los experimentos de Rutherford.

b) En los *procesos inelásticos (reacciones)*

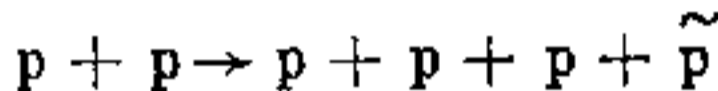
$$a + b \rightarrow c_1 + \dots + c_n,$$

las partículas que chocan se convierten en partículas de otra clase. Dichos procesos se subdividen en exotérmicos (en los cuales la energía de reacción $Q > 0$) y endotérmicos ($Q < 0$). Para estos últimos se introduce el concepto de energía umbral W_{umb} (VIII.1.9.2°). En las reacciones exotérmicas, parte de la energía

en reposo inicial se transforma en energía cinética, y en las endotérmicas se produce la transformación de la energía cinética inicial en energía en reposo de las partículas que se forman *). En estas últimas reacciones, en virtud de la ley de conservación del impulso, parte de la energía cinética inicial, en el caso general, debe invertirse en el movimiento del centro de masas de las partículas generadas y, por lo tanto, siempre $W_{\text{umb}} \geq |Q|$. Ejemplos: la reacción de aniquilación de pares electrón-positrón (VIII.2.1.7°) es exotérmica, $Q = 2m_e c^2 \approx 1,02 \text{ MeV}$, y la reacción de generación de pares electrón-positrón (VIII.2.1.7°) es endotérmica,

$$W_{\text{umb}} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m_e}{m_X} \right) > |Q| = 2m_e c^2.$$

Otro ejemplo: la reacción de generación del antiprotón (VIII.2.1.7°)



es endotérmica, $|Q| = 2m_p c^2 \approx 1,9 \text{ GeV}$; si uno de los protones iniciales está en reposo, $W_{\text{umb}} = 6m_p c^2 \approx 5,6 \text{ GeV}$, es decir, mucho mayor que $|Q|$; pero si los protones iniciales pertenecen a haces de choque, $W_{\text{umb}} = 2m_p c^2 = |Q| \approx 1,9 \text{ GeV}$.

c) Las partículas que se generan en los procesos de dispersión, salvo raras excepciones, son inestables (VIII.2.1.6°) y se desintegran:



La desintegración es un proceso exotérmico ($Q > 0$) y sólo se puede desarrollar a condición de que

$$m_a \geq \sum_i m_{0i}.$$

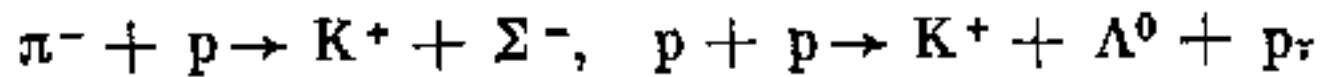
Ejemplo: el neutrón libre, la más estable de las partículas inestables, sufre la desintegración β_- con una vida media $898 \pm 16 \text{ s}$ (VIII.1.6.1°) y desprendiendo la energía $Q = m_n - (m_p + m_e) \approx 0,78 \text{ MeV}$. Por otra parte, el protón es más ligero que el neutrón y puede sufrir la desintegración β_+ (VIII.1.6.1°) solo si se encuentra en estado ligado dentro del núcleo atómico.

3°. La transmutación de las partículas elementales es una de las propiedades más importantes de éstas. Subrayemos que las partículas que se forman no entran en la composición de la par-

*) El caso $Q=0$ corresponde a la dispersión elástica.

partículas que se forman no entran en la composición de las partículas iniciales, sino que se *generan* directamente en los procesos de colisión o desintegración. Para aclarar, diremos que el fotón tampoco entra en la composición del átomo, sino que se genera directamente al pasar un electrón de un nivel de energía a otro (VI.2.1.3°).

4°. Precisamente en los procesos de transmutación se descubren partículas antes desconocidas (VIII.2.1.4°). Para esto se hacen chocar, con las energías mayores posibles, partículas estables conocidas, y después se investigan los productos de las reacciones que se producen y los fragmentos en que se desintegran las partículas formadas. Como ejemplo citaremos dos reacciones en las cuales se descubrieron partículas extrañas (VIII.2.1.5°):



5°. Hasta comienzos de la década del 50, de fuente fundamental de partículas con altas energías sirvieron los *rayos cósmicos*, es decir, los núcleos estables (protones principalmente) que llenan el espacio cósmico. Cuando un protón cósmico incide en la atmósfera se generan, a veces, en total hasta mil millones de partículas de distinto tipo que forman un chaparrón cósmico. La ventaja de los rayos cósmicos como fuentes de partículas es la extraordinaria anchura de su banda de energía (la energía media es aproximadamente de 10^{10} eV, y la máxima, del orden de 10^{20} eV), y sus inconvenientes son: la imposibilidad de controlar los experimentos, la rareza de los sucesos con energías ultraaltas y las enormes dificultades experimentales (como tener que subir a gran altura aparatos de precisión).

Hoy las fuentes principales de partículas son los *aceleradores* (III.11.4), en los cuales se forman haces intensos de partículas cargadas (electrones, protones y iones pesados) con altas energías. Cuando un haz primario interacciona con un blanco, se obtienen haces secundarios, terciarios, etc. que contienen partículas elementales y núcleos atómicos que no existen en la naturaleza. La energía máxima de los electrones, alcanzada en los laboratorios, es de 35 GeV, y la máxima de los protones 500 GeV.

Desde el punto de vista de la generación de nuevas partículas, son especialmente eficaces las *instalaciones con haces de choque (colláideres)*, en las cuales chocan partículas cuyo impulso total es nulo (las partículas de haces distintos tienen impulsos de igual módulo pero dirigidos en sentidos opuestos). En virtud de eso, toda la energía cinética inicial puede transformarse en energía en reposo de las partículas que se generan, cuyo impulso

total también es nulo. La energía E de un acelerador ordinario (con blanco fijo), equivalente a la de un acelerador con haces de choque cuya energía sea E_c , se calcula por la fórmula

$$E \approx \frac{2E_c^2}{mc^2}.$$

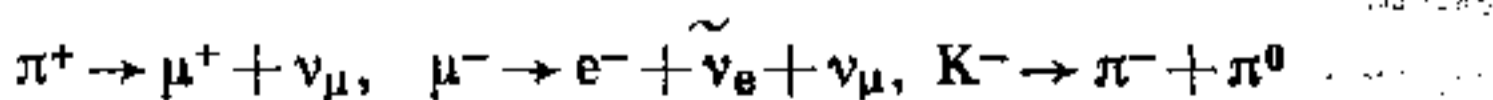
Los haces de choque se realizaron por vez primera en la URSS en 1967. En las instalaciones modernas de este tipo chocan protones y antiprotones con energías $E_c = 270$ GeV y electrones y positrones con energías $E_c = 19$ GeV. En el último caso la energía E de un acelerador ordinario equivalente sería igual, aproximadamente, a $1,5 \cdot 10^{15}$ eV, lo que ya es mucho mayor que la energía media de las partículas cósmicas.

6°. Todos los procesos en los cuales participan partículas elementales están condicionados por las interacciones entre ellas. En la actualidad se distinguen cuatro tipos de *interacciones fundamentales* *): fuerte, electromagnética, débil y gravitatoria.

La *interacción fuerte* es propia de las partículas pesadas a partir de los piones **). Su manifestación más conocida son las fuerzas nucleares que condicionan la existencia de los núcleos atómicos. Ejemplos de procesos debidos a las interacciones fuertes son: la reacción de generación del antiprotón (p. 2°) y las reacciones en que se forman partículas extrañas (p. 4°).

En la *interacción electromagnética* sólo participan las partículas que tienen carga eléctrica y los fotones. La manifestación más conocida de esta interacción son las fuerzas coulombianas (III.1.2.1°) que condicionan la existencia de los átomos. Precisamente a la interacción electromagnética se debe la inmensa mayoría de las propiedades macroscópicas de la sustancia. Ella es la que rige los procesos de generación y aniquilación de los pares electrón-positrón (VIII.2.1.7°), los procesos de dispersión elástica de los electrones por los núcleos atómicos, por los protones y entre sí, etc.

La *interacción débil* es característica de todas las partículas, menos de los fotones. Su manifestación más conocida es la transmutación beta de los núcleos atómicos (VIII.1.6). La misma también condiciona la inestabilidad de muchas partículas elementales. Por ejemplo, las desintegraciones



*) Véase, sin embargo, (VIII.2.4.14°).

***) A excepción del leptón pesado τ (VIII.2.3.2°).

se deben precisamente a las interacciones débiles. Durante los últimos años se están estudiando intensamente los procesos débiles de dispersión del neutrino y del antineutrino por los protones y electrones.

La interacción gravitatoria es propia de los cuerpos del Universo y se manifiesta en la forma de las fuerzas de atracción universal (I.6.1.1°). Estas fuerzas condicionan la existencia de las estrellas, de los sistemas planetarios, etc. La interacción gravitatoria es extremadamente débil (véase la tabla VIII.2.1), y en el mundo de las partículas elementales con energías ordinarias no desempeña papel alguno *).

7°. A nivel semifenomenológico las interacciones fundamentales se diferencian por sus intensidades, radios de acción y tiempos característicos (tabla VIII.2.1), así como por las leyes de conservación, propias de cada una (VIII.2.3). Desde el punto de vista dinámico, dichas interacciones se distinguen por los tipos de mecanismos de intercambio (VIII.2.4).

Tabla VIII.2.1.

Interacción	Mecanismo*)	Intensidad	Radio, m	Tiempo característico, s
Fuerte	intercambio de gluones	~ 1	$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{-23}$
Electromagnética	intercambio de fotones	1/137	∞	$\sim 10^{-20}$
Débil	intercambio de bosones intermedios	$\sim 10^{-10}$	10^{-18}	$\sim 10^{-12}$
Gravitatoria	intercambio de gravitones	$\sim 10^{-38}$	∞	?

*) véase VIII.2.4.

8°. La intensidad de una interacción dada se caracteriza por una magnitud adimensional (constante de enlace) construida con las constantes fundamentales y la «carga» correspondiente. Para la interacción electromagnética, esta magnitud es la constante de estructura fina $\alpha \equiv e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \approx 1/137$. En la tabla VIII.2.1

*) En el mundo de las partículas elementales, la gravitación se hace importante para energías $E \sim 10^{26}$ eV, las cuales existen cuando las distancias son $R \sim 10^{-35}$ m (1).

puede verse que entre las interacciones que tienen importancia en el mundo de las partículas elementales, la fuerte es la más intensa y la débil, la menos intensa, de ahí sus nombres. La interacción gravitatoria tiene una intensidad extremadamente pequeña (p. 6°) y sólo en el Universo desempeña un papel importante porque las masas de los objetos astronómicos son colosales*.

Las fuerzas electromagnéticas y gravitatorias son fuerzas de acción lejana, ya que al crecer la distancia, esas fuerzas disminuyen lentamente según una ley potencial (no exponencial) (III.1.2.1° y I.6.1.1°). La interacción fuerte se manifiesta solamente a pequeñas distancias $R \sim 10^{-15}$ m (VIII.1.3.2°); el radio de acción de la interacción débil es aún menor **).

El concepto de *tiempo característico* es muy convencional. Empíricamente se puede introducir como el tiempo mínimo de vida de las partículas expuestas a las desintegraciones a expensas de una interacción dada. Por ejemplo, el tiempo característico de la interacción fuerte coincide, en orden de magnitud, con la vida media de las resonancias, que son las partículas menos estables sometidas a desintegraciones fuertes (VIII.2.1.5°). Además, este tiempo puede obtenerse dividiendo la distancia característica (radio de la interacción fuerte) por la velocidad característica (velocidad de la luz). Las razones de los tiempos de interacción característicos coinciden aproximadamente con las razones inversas de sus intensidades.

§ VIII.2.3. Leptones y hadrones

1°. Al nivel macroscópico que describe la física clásica, la materia existe en dos formas: en forma de substancia y en forma de campo (III.2.1.1°). La substancia está formada por moléculas, las moléculas por átomos, y cada átomo por una envoltura electrónica y un núcleo integrado por nucleones (protones y neutrones). Los electrones son representantes típicos de la llamada clase de los leptones, y los nucleones, de la clase de los hadrones. Los fotones son cuantos de campo electromagnéticos y representantes típicos de la clase de los portadores de interacción (VIII.2.4). En general, la sistematización esencial de las partículas elemen-

*) Y porque el radio de la interacción gravitatoria es infinito.

***) Los radios de interacción están relacionados con las masas que transportan sus partículas (VIII.2.4.8°).

tales se basa en sus relaciones con las interacciones fundamentales.

2°. Se llaman *leptones* las partículas elementales que no participan en la interacción fuerte (VIII.2.2.6°) y tienen un espín $J = 1/2$ (III.12.1.3° y VIII.2.1.6°), es decir, que son fermiones (VII.2.2.4° y VIII.2.1.6°). Sus características principales se dan en la tabla VIII.2.2.

Tabla VIII.2.2

Familia de leptones	Tipo de partícula	Carga leptónica			Espín, \hbar	Masa, MeV	Vida media, s
		L_e	L_μ	L_τ			
Doblete electrónico E	e^-	+1	0	0	1/2	0,511	∞
	ν_e	+1	0	0	1/2	$< 46 \cdot 10^{-6}$	∞
Doblete muónico M	μ^-	0	+1	0	1/2	105,66	$2,2 \cdot 10^{-6}$
	ν_μ	0	+1	0	1/2	$< 0,50$	∞
Doblete taónico T	μ^-	0	0	+1	1/2	1784	$3,5 \cdot 10^{-13}$
	ν_τ	0	0	+1	1/2	< 164	$?$

3°. Se conocen tres leptones cargados que participan en las interacciones electromagnética y débil: el *electrón* e^- , el *muon* *) μ^- y el *taón* τ^- . A cada uno de ellos corresponde una partícula neutra que sólo participa en la interacción débil: el *neutrino electrónico* ν_e , el *neutrino muónico* ν_μ y el *neutrino taónico* ν_τ . Además, cada leptón tiene su antileptón (VIII.2.1.7°). Los distintos tipos de neutrino se diferencian por el carácter de las transmutaciones. Por ejemplo, las reacciones

$\nu_e + n \rightarrow p + e^-$ y $\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$

son permitidas, mientras que las

$\nu_e + n \rightarrow p + \mu^-$ y $\nu_\mu + n \rightarrow p + e^-$

*) La antigua denominación de mesón μ es incorrecta desde el punto de vista moderno, ya que μ^- no pertenece a la clase de los mesones (p.6°).

son prohibidas. Precisamente estudiando estos procesos, en 1962 quedó demostrada experimentalmente la diferencia entre los neutrinos muónicos ν_μ que se generan en las desintegraciones de mesones π^+ (VIII.2.2.6^o) y los neutrinos electrónicos que participan, por ejemplo, en las transmutaciones β de los núcleos (VIII.1.6).

Así, pues, se conocen tres familias («generaciones») de leptones, en cada una de las cuales figura una partícula con carga y un neutrino: el *doblete electrónico* $E = (e^-, \nu_e)$, el *doblete muónico* $M = (\mu^-, \nu_\mu)$ y el *doblete taónico* $T = (\tau^-, \nu_\tau)$. A todos los leptones se les atribuye la carga leptónica $L = +1$; para los antileptones $L = -1$. La carga leptónica se divide en tres componentes: $L = L_e + L_\mu + L_\tau$, donde L_e es la *carga electrónica* *), L_μ , la *carga muónica* y L_τ , la *carga taónica*. Los valores de estos números cuánticos para los leptones se dan en la tabla VIII.2.2, y para los antileptones estas cargas tienen signos contrarios.

Por ahora se considera que la carga leptónica y sus distintas componentes se conservan en todas las interacciones. La conservación de L se debe, en particular, a que en las desintegraciones β_+ y en las capturas K participan neutrinos ν_e , y en las desintegraciones β_- el antineutrino $\tilde{\nu}_e$ (VIII.1.6). Las leyes de conservación de L_e y L_μ permiten las dos primeras reacciones y prohíben las dos últimas. No obstante, las comprobaciones experimentales de las leyes de conservación de la carga leptónica y de sus componentes dan una exactitud no muy elevada.

4^o. Hasta hace relativamente poco tiempo se suponía que los neutrinos no tenían masa (en la tabla VIII.2.2 se indican los límites experimentales para los valores de sus masas). En 1980 fue establecido el nivel inferior de la masa del neutrino: $m_\nu > > 14$ eV. Pero debido a la extraordinaria complicación de las mediciones y de la elaboración de sus resultados, esta deducción no ha sido confirmada aún por otros experimentos. El hecho de que el neutrino tenga masa distinta de cero conduce a consecuencias físicas (p. 4^o) e incluso cosmológicas muy importantes **). En particular, si $m_\nu \neq 0$ y las leyes de conservación de las cargas leptónicas se infringen en cierto grado (p. 3^o), serán posi-

*) No debe confundirse con la carga eléctrica.

***) En particular, si $m \neq 0$, no se excluye la posibilidad de que de nuestro Universo sea cerrado, es decir, finito (no infinito) y que su período actual de expansión sea sustituido por compresión.

Tabla VIII.2.3*)

Familia de hadrones	Partículas	Espín, \hbar	Masa, MeV	Vida media, s	Composición cuárcica**)
Piones π ($T = 1, S = 0, C = 0$)	π^\pm	0	139,57	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\sim \bar{u}d$ ($d\bar{u}$)
	π^0		134,96	$0,8 \cdot 10^{-16}$	$\sim uu, \bar{d}\bar{d}$
	Mesón eta η $T = 0, S = 0, C = 0$)	η^0	548,8	$0,7 \cdot 10^{-16}$	$\sim uu, \bar{d}\bar{d}$ $\sim ss$
Kaones $K^{**})$ ($T = 1/2, S = +1, C = 0$)	K^+		493,67	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$\sim us$
	K^0		497,7	$\begin{cases} K_S^0: 0,9 \cdot 10^{-10} \\ K_L^0: 5,2 \cdot 10^{-8} \end{cases}$	$\sim ds$
Mesones D ($T = 1/2, S = 0, C = +1$)	D^+		1869	$9 \cdot 10^{-12}$	$\sim cd$
	D^0		1865	$5 \cdot 10^{-12}$	$\sim cu$
Mesón F ($T = 0, S = +1, C = +1$)	F^+		1971	$2 \cdot 10^{-12}$	$\sim cs$
Nucleones N ($T = 1/2, S = 0, C = 0$)	p n	1/2	938,26 939,57	$> 10^{32}$ años 898 ± 16	uud udd

Mesones ($B = 0$)

«Ordina-
rios»
($S=C=0$)

Con «encantos»
($C \neq 0$)

Estranos
($S \neq 0$)

«Ordinarios»
($S=C=0$)

Bariónes ($B = +1$)		Extraños ($S \neq 0$)		Con \bar{c} en cantos ($C = 0$)	
Hiperón lambda Λ ($T = 0, S = -1, C = 0$)	Λ^0	1/2	1115, 6	$2, 6 \cdot 10^{-10}$	uds
Hiperones sigma Σ ($T = 1, S = -1, C = 0$)	Σ^+		1189, 4	$0, 8 \cdot 10^{-10}$	uus
	Σ^0		1192, 5	$5 \cdot 10^{-10}$	uds
	Σ^-		1197, 3	$1, 5 \cdot 10^{-10}$	dds
Hiperones xi Ξ ($T = 1/2, S = 2, C = 0$)	Ξ^0	1/2	1315	$2, 9 \cdot 10^{-10}$	uus
	Ξ^-		1321, 3	$1, 6 \cdot 10^{-10}$	dds
Hiperón omega Ω ($T = 0, S = -3, C = 0$)	Ω^-	3/2	1672, 5	$0, 8 \cdot 10^{-10}$	sss
Hiperón lambda ce Λ_c ($T = 0, S = 0, C = +1$)	Λ_c^+	1/2	2282	$(2-3) \cdot 10^{-11}$	udc

*) En la tabla no se han incluido las resonancias y las antipartículas (excepto π^-).

***) Véase (VIII.2.4.5°).

****) Los kaones neutros se desintegran de los estados K_S^0 y K_L^0 , que son superposiciones de estados de la partícula K^0 y la antipartícula \bar{K}^0 .

bles las *oscilaciones neutrónicas*, es decir, las transmutaciones espontáneas $\nu_e \rightleftharpoons \bar{\nu}_e$, $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\nu$, etc.

5°. Se llaman *hadrones* las partículas elementales que pueden participar y participan realmente en la interacción fuerte; todos ellos toman también parte en las interacciones electromagnética y débil (así como en la gravitatoria) (III V.2.2.6°). La clasificación de los hadrones y sus características fundamentales se indican en la tabla VIII.2.3.

6°. Se distinguen los hadrones *estables* (mejor dicho, *metaestables*), con vida media $\tau \gg 10^{-23}$ s, y las *resonancias* (VIII.2.1.5°) cuyas vidas medias $\tau \sim 10^{-24} - 10^{-23}$ s coinciden, en orden de magnitud, con el tiempo característico de la interacción fuerte (tabla VIII.2.1). Las partículas estables se desintegran a expensas de la interacción electromagnética o débil, y las resonancias, a costa de la interacción fuerte. Esta última propiedad es la principal para las resonancias y puede ser la más adecuada para determinarlas. El grupo de las resonancias es el más numeroso: comprende varios centenares de partículas, las cuales no han sido incluidas en la tabla VIII.2.3.

7°. Los hadrones estables, dotados de espines enteros, es decir, que son bosones (VII.2.2.1° y VIII.2.1.6°), se llaman *mesones*; los hadrones con espines semienteros, o sea, los fermiones (VII.2.2.4° y VIII.2.1.6°), reciben el nombre de *bariones*. Análogamente se definen las *resonancias mesónicas* y las *resonancias bariónicas*. A los bariones y a las resonancias bariónicas se les atribuye la *carga bariónica* $B = +1$, y a los antibariones y a sus resonancias, la carga bariónica $B = -1$. Todas las demás partículas tienen $B = 0$ (compárese con el p. 3°).

8°. La clase de los hadrones se divide en *isomultipletes*, pequeñas familias cuyos miembros son idénticos respecto a la interacción fuerte y todas sus diferencias las adquieren a expensas de la interacción electromagnética (y, en parte, de la débil). El indicio exterior más característico de la pertenencia de unas partículas a un isomultiplete es la igualdad aproximada de sus masas para valores distintos de la carga eléctrica. Un ejemplo típico de isomultiplete lo da el isodoblete nucleónico N, que comprende el protón p y el neutrón n. La identidad del protón y el neutrón respecto de la interacción fuerte tiene su expresión en la propiedad de la independencia de la carga de las fuerzas nucleares (VIII.1.3.3°).

Al isomultiplete en conjunto se le atribuye el *isospín* T , que determina el número de sus miembros N por la fórmula $N = 2T + 1$. Los miembros del isomultiplete se diferencian entre

sí por los valores de las *proyecciones del isospín* T_3 , que varían desde $-T$ hasta T de unidad en unidad en el orden creciente de la carga eléctrica. Por ejemplo, para el nucleón $N = 2$, y por lo tanto, $T = 1/2$, el neutrón tendrá $T_3 = -1/2$ y el protón, $T_3 = +1/2$.

9°. Inicialmente, de los hadrones sólo se conocían los nucleones y los piones. Las cargas eléctricas de estas partículas «ordinarias» se pueden calcular por la simple fórmula $q = T_3 + B/2$. En la década de los años 50 se descubrieron las *partículas extrañas* (VIII.2.1.5°), a las cuales se les atribuyó un nuevo número cuántico, la *extrañeza* S . Ésta se introduce de manera que las cargas eléctricas de las partículas extrañas satisfagan la *relación de Gell-Mann — Nishijima*

$$q = T_3 + \frac{1}{2} (B + S).$$

Después de descubrir, en los años 70, las partículas con «encanto», esta fórmula requiso su ulterior generalización:

$$q = T_3 + \frac{1}{2} (B + S + C),$$

donde C es el «encanto» (*charm*). Existen indicios experimentales de existencia de partículas con «hechizo», y la teoría predice la existencia de partículas «verdaderas». Las generalizaciones de la última fórmula son evidentes para ellas.

10°. El sentido de los números cuánticos introducidos aquí y antes es que éstos se conservan en determinadas clases de transmutaciones de las partículas (VIII.2.2.2°). Las interacciones fundamentales se distinguen no sólo por las características que se dan en la tabla VIII.2.1., sino también por las leyes de conservación propias de ellas (VIII.2.2.7°). Cuanto más intensa es la interacción, mayor es su simetría, es decir, tanto más características de ella son las leyes de conservación.

a) *En todas las interacciones sólo se conserva la energía y el impulso* (I.5.6.2°, I.5.7.2°), el momento de impulso (I.4.4.1°) y la carga eléctrica (III.1.1.3°). Hasta ahora se considera que esta propiedad la tienen también las cargas leptónica (p. 3°) y bariónica (p. 7°) *). De la ley de conservación de la energía se deduce, en particular, la condición necesaria para las desintegraciones (VIII.2.2.2°). Junto con la ley de conservación de la

*) Véase, no obstante, (VIII.2.4.15°).

carga eléctrica, esa condición determina la estabilidad absoluta del electrón *), y junto con la ley de conservación de la carga bariónica, la estabilidad absoluta del protón **).

b) La interacción *fuerte* es la más simétrica. En los procesos que ella condiciona se conserva también el espín y su proyección (p. 8°), la extrañeza, el «encanto» (p. 9°) y muchos otros números cuánticos. La conservación de T y T_3 equivale a la independencia de la carga de interacción fuerte (VIII.1.3.3°). La conservación de S explica, en particular, por qué en los procesos de colisión de partículas «ordinarias», las partículas extrañas siempre se generan por pares (VIII.2.2.4°).

c) La interacción *débil* es menos simétrica. De ella sólo son características las leyes universales de conservación (a). Precisamente en virtud de no conservarse S (C), las partículas extrañas (y con «encanto») se pueden desintegrar individualmente, transformándose en partículas «ordinarias».

...
...
...

§ VIII.2.4. Partículas fundamentales

1°. Hasta muy recientemente el nivel de las partículas elementales (VIII.2.1.1°) se consideraba único, y los leptones, hadrones y los transportadores de interacciones (VIII.2.3.1°) se trataban sobre una base más o menos igual. En la actualidad este nivel se ha desdoblado en los subniveles de *hadrones* y de *partículas fundamentales*. Los primeros se consideran compuestos, y las segundas son partículas elementales verdaderas. Como resultado de esto se ha logrado unificar y simplificar en alto grado la imagen de la estructura de la materia y se ha abierto la posibilidad de describir todas las partículas e interacciones sobre cierta base única. Pero hay que subrayar que el problema de la verdadera elementalidad de las partículas fundamentales es extraordinariamente complejo y aún no ha sido resuelto hasta el fin.

2°. Los leptones (tabla VIII.2.2) se consideran *partículas fundamentales*. En primer lugar, son sólo seis; en segundo, son totalmente estables o tienen una vida larga a escala nuclear; y en tercero, los leptones se comportan como objetos puntuales. Así, el electrón no revela tener dimensiones ni estructura inter-

*) El electrón es la más ligera de las partículas con carga eléctrica.

na, incluso con energías ultraaltas $E \approx 40$ GeV, es decir, hasta distancias $R \approx 2 \cdot 10^{-18}$ m *) (VIII.2.1.2°).

3°. Según los criterios modernos, los *hadrones* (tabla VIII.2.3) son *partículas compuestas*. En primer lugar, son muchos, varios cientos. La mayoría de ellos son resonancias, partículas extraordinariamente inestables (VIII.2.3.6°). Y lo que es más importante, en los hadrones se pone de manifiesto la estructura interna. De los resultados de los experimentos de dispersión elástica de electrones en nucleones (VIII.2.2.2°) se deduce que los radios del protón y del neutrón **) son iguales aproximadamente a $0,8 \cdot 10^{-15}$ m y que la carga eléctrica y el momento magnético están distribuidos en ellos suavemente, decreciendo desde el centro hacia la periferia según una ley exponencial. Además, los experimentos de dispersión inelástica de electrones de altas energías en nucleones han puesto de manifiesto que el protón y el neutrón tienen estructura granular.

Tabla VIII.2.4

Cuarque	Símbolo	J	B	T	T_3	S	C	q
Superior (up)	u	$1/2$	$+1/3$	$1/2$	$+1/2$	0	0	$+2/3$
Inferior (down)	d	$1/2$	$+1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	0	$-1/3$
Extraño (strange)	s	$1/2$	$+1/3$	0	0	-1	0	$-1/3$
Con encanto (charm)	c	$1/2$	$+1/3$	0	0	0	+1	$+2/3$

4°. Se considera que todos los hadrones están constituidos por *quarks* o *cuarques*, *partículas fundamentales* con carga fraccionaria. Se supone también que existen seis clases o «aromas» de cuarques. Lo mismo que los leptones (VIII.2.3.3°), éstos forman tres dobletes o *generaciones*: (u, d), (c, s) y (t, b), de manera que tiene lugar una *simetría cuarque-leptón* bastante profunda desde el punto de vista teórico. A los tres dobletes de antileptones corresponden tres generaciones de anticuarques. Los valores de los números cuánticos fundamentales de los cuarques de las dos primeras generaciones se dan en la tabla VIII.2.4.

*) Estos resultados se obtuvieron en 1982 a base de experimentos con haces de choque electrón-positrón.

**) Se trata de los radios cuadráticos medios de distribución de la carga eléctrica y del momento magnético en los nucleones.

5°. Cada mesón M consta de un cuarque q y de un anticuarque \bar{q} ; cada barión B , de tres cuarques: $M = q\bar{q}$, $B = qqq$ (véase la tabla VIII.2.3). En la composición de los hadrones ordinarios sólo entran los cuarques u y d . En los hadrones extraños se incluye también uno o varios cuarques s . En 1974 fue descubierto el mesón J/ψ , interpretado como un estado compuesto de pares $c-\bar{c}$; más tarde se han registrado mesones con encanto manifiesto ($C \neq 0$): $D^0 = c\bar{u}$, $F^+ = \bar{c}s$ y otros (VIII.2.1.5° y tabla VIII.2.3). En 1977 se descubrió el mesón ipsilón Y (VIII.2.1.5°) que posee «hechizo latente»: $Y = b\bar{b}$, y prácticamente también se ha identificado el mesón B con «hechizo manifiesto». Aún no se han registrado hadrones con cuarque t .

6°. Para construir un hiperón Ω^- ($S = -3$, $J = 3/2$) se necesitan tres cuarques s ($S = -1$, $J = 1/2$) con espines paralelos, lo que contradice el principio de Pauli (VI.2.3.1°). Para resolver esta dificultad, a los cuarques se les atribuye un número cuántico adicional que toma tres valores. Dicho número cuántico se llama «color» y tiene los valores siguientes: R (red, rojo), G (green, verde) y B (blue, azul). A los anticuarques se les atribuyen los «anticolores» \bar{R} , \bar{G} y \bar{B} , que se pueden considerar como complementarios de los fundamentales R , G y B *).

Los mesones pueden suponerse compuestos de un cuarque y un anticuarque representados con todos sus colores (por ejemplo, en la forma simbólica de escritura, $\pi^+ = u_R\bar{d}_R + u_G\bar{d}_G + u_B\bar{d}_B$), y los bariones se construyen con tres cuarques de colores distintos (por ejemplo, $\Omega^- = s_Rs_Gs_B$), de manera que el principio de Pauli no se infringe. De esta forma, los hadrones que se observan en realidad son *blancos*, o partículas sin color. Esta misma propiedad la tienen los leptones, sólo que en ellos, como partículas fundamentales, no hay ni siquiera color «latente».

7°. Los cuarques se han buscado intensamente, pero sin éxito. Hoy se admite generalmente el punto de vista según el cual los cuarques, al ser objetos de color, no pueden existir, por principio, en estado libre y solamente entran en la composición de las partículas blancas, es decir, de los hadrones.

*) Está claro que este «color» nada tiene que ver con la fisiología de la vista, pero la terminología adoptada es muy cómoda.

La fundamentación teórica del «confinamiento» del color se encuentra por ahora en estado de elaboración. Sin embargo, no cabe duda de que el modelo de los cuarques es correcto en su conjunto. Este modelo ha dado la posibilidad de poner en claro toda la diversidad de formas de los hadrones y de sus propiedades, y muchas de sus predicciones no triviales han sido confirmadas experimentalmente.

8°. La tercera clase de partículas fundamentales (además de los leptones y hadrones) la constituyen los *portadores de las interacciones*. Uno de los mayores éxitos de la física en la década de los 70 fue el establecimiento de la unidad de los mecanismos de las interacciones fundamentales. Sus *actos elementales* son procesos de emisión y absorción, por una partícula dada, de cierta otra partícula que es precisamente la que determina el tipo de interacción. Las fuerzas que actúan entre dos partículas se interpretan como el resultado de su intercambio con una partícula intermediaria (compárese con VIII.1.3.6°), la cual recibe el nombre de portador de la interacción. De este modo, los mecanismos de todas las interacciones fundamentales son de *intercambio*. Sus portadores concretos, junto con las características fundamentales, se indican en la tabla VIII.2.5 (véase también la tabla VIII.2.1). El radio de una interacción dada (tabla VIII.2.1) está ligado con la masa de su portador por medio de una relación del tipo (VIII.1.3.6°): $R \sim \hbar/mc$ *).

Tabla VIII.2.5

Interacción	Portadores	Símbolo	J, \hbar	Masa, GeV	Aroma	Color
Fuerte	8 gluones	g_i	1	0	-	+ ^{3/2}
Electromagnética	1 fotón	γ		0	-	-
Débil	3 bosones intermedios	W^\pm	1	≈ 80	+	-
		Z^0	1	≈ 90		
Gravitatoria	1 gravitón	G	2	0	-	-

9°. El portador de la interacción electromagnética es el fotón γ , neutro y sin masa. La probabilidad de la emisión y absor-

*) Las interacciones fuertes constituyen una excepción, ya que, de un modo semejante a los cuarques, sus portadores gluones están sometidos a «confinamiento» (p. p. 7° y 9°).

ción de un fotón por una partícula viene determinada por su carga eléctrica que, por eso, sirve de medida de la intensidad de la interacción electromagnética (VIII.2.2.8°). Como $m_\gamma = 0$, el radio de interacción electromagnética es infinitamente grande (VIII.2.2.8°, p. 8°). En ésta participan todos los cuarques y leptones con carga, así como el propio fotón. Al emitir o absorber un fotón, el aroma y el color de las partículas fundamentales no varían. Las predicciones de la teoría de la interacción electromagnética — *electrodinámica cuántica* — coinciden con los resultados de las mediciones con una exactitud de hasta diez cifras significativas(!) .

10°. Los portadores de la interacción fuerte son ocho *gluones* g_i , eléctricamente neutros, carentes de masa y portadores de color y anticolor. Al emitir o absorber un gluón, el cuarque cambia de color, pero su aroma no varía. Por ejemplo, un cuarque u_R puede emitir un gluón $R\tilde{G}$ y transformarse en u_G , y el cuarque u_G puede absorber este gluón y transformarse en u_R . De este modo, el análogo de la carga eléctrica en la interacción fuerte es el *color* *), en virtud de lo cual, en ella pueden participar directamente sólo cuarques, pero no leptones. Los propios gluones sólo están sujetos a la interacción fuerte (y prácticamente a la gravitatoria, poco importante). La interacción que se observa entre los hadrones blancos, en particular las fuerzas nucleares, es el resultado de que tienen color «latente». En los procesos de interacción fuerte, los aromas de los cuarques no varían, lo que explica de inmediato la conservación de sus números cuánticos del tipo de la extrañeza (VIII.2.3.9°). La teoría moderna de la interacción fuerte es la *cromodinámica cuántica*, cuyas bases han sido sentadas, pero que aún no está concluida. Esta teoría predice la interacción de los gluones entre sí, que, por lo visto, conduce al fenómeno de confinamiento (p. 7°).

11°. Los portadores de interacción débil son los *bosones intermediarios* W^+ , W^- , y Z^0 que poseen carga eléctrica y grandes masas (tabla VIII.2.5). En virtud de esta última circunstancia, el radio de interacción débil es muy pequeño (tabla VIII.2.1 y p. 8°). Los bosones intermediarios pueden ser emitidos y absorbidos tanto por los leptones como por los cuarques, por eso en la interacción débil participan prácticamente todas las partículas conocidas (menos el fotón y los gluones). Los propios bosones intermediarios toman parte en las interacciones débil y electro-

*) Aunque inicialmente sólo se introdujo para que no se infringiera el principio de Pauli (p. 6°).

magnética (y en la gravitatoria), pero no están sujetos a la interacción fuerte. Su intercambio varía el aroma, pero no el color de las partículas fundamentales. La teoría adecuada de la interacción débil ha sido recientemente creada y muchas de sus predicciones ya han sido confirmadas por la experiencia. Los bosones intermedios, primero los W^\pm y luego el Z^0 , fueron registrados en 1983 en los haces de choque protón-antiprotón con energías de 270 GeV.

12°. El portador de interacción gravitatoria es el *gravitón* G, neutro y sin masa. Esta interacción es universal: en ella participan todas las partículas. La teoría cuántica de gravitación sólo empieza a crearse. El registro experimental de los gravitones es cuestión de un plazo aún indeterminado *).

13°. Así pues, en la actualidad empieza a bosquejarse una imagen armónica de la estructura de la materia. Sus elementos componentes son los cuarques de seis tipos (p.p. 3° al 7°), y los leptones, también de seis tipos (p. 2°), cuyas interacciones se producen por intercambio de los portadores correspondientes (p. p. 8° al 13°). La interacción electromagnética no varía ni el aroma ni el color de las partículas fundamentales; la interacción fuerte hace que varíe el color, pero no el aroma, y la interacción débil varía el aroma, pero no el color (tabla VIII.2.5).

14°. La revelación del mecanismo general (de intercambio) de todas las interacciones fundamentales (p. 8°) permite esperar que sea posible construir teorías unificadas. Prácticamente se puede considerar acabada la teoría unificada de las interacciones electromagnética y débil que intervienen como manifestaciones distintas de una interacción *electrodébil*. Se han hecho intentos bastante exitosos de «gran unificación» de las interacciones electromagnética, débil y fuerte en una interacción *electro-nuclear*. También se han conseguido algunos éxitos en la descripción unificada de las cuatro interacciones fundamentales.

15°. Todos los esquemas de «gran unificación» incluyen el intercambio de partículas extraordinariamente pesadas ($m \sim \sim 10^{16}$ GeV) que conduce a la variación tanto del color como del aroma (compárese con el p. 13°). Como resultado, los cuarques y los leptones pueden transformarse unos en otros y la carga bariónica deja de conservarse rigurosamente (VIII.2.3.10°). Una consecuencia de eso es la extremadamente pequeña *inestabilidad del protón* que puede desintegrarse, por ejemplo, según el esquema $p \rightarrow \pi^0 + e^+$, con una vida media $\tau_p = 10^{30 \pm 3}$ años.

*) Hasta ahora no se han podido detectar ni siquiera las ondas gravitatorias.

El sistema de unidades de una magnitud física determinada, es el conjunto de unidades pertenecientes a un sistema determinado de magnitudes, formado de acuerdo con las reglas establecidas. Se denominan *unidades fundamentales* de un sistema de unidades dado, las unidades de varias magnitudes físicas heterogéneas elegidas arbitrariamente al construir dicho sistema. A las respectivas magnitudes físicas se les da el nombre de *magnitudes fundamentales* de un sistema dado. Un sistema de unidades se llama *absoluto* si sus magnitudes físicas fundamentales son la longitud, la masa y el tiempo.

Se denominan *unidades derivadas* las que se establecen por medio de otras unidades del sistema basándose en las leyes físicas que expresan la relación mutua entre las correspondientes magnitudes físicas.

Se da el nombre de *dimensión de una magnitud física* a la expresión que caracteriza la relación entre la unidad de esta magnitud física y las unidades fundamentales de un sistema dado. Esta expresión es un monomio en forma de producto de los símbolos de las unidades fundamentales, con los exponentes que les corresponden (enteros o fraccionarios, positivos o negativos). Una magnitud física se dice que es *adimensional* si en la expresión de su dimensión todas las unidades fundamentales figuran con exponente nulo. El valor numérico de una magnitud adimensional no depende del sistema de unidades que se elija.

Los factores y prefijos para formar las unidades decimales múltiples y divisoras y sus nombres, se dan en la tabla IX.1.

§ IX.1. Sistemas de unidades de las magnitudes físicas

1°. Se llama *unidad de una magnitud física* determinada, la magnitud física elegida convencionalmente que tiene el mismo sentido físico que la considerada. Recibe el nombre de *sistema de unidades* el conjunto de unidades pertenecientes a un sistema determinado de magnitudes, formado de acuerdo con las reglas establecidas. Se denominan *unidades fundamentales* de un sistema de unidades dado, las unidades de varias magnitudes físicas heterogéneas elegidas arbitrariamente al construir dicho sistema. A las respectivas magnitudes físicas se les da el nombre de *magnitudes fundamentales* de un sistema dado. Un sistema de unidades se llama *absoluto* si sus magnitudes físicas fundamentales son la longitud, la masa y el tiempo.

Se denominan *unidades derivadas* las que se establecen por medio de otras unidades del sistema basándose en las leyes físicas que expresan la relación mutua entre las correspondientes magnitudes físicas.

2°. Se da el nombre de *dimensión de una magnitud física* a la expresión que caracteriza la relación entre la unidad de esta magnitud física y las unidades fundamentales de un sistema dado. Esta expresión es un monomio en forma de producto de los símbolos de las unidades fundamentales, con los exponentes que les corresponden (enteros o fraccionarios, positivos o negativos). Una magnitud física se dice que es *adimensional* si en la expresión de su dimensión todas las unidades fundamentales figuran con exponente nulo. El valor numérico de una magnitud adimensional no depende del sistema de unidades que se elija.

3°. Los factores y prefijos para formar las unidades decimales múltiples y divisoras y sus nombres, se dan en la tabla IX.1.

Tabla IX.1

Factor	Prefijo		Factor	Prefijo	
	Nombre	Símbolo		Nombre	Símbolo
10^{18}	exa	E	10^{-1}	(deci)	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	(centi)	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^2	(hecto)	h	10^{-15}	femto	f
10^1	(deca)	da (o D)	10^{-18}	atto	a

Observación. Entre paréntesis se indican los prefijos que sólo es permite utilizar en aquellas unidades múltiples y divisoras que ya están muy extendidas (por ejemplo, la hectárea, el decalitro, el decímetro, el centímetro).

Tabla IX.2a

Unidades fundamentales SI

Magnitud		Unidad SI		
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo	Definición
Longitud	L	metro	m	El metro es la unidad de longitud, igual a 1650763,73 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de criptón 86.
Masa	M	kilogramo	kg	El kilogramo es la unidad de masa, igual a la masa del prototipo de kilogramo internacional
Tiempo	T	segundo	s	El segundo es la unidad de tiempo, igual a 9 192 631 770 períodos de radiación correspondiente a la transición entre dos niveles superfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133

Tabla IX.2a (continuación)

Magnitud		Unidad SI		
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo	Definición
Intensidad de corriente eléctrica	I	amperio	A	El <i>amperio</i> es la intensidad de corriente constante que, pasando por dos conductores paralelos rectilíneos, de longitud infinita y área de sección circular despreciable, situados a 1 m de distancia uno de otro en el vacío, produce entre ambos una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ N por cada metro de longitud.
Temperatura termodinámica	θ	kelvin	K	El <i>kelvin</i> es la unidad de temperatura termodinámica, igual a la $1/273,16$ parte de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.
Cantidad de sustancia	N	mol	mol	El <i>mol</i> es la unidad de cantidad de sustancia, igual a la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantos elementos estructurales (átomos, moléculas, iones, electrones y otras partículas o grupos especificados de partículas) como átomos contiene una masa de 0,012 kg de carbono 12.
Intensidad luminosa	J	candela	cd	<i>Candela</i> es la intensidad luminosa que emite una superficie de $1/600000$ m ² de sección de un radiador perfecto (cuerpo negro) en dirección perpendicular a esta sección cuando la temperatura del radiador es igual a la de solidificación del platino a la presión de 101325 Pa.

Tabla IX.2b

Unidades complementarias SI

Magnitud		Unidad SI		
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo	Definición
Ángulo plano	—	radián	rad	<i>Radián</i> es el ángulo entre dos radios de la circunferencia, la longitud del arco entre las cuales es igual al radio.

Tabla IX.2b (continuación)

Magnitud		Unidad SI		
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo	Definición
Ángulo sólido	—	estereorradián	sr	Estereorradián es el ángulo sólido con vértice en el centro de una esfera que intercepta, sobre la superficie de la esfera, un área equivalente a la de un cuadrado de lado igual al radio de esta esfera.

4°. En la URSS se utiliza preferiblemente el Sistema Internacional de unidades (SI), en el cual se utilizan 7 unidades fundamentales: el metro, el kilogramo, el segundo, el amperio, el kelvin, el mol y la candela; y 2 unidades adicionales: el radián y el estereorradián. Las definiciones y los símbolos de estas unidades se dan en las tablas IX.2a y IX.2b.

5°. Las unidades derivadas SI se forman de acuerdo con las ecuaciones que relacionan entre sí las magnitudes físicas correspondientes a los casos más simples de los fenómenos y cuerpos. Las unidades derivadas SI de magnitudes eléctricas y magnéticas se han formado, de acuerdo con la ecuación del campo electromagnético, en forma racionalizada (III.1.2.2° y III.10.2.2°).

Las unidades derivadas SI más importantes se incluyen en la tabla IX.3.

6°. En algunos casos (por ejemplo, en los trabajos científicos de física) se tolera, además de las unidades SI, el empleo de unidades CGS. En el sistema CGS se utilizan (en mecánica) 3 unidades fundamentales: de longitud, el centímetro (cm), de masa, el gramo (g), y de tiempo, el segundo (s); y 2 unidades complementarias: de ángulo plano, el radián (rad), y de ángulo sólido, el estereorradián (sr). Todas ellas coinciden con las correspondientes unidades SI o son divisoras de las mismas: $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ y $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$.

Las unidades derivadas CGS de las magnitudes mecánicas, así como su relación con las unidades SI, se dan en la tabla IX.4.

7°. En física se utilizan los tres sistemas siguientes de unidades de las magnitudes eléctricas y magnéticas, contruidos sobre la base del sistema CGS para las magnitudes mecánicas:

Unidades derivadas

Magnitud		Unidad derivada SI		
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo	Observaciones
1. Unidades derivadas de espacio y tiempo				
Superficie	L^2	metro cuadrado	m^2	
Volumen	L^3	metro cúbico	m^3	
Velocidad	LT^{-1}	metro por segundo	m/s	
Aceleración	LT^{-2}	metro por segundo al cuadrado	m/s^2	
Frecuencia	T^{-1}	hertzio	Hz	
Frecuencia de rotación	T^{-1}	segundo elevado a menos uno	s^{-1}	
Velocidad angular	T^{-1}	radián por segundo	rad/s	
Aceleración angular	T^{-2}	radián por segundo al cuadrado	rad/s ²	
2. Unidades derivadas de las magnitudes mecánicas				
Densidad	$L^{-3}M$	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
Momento de inercia	L^2M	kilogramo metro al cuadrado	$kg \cdot m^2$	
Impulso	LMT^{-1}	kilogramo metro por segundo	$kg \cdot m/s$	
Momento de impulso	L^2MT^{-1}	kilogramo metro cuadrado por segundo	$kg \cdot m^2/s$	
Fuerza	LMT^{-2}	newton	N	$1 N = 1 kg \cdot m/s^2$
Momento de fuerza	L^2MT^{-2}	newton metro	$N \cdot m$	
Impulso de una fuerza	LMT^{-1}	newton segundo	$N \cdot s$	
Presión, esfuerzo, módulo de elasticidad	$L^{-1}MT^{-2}$	pascal	Pa	$1 Pa = 1 N/m^2$
Tensión superficial	MT^{-2}	newton por metro	N/m	
Trabajo, energía	L^2MT^{-2}	julio	J	$1 J = 1 N \cdot m$
Potencia	L^2MT^{-3}	vatio	W	$1 W = 1 J/s$
Viscosidad dinámica	$L^{-1}MT^{-1}$	pascal segundo	$Pa \cdot s$	
Viscosidad cinemática	L^2T^{-1}	metro cuadrado por segundo	m^2/s	

Tabla IX.3 (continuación)

Magnitud		Unidad derivada SI		
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo	Observaciones
3. Unidades derivadas de las magnitudes térmicas				
Cantidad de calor, energía interna	L^2MT^{-2}	julio	J	1 J = 1 N·m
Cantidad de calor específica	L^2T^{-2}	julio por kilogramo	J/kg	
Capacidad calorífica y entropía de un sistema	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$	julio por kelvin	J/K	
Calor específico	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	julio por kilogramo kelvin	J/(kg·K)	
Calor molar	$L^2MT^{-2}N^{-1}\theta^{-1}$	julio por mol kelvin	J/(mol·K)	
Conductibilidad térmica	$LMT^{-3}\theta^{-1}$	vatio por metro kelvin	W/(m·K)	
4. Unidades derivadas de las magnitudes eléctricas y magnéticas				
Densidad de corriente eléctrica	$L^{-3}I$	amperio por metro cuadrado	A/m ²	
Carga eléctrica	TI	culombio	C	1 C = 1 A·s
Densidad de carga eléctrica				
a) lineal	$L^{-1}TI$	culombio por metro	C/m	
b) superficial	$L^{-2}TI$	culombio por metro cuadrado	C/m ²	
c) tridimensional	$L^{-3}TI$	culombio por metro cúbico	C/m ³	
Polarización, desplazamiento eléctrico	$L^{-1}TI$	culombio por metro cuadrado	C/m ²	
Momento eléctrico de dipolo	LTI	culombio metro	C·m	
Flujo eléctrico de desplazamiento	TI	culombio	C	
Potencial eléctrico, tensión, fem	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	voltio	V	1 V = J/C
Intensidad de campo eléctrico	$LMT^{-3}I^{-1}$	voltio por metro	V/m	
Capacidad eléctrica	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	faradio	F	1 F = 1 C/V
Constante eléctrica	$L^{-8}M^{-1}T^4I^2$	faradio por metro	F/m	
Resistencia eléctrica	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ohmio	Ω	1 Ω = 1 V/A
Resistividad eléctrica	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ohmio metro	$\Omega \cdot m$	

Tabla IX.3 (continuación)

Magnitud		Unidad derivada SI		
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo	Observaciones.
4. Unidades derivadas de las magnitudes eléctricas y magnéticas				
Conductibilidad eléctrica	$L^{-1}M^{-1}T^3I^2$	siemens	S	1 S = 1 A/V
Conductividad eléctrica	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	siemens por metro	S/m	
Flujo magnético	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	weber	Wb	1 Wb = 1 T · m ² = 1 V · s
Inducción magnética	$MT^{-2}I^{-1}$	tesla	T	1 T = 1 N/(A · m)
Fuerza magnetomotriz	I	amperio	A	
Intensidad de campo magnético	$L^{-1}I$	amperio por metro	A/m	
Inductancia, inductancia mutua	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	henrio	H	1 H = 1 Wb/A
Constante magnética	$LMT^{-2}I^{-2}$	henrio por metro	H/m	
Momento magnético de corriente eléctrica	L^2I	amperio metro cuadrado	A · m ²	
Imanación	$L^{-1}I$	amperio por metro	A/m	
Reluctancia	$L^{-1}M^{-1}T^2I^2$	amperio por weber	A/Wb	
5. Unidades derivadas de las magnitudes luminosas y de fotometría energética				
Flujo luminoso	J	lumen	lm	
Illuminación	$L^{-2}J$	lux	lx	1 lx = 1 lm/m ²
Emitancia luminosa	$L^{-2}J$	lumen por metro cuadrado	lm/m ²	
Luminancia	$L^{-2}J$	candela por metro cuadrado	cd/m ²	
Flujo de radiación	L^2MT^{-3}	vatio	W	
Irradiancia y emitancia energética	MT^{-3}	vatio por metro cuadrado	W/m ²	
Radiancia	MT^{-3}	vatio por estereorradián metro cuadrado	W/(sr · m ²)	
Densidad espectral de emitancia energética				
a) por la longitud de onda	$L^{-1}MT^{-3}$	vatio por metro cúbico	W/m ³	
b) por la frecuencia	MT^{-3}	julio por metro cuadrado	J/m ²	

Tabla IX.4

Unidades derivadas CGS de las magnitudes mecánicas

Magnitud		Unidad derivada CGS		
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo	Equivalencia en unidades SI
Densidad	$L^{-3}M$	gramo por centímetro cúbico	g/cm^3	10^3 kg/m^3
Momento de inercia	L^2M	gramo centímetro cuadrado	$g \cdot cm^2$	$10^{-7} \text{ kg} \cdot m^2$
Impulso	LMT^{-1}	gramo centímetro por segundo	$g \cdot cm/s$	$10^{-5} \text{ kg} \cdot m/s$
Momento de impulso	L^2MT^{-2}	gramo centímetro cuadrado por segundo	$g \cdot cm^2/s$	$10^{-7} \text{ kg} \cdot m^2/s$
Fuerza	LMT^{-2}	dina	dyn	10^{-5} N
Momento de fuerza	L^2MT^{-2}	dina centímetro	dyn·cm	$10^{-7} \text{ N} \cdot m$
Impulso de fuerza	LMT^{-1}	dina segundo	dyn·s	$10^{-5} \text{ N} \cdot s$
Presión, esfuerzo, módulo de elasticidad	$L^{-1}MT^{-2}$	dina por centímetro cuadrado	dyn/cm ²	10^{-1} Pa
Tensión superficial	MT^{-2}	dina por centímetro	dyn/cm	10^{-3} N/m
Trabajo, energía	L^2MT^{-2}	ergio	erg	10^{-7} J
Potencia	L^2MT^{-3}	ergio por segundo	erg/s	10^{-7} W
Viscosidad dinámica	$L^{-1}MT^{-1}$	poise	P	$10^{-1} \text{ Pa} \cdot s$
Viscosidad cinemática	L^2T^{-1}	stokes	St	$10^{-4} \text{ m}^2/s$

el sistema electrostático absoluto (CGSE o u.e.e. CGS), el sistema electromagnético absoluto (CGSM o u.e.m. CGS) y el sistema de unidades absoluto de Gauss (CGS).

En el sistema CGSE el coeficiente de proporcionalidad k (III.1.2.3°) de la ley de Coulomb se considera adimensional e igual a 1. Respectivamente, la ley de Coulomb y todas las demás relaciones entre la electrostática y la electrodinámica se escriben en forma no racionalizada.

En el sistema CGSM el coeficiente de proporcionalidad k de la ley de Biot — Savart — Laplace (III.10.2.1°) se considera adimensional e igual a 1, de manera que esta ley y todas las demás

relaciones del electromagnetismo se escriben en forma no racionalizada. La magnitud c , que indica a cuantas unidades de carga eléctrica (o de corriente eléctrica) del sistema CGSE equivale una unidad de carga eléctrica (o de corriente eléctrica) del sistema CGSM, se llama *constante electrodinámica*. Esta constante es igual a la velocidad de la luz en el vacío:

$$c = 2,99792458 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s.}$$

El sistema de unidades que más se emplea en física es el de Gauss (CGS), en el que las unidades de todas las magnitudes

Tabla IX.5

Unidades derivadas CGS de las magnitudes eléctricas

Magnitud		Unidad derivada CGS	
Nombre	Dimensión	Nombre	Equivalencia en unidades SI
Intensidad de corriente eléctrica	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	—	$10/c$ A
Densidad de corriente eléctrica	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-2}$	—	$10^5/c$ A/m ²
Carga eléctrica	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10/c$ C
Densidad de carga eléctrica:			
a) lineal	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^3/c$ C/m
b) superficial	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^5/c$ C/m ²
c) tridimensional	$L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^7/c$ C/m ³
Polarización	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^5/c$ C/m ²
Momento eléctrico de dipolo	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$1/(10c)$ C·m
Flujo eléctrico de desplazamiento	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10/(4\pi c)$ C
Desplazamiento eléctrico	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^5/(4\pi c)$ C/m ²
Potencial eléctrico, fem, tensión	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^{-8} c$ V
Intensidad de campo eléctrico	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	$10^{-6} c$ V/m
Capacidad eléctrica	L	centímetro	$10^9/c^2$ F
Resistencia eléctrica	$L^{-1}T$	—	$10^{-9} c^2 \Omega$
Resistividad eléctrica	T	—	$10^{-11} c^2 \Omega \cdot m$
Conductibilidad eléctrica	LT^{-1}	—	$10^9/c^2$ S

eléctricas son las mismas que en el sistema CGSE, y las unidades de todas las magnitudes magnéticas son las mismas que en el sistema CGSM. En el sistema de Gauss, como en el sistema CGSE, el coeficiente de proporcionalidad k (VIII.1.2.4°) de la ley de Coulomb se considera adimensional e igual a 1 (VIII.1.2.7°). Al mismo tiempo, el coeficiente de proporcionalidad k de la ley de Biot—Savart—Laplace (III.10.2.2°) se considera que es $k = 1/c$, donde c es la constante electrodinámica.

8°. Las unidades derivadas CGS (del sistema de Gauss) para las magnitudes eléctricas se dan en la tabla IX.5, y para las magnitudes magnéticas, en la tabla IX.6.

Tabla IX.6

Unidades derivadas CGS de las magnitudes magnéticas

Magnitud		Unidad derivada CGS		
Nombre	Dimensión	Nombre	Símbolo	Equivalencia en unidades SI
Flujo magnético	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	maxwell	Mx	10^{-8} Wb
Inducción magnética	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	gausio (gauss)	Gs	10^{-4} T
Fuerza magnetomotriz	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	gilbertio	Gb	$10/(4\pi)$ A
Intensidad de campo magnético	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	oerstedio	Oe	$10^3/(4\pi)$ A/m
Inductancia, inductancia mutua	L	centímetro	cm	10^{-9} H
Momento magnético de corriente eléctrica	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	10^{-3} A·m ²
Imanación	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	—	—	10^3 A/m
Reluctancia	L^{-1}	—	—	$10^9/(4\pi)$ A/Wb

9°. Las unidades fuera de sistema, cuya utilización se tolera en la física y la astronomía, se exponen en la tabla IX.7.

10°. Las unidades fuera de sistema permitidas en las mismas condiciones que las del SI se pueden ver en la tabla IX.8.

Tabla IX.7

Unidades no sistematizadas de uso tolerado en física y astronomía

Nombre de las magnitudes	Unidades fuera de sistema		
	Nombre	Símbolo:	Equivalencia en unidades SI
Longitud	unidad astronómica	u. a.	$1,49600 \cdot 10^{11}$ m
	año luz	a. l.	$9,4605 \cdot 10^{15}$ m
	parsec	pc	$3,0857 \cdot 10^{16}$ m
	unidad X	X	$1,00206 \cdot 10^{-13}$ m
Masa	unidad de masa atómica	u. m. a.	$1,66057 \cdot 10^{-27}$ kg
Superficie	barn	b	10^{-28} m ²
Energía	electrón-voltio	eV	$1,60219 \cdot 10^{-19}$ J

Tabla IX.8

Unidades no sistematizadas permitidas lo mismo que las SI

Nombre de la magnitud	Unidad fuera de sistema		
	Nombre	Símbolo	Equivalencia en unidades SI
Area (de parcelas de terreno)	hectárea	ha	10^4 m ²
Capacidad	litro	l	10^{-3} m ³
Angulo plano	grado	...°	1/180 rad
	minuto	...'	1/10800 rad
	segundo	..."	1/648000 rad
	minuto	min	60 s
Tiempo	hora	h	3600 s
	día	d	86400 s
	semana	—	—
	mes	—	—
	año	—	—
	Masa	tonelada	t
Temperatura centígrada, diferencia de temperatura	grado centígrado	°C	La temperatura centígrada $t = T - 273,15$, donde T es la temperatura en K. Por su dimensión, el grado centígrado es igual al grado Kelvin.

§ IX.2. Constantes físicas fundamentales

En la tabla IX.9 se han utilizado los valores de las constantes físicas que se dan en el artículo «Valores acordados recomendables de las constantes físicas fundamentales, año 1973». (Véanse «Constantes físicas fundamentales», GSSSD, 1—76—M.: Editorial de Estándares, 1976, así como UFN, 1975, t. 115, págs. 623—633). Los números entre paréntesis indican el error normal en las últimas cifras del valor de la magnitud que se ofrece en la tabla IX.9.

§ IX.3. Errores de medición de las magnitudes físicas

1°. *Medir una magnitud física es compararla con otra magnitud física homogénea que se toma como unidad. El resultado de la medición de una magnitud física A se representa en la forma*

$$A = \{A\} [A],$$

donde $\{A\}$ es un número abstracto llamado *valor numérico de la magnitud A* , y $[A]$ es la unidad de la magnitud A .

Si la unidad de una magnitud física dada varía k veces ($[A]' = k [A]$), el valor numérico $\{A\}'$ de esta magnitud variará $1/k$ veces:

$$\{A\}' = \frac{A}{[A]'} = \frac{A}{k [A]} = \frac{\{A\}}{k}.$$

La dimensión de la magnitud física A se designa por $\dim A$. Como el valor numérico $\{A\}$ es una magnitud adimensional, la dimensión de la magnitud A coincide con la dimensión de su unidad

$$\dim A = \dim [A].$$

2°. Se distinguen dos tipos de medición de las magnitudes físicas: directa e indirecta. En la *medición directa* el valor que se busca de la magnitud se determina directamente por medio de un instrumento que mide esta misma magnitud. Por ejemplo, las dimensiones de un cuerpo se pueden medir directamente con una regla graduada, con un pie de rey o con un micrómetro; la masa de un cuerpo se puede hallar por medición directa pesán-

Tabla IX.9

Constantes físicas universales

Magnitud	Símbolo	Valor	Error relativo 10^{-6}
1. Unidad de masa atómica	$1 \text{ u. m. a.} = 10^{-8} \frac{\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}}{N_A}$	1,6605655 (86) · 10 ⁻²⁷ kg	5,1
2. Carga elemental	e	1,6021892 (46) · 10 ⁻¹⁹ C	2,9
3. Carga específica del electrón	e/m_e	1,7588047 (49) · 10 ¹¹ C/kg	2,8
4. Longitud de onda de Compton del neutrón	$\lambda_{C,n} = h/(m_n c)$	1,3195909 (22) · 10 ⁻¹⁵ m	1,7
5. Longitud de onda de Compton del protón	$\lambda_{C,p} = h/(m_p c)$	2,1001941 (35) · 10 ⁻¹⁵ m	1,7
6. Longitud de onda de Compton del electrón	$\lambda_{C,e} = h/(m_e c)$	1,3214099 (22) · 10 ⁻¹⁵ m	1,7
7. Magnetón de Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	2,1030892 (36) · 10 ⁻¹⁶ m	1,7
8. Magnetón nuclear	$\mu_{nuc} = e\hbar/2m_p$	2,4263089 (40) · 10 ⁻¹² m	1,6
9. Momento magnético del protón	μ_p	3,8615905 (64) · 10 ⁻¹⁸ m	1,6
10. Momento magnético del electrón	μ_e	9,274078 (36) · 10 ⁻²⁴ J/T	3,9
11. Masa en reposo del neutrón	m_n	5,050824 (20) · 10 ⁻²⁷ J/T	3,9
12. Masa en reposo del protón	m_p	1,4106171 (55) · 10 ⁻²⁶ J/T	3,9
13. Masa en reposo del electrón	m_e	1,521032209 (16) · 10 ⁻³	0,011
	μ_p/μ_B	2,7928456 (11)	0,38
	μ_p/μ_{nuc}	9,284832 (36) · 10 ⁻²⁴ J/T	3,9
	μ_e/μ_p	658,2106880 (66)	0,010
	μ_e/μ_{nuc}	1,6749543 (86) · 10 ⁻²⁷ kg	5,1
	m_n	1,008665012 (37) u. m. a.	0,037
	m_p	1,6726485 (86) · 10 ⁻²⁷ kg	5,1
	m_e	1,007276470 (11) u. m. a.	0,011
		0,9109534 (47) · 10 ⁻³⁰ kg	5,1
		5,4858026 (21) · 10 ⁻⁴ u. m. a.	0,38

Tabla IX.9 (continuación)

Magnitud	Símbolo	Valor	Error relativo 10 ⁻⁶
14. Volumen de un mol de gas perfecto en condiciones normales ($T_0 = 273,15$ K, $p_0 = 101325$ Pa)	$V_0 = RT_0/p_0$	0,02241383 (70) m ³ /mol	31
15. Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	1,380662 (44) · 10 ⁻²³ J/K	32
16. Constante universal de los gases	R	8,31441 (26) $\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$	31
17. Constante de la gravitación	γ	6,6720 (41) · 10 ⁻¹¹ $\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$	615
18. Constante magnética	μ_0	12,5663706144 · 10 ⁻⁷ H/m	5,4
19. Constante de Planck	$h = h/2\pi$	6,626176 (36) · 10 ⁻³⁴ J/Hz	5,4
	$\Phi_0 = h/2e$	1,0545887 (57) · 10 ⁻³⁴ J/Hz	2,6
	h/e	2,0678506 (54) · 10 ⁻¹⁵ $\frac{\text{Wb}}{\text{A}}$	2,6
	$h/2m_e$	4,135701 (11) · 10 ⁻¹⁵ $\frac{\text{J}}{\text{Hz} \cdot \text{C}}$	1,6
20. Constante de radiación, primera	$c_1 = 2\pi hc^2$	3,6369455 (60) · 10 ⁻⁴ $\frac{\text{J}}{\text{Hz} \cdot \text{kg}}$	1,6
21. Constante de radiación, segunda	$c_2 = hc/k$	7,273881 (12) · 10 ⁻⁴ $\frac{\text{Hz} \cdot \text{kg}}{\text{W} \cdot \text{m}^2}$	5,4
22. Constante de Rydberg	$R_\infty = \frac{\mu_0^2 m_e c^3 e^4}{8h^3}$	0,01438786 (45) m ⁻¹ · K	31
23. Constante de Stefan - Boltzmann	$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60h^3 c^3}$	1,097373177 (83) · 10 ⁷ m ⁻¹ 5,67032 (71) · 10 ⁻⁸ $\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$	0,009 125

Tabla IX.9 (continuación)

Magnitud	Símbolo	Valor	Error relativo 10 ⁻⁶
24. Constante de estructura fina	$\alpha = \frac{\mu_0 c e^2}{2h}$	0,0072973506 (60)	0,82
25. Constante (número) de Faraday	$F = N_A e$	137,03604 (11) 9,648456 (27) · 10 ⁴ C/mol	0,82 2,8
26. Constante eléctrica	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	8,85418782 (7) · 10 ⁻¹² F/m	0,008
27. Radio de Bohr	$a_0 = \alpha / (4\pi R_{\infty})$	0,52917706 (44) · 10 ⁻¹⁰ m	0,82
28. Radio clásico del electrón	$r_e = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e c}$	2,8179380 (70) · 10 ⁻¹⁵ m	2,5
29. Velocidad de la luz en el vacío	c	299792458 (1, 2) m/s	0,004
30. Aceleración de caída libre normal	g	9,80665 m/s ²	
31. Número de Avogadro	N_A	6,022045 (31) · 10 ²³ mol ⁻¹	1,0
32. Energía en reposo del neutrón	$m_n c^2$	939,5731 (27) MeV	2,8
33. Energía en reposo del protón	$m_p c^2$	938,2796 (27) MeV	2,8
34. Energía en reposo del electrón	$m_e c^2$	0,5110034 (14) MeV	2,8
35. Energía correspondiente a 1 u. m. a.		931,5016 (26) MeV	2,8

dolo en una balanza; la duración de un proceso cualquiera puede medirse directamente con un cronómetro, y la intensidad de la corriente eléctrica en una red, con un amperímetro.

Durante la *medición indirecta*, el valor buscado de la magnitud física se halla basándose en los resultados de las mediciones directas de otras magnitudes físicas con las cuales aquélla está ligada por medio de una dependencia funcional conocida. Por ejemplo, la densidad media de un cuerpo se puede calcular utilizando los resultados de las mediciones directas de su masa y su volumen; la resistencia eléctrica de un conductor puede hallarse por la ley de Ohm si se conocen los resultados de las mediciones directas de la intensidad de la corriente en el conductor y las tensiones en sus extremos.

En dependencia del método de medición que se elija, los valores de ciertas magnitudes físicas se pueden determinar tanto por mediciones directas como indirectas. Por ejemplo, la intensidad de la corriente continua en un circuito eléctrico se puede medir directamente con un amperímetro, o indirectamente a partir de la magnitud de la tensión medida sobre un patrón de resistencia conectado en serie en el circuito. El volumen de una bola se puede hallar por medición directa, sumergiéndola en un líquido que se encuentre en una probeta graduada, pero también se puede calcular midiendo el diámetro de la bola.

3°. Los medios técnicos que se utilizan para realizar la parte experimental de la medición se llaman *instrumentos de medida*. A ellos pertenecen los aparatos para medir, las medidas y los sistemas y dispositivos de medición formados por ellos. Se llaman *aparatos o instrumentos de medida* aquellos con los cuales se pueden determinar directamente los valores de las magnitudes que se miden. Las *medidas* son los instrumentos de medición que sirven para reproducir magnitudes físicas de dimensiones (una o varias) dadas. Son ejemplos de medidas los juegos de pesas, los elementos normalizados, los patrones de resistencia y de bobinas de inductancia, las cajas de capacidades, de inductancias y de resistencias, las diversas medidas de longitud, de capacidad, etc.

4°. Debido a una multitud de circunstancias fortuitas imposibles de prever, cada medición por separado de una magnitud física no coincide con su verdadero valor. La diferencia entre el resultado de la medición y el valor verdadero de la magnitud medida se llama *error de medición*.

Los errores de medición pueden deberse a dificultades técnicas (imperfección de los aparatos de medida, posibilidades limitadas de los órganos visuales humanos, por medio de los

cuales se registran en muchos casos las indicaciones de los aparatos, etc.) y a una serie de factores cuya influencia es difícil de tener en cuenta (oscilaciones de la temperatura del aire, movimiento de éste junto al aparato de medida, pequeñas vibraciones de los elementos del dispositivo para medir, y otros factores semejantes).

Hay tres tipos de errores de medición: burdos (descuidos sistemáticos y accidentales. Los *burdos* o *descuidos* suelen deberse a defectos en los aparatos de medida o a equivocaciones del observador al leer o escribir las indicaciones de aquéllos o a variaciones bruscas de las condiciones en que se mide. Los resultados de las mediciones correspondientes a los errores burdos deben desecharse y sustituirse por nuevas mediciones).

5°. Se llaman *errores sistemáticos de medición* aquellos que si la misma magnitud se mide muchas veces, se mantienen constantes o varían según una ley determinada. En los errores sistemáticos se incluyen los *metódicos* y los *instrumentales*.

Los *errores metódicos* son ocasionados por defectos del método de medición que se utiliza, por la imperfección de la teoría del fenómeno físico o por la inexactitud de la fórmula de cálculo que se utiliza para hallar la magnitud que se mide. Por ejemplo, al pesar un cuerpo en una balanza de precisión, se cometerá un error metódico sistemático si no se introduce la corrección correspondiente a la diferencia entre las fuerzas de empuje que ejerce el aire sobre el cuerpo que se pesa y sobre el conjunto de pesas que lo equilibran. Los errores metódicos pueden reducirse perfeccionando el método de medida e introduciendo precisiones en la fórmula de cálculo.

Los *errores instrumentales* son debidos a la imperfección de diseño y a la inexactitud en la fabricación de los aparatos de medida (por ejemplo, una pequeña diferencia en las longitudes de los brazos de la balanza, la incoincidencia del centro de la escala con el eje de giro del índice en un aparato con aguja indicadora, la variación de la marcha de un cronómetro de mano cuando cambia la temperatura, etc.). El error instrumental puede disminuirse utilizando aparatos más perfectos y exactos. No obstante, eliminar totalmente este error es imposible.

6°. Reciben el nombre de *errores accidentales de medición* aquellos cuya magnitud absoluta o signo varían al medir muchas veces una misma magnitud física. Los errores accidentales se deben a muchos factores imposibles de tomar en consideración. Por ejemplo, sobre las indicaciones de una balanza de precisión pueden influir las partículas de polvo que durante la ponderación se depositan en sus platillos, el alargamiento de uno de los brazos

de la cruz de la balanza al calentarse por la proximidad de la mano del operador, las corrientes de aire por convección cerca de los platillos de la balanza, y otras causas.

Eliminar totalmente los errores accidentales es imposible, pero se pueden reducir repitiendo muchas veces las mediciones. En este caso se produce una compensación parcial de los errores accidentales de los resultados de las medidas tanto en el sentido del aumento como en el de la disminución. Los errores accidentales se calculan por los métodos de la teoría de probabilidades y de la estadística matemática.

7°. Como valor más fidedigno de una magnitud física A medida directamente, se toma la *media aritmética* $\langle A \rangle$ de los n resultados de sus mediciones $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i.$$

El resultado final de la medida de la magnitud A se representa en la forma

$$A = \langle A \rangle \pm \Delta A,$$

donde ΔA es una magnitud positiva llamada *error absoluto* del valor de A hallado.

Se da el nombre de *error relativo* del valor A a la relación $\Delta A/A$.

La probabilidad P de que el valor verdadero de A se encuentre efectivamente en el intervalo de $\langle A \rangle - \Delta A$ a $\langle A \rangle + \Delta A$ se llama *fiabilidad del resultado obtenido de la medición* de la magnitud física A .

8°. Si los errores sistemáticos pueden despreciarse (véase p. 9°), y los errores accidentales cumplen la distribución normal (distribución de Gauss) *, cuando el número de mediciones $n \geq 5$ y la fiabilidad $P \approx 2/3$, puede aceptarse que el error absoluto ΔA es igual al *error cuadrático medio* o *estándar*

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (A_i - \langle A \rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

*) Esto es correcto, por ejemplo, cuando el error resultante de la medición es la suma de un gran número de errores accidentales independientes, pequeños en comparación con el resultante.

Si es necesario elevar la fiabilidad P del resultado, hay que aumentar respectivamente el valor de ΔA suponiendo

$$\Delta A = t S_A,$$

donde t es un coeficiente positivo dependiente de n y P .

Al aumentar n disminuye el error estándar S_A (para valores grandes de n el error $S_A \sim 1/\sqrt{n}$). Por eso la exactitud del resultado de las mediciones, limitada por los errores accidentales, aumenta al crecer el número de ellas.

9°. En el caso general hay que tomar en consideración tanto los errores accidentales como los sistemáticos de las mediciones directas. En este caso el *error estándar en la magnitud medida A* se calcula por la fórmula *)

$$S_A = \sqrt{(S'_A)^2 + (S''_A)^2},$$

en la que S'_A es el *error accidental estándar* que se halla por la fórmula de S_A del p. 8°, y S''_A es el *error sistemático estándar*.

Al calcular S_A no se requiere gran exactitud: basta hallar S_A con una exactitud de hasta el 15 ó el 20%. Por eso, si S'_A y S''_A difieren en dos o más veces, prácticamente se puede considerar que S_A es igual a la mayor de ellas:

$$S_A = \text{máx} (S'_A, S''_A).$$

Por ejemplo, sea $S'_A = 0,5 S''_A$, entonces

$$S_A = \sqrt{1,25} S''_A \approx S''_A.$$

En este caso, para elevar la exactitud del resultado de la medición no tiene sentido aumentar el número de mediciones, lo que hay que hacer es tomar medidas para que disminuya el error sistemático (por ejemplo, utilizar aparatos más precisos).

10°. El error sistemático estándar se valora basándose en el análisis del método de medición y de los instrumentos de medida utilizados. Todos los errores sistemáticos posibles de excluir (por ejemplo, algunos errores metódicos) deben eliminarse antes de empezar a elaborar los datos experimentales, intro-

*) Damos un procedimiento simplificado de cálculo de los errores sistemáticos. Para un método más exacto véase el estándar soviético «GOST 8.207-76. Mediciones directas con observaciones numerosas. Métodos de elaboración de los resultados de las observaciones».

duciendo las debidas correcciones. Precisamente estos valores corregidos de A_i son los que se consideran como datos experimentales de partida para buscar $\langle A \rangle$ y S'_A . El error instrumental (debido a los aparatos) se determina sobre la base de los datos indicados en el certificado de instrumento, su clase de precisión, la exactitud del nonio, etc.

Se llama *clase de precisión de un instrumento de medida* la característica de éste que sirve de índice de los límites de error y de otros parámetros que influyen sobre la exactitud, establecidos para él por las normas estatales.

Muchos aparatos indicadores (manómetros, amperímetros, voltímetros, watímetros y otros) se normalizan por el *error reducido*, es decir, por el error expresado en tanto por ciento del límite superior de medición (en los aparatos con varios límites, respecto del límite superior del intervalo correspondiente) o de la longitud de la escala. Se utilizan las siguientes clases de precisión: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5 y 4,0. La notación de la clase de precisión del aparato va escrita sobre la escala en forma de las cifras correspondientes (¡no encerradas en un círculo!). La fórmula general para calcular el error absoluto máximo del aparato ΔA_{ap} tiene la forma:

$$\Delta A_{ap} = \frac{K}{100} A_{m\acute{a}x},$$

donde K es la clase de precisión; $A_{m\acute{a}x}$, el límite superior de medición del aparato (o de un intervalo dado del mismo). Por ejemplo, para un amperímetro de clase 0,5 en el intervalo de $I_{m\acute{a}x} = 2 \text{ A}$, será

$$\Delta I_{ap} = \frac{0,5}{100} 2A = 0,01 \text{ A.}$$

Como error sistemático estándar de este aparato se puede tomar la mitad de ΔI_{ap} , es decir, $S''_I = 0,5 \Delta I_{ap} = 0,005 \text{ A}$.

Los aparatos de medida pueden también normalizarse por el *error relativo*, o sea, por el error expresado en tanto por ciento del valor efectivo de la magnitud que se mide. La notación de la clase de precisión se representa sobre la escala del aparato con las cifras correspondientes encerradas en un circulito. En este caso

$$\Delta A_{ap} = \frac{K}{100} A.$$

Si la clase de precisión no se indica en el aparato ni en su certificado se hace referencia al error instrumental relativo, se considera generalmente que dicho error es igual a la mitad del valor de la menor división de la escala del aparato. En el caso de un instrumento cuyo índice no se desplaza uniformemente, sino a «saltos» (como, por ejemplo, la aguja de un cronómetro de mano), el error del aparato se considera igual al valor de las divisiones de la escala.

11°. Al escribir el resultado de las mediciones en la forma estándar que se indicó en el p. 7°, deben cumplirse las reglas siguientes:

1) la magnitud del error ΔA se debe redondear hasta 2 cifras significativas si la primera de ellas es la unidad, y hasta una cifra significativa en todos los demás casos;

2) al escribir el valor de $\langle A \rangle$ hay que indicar todas las cifras hasta la última de orden decimal utilizada para escribir el error.

Ejemplo 1. Elaboración de los resultados de las mediciones directas del diámetro d de una bola, realizadas con un micrómetro.

Los valores d_i para las 5 mediciones realizadas se dan en la 2ª columna de la tabla IX.10.

Tabla IX.10

Nº de la medición	d_i , mm	$ d_i - \langle d \rangle $, mm	$(d_i - \langle d \rangle)^2$, mm ²
1	5,27	0,02	0,0004
2	5,30	0,01	0,0001
3	5,28	0,01	0,0001
4	5,32	0,03	0,0009
5	5,28	0,01	0,0001

Hacemos los cálculos:

$$\langle d \rangle = \frac{5,27 + 5,30 + 5,28 + 5,32 + 5,28}{5} \text{ mm} = 5,29 \text{ mm},$$

$$S'_d = \sqrt{\frac{4 + 1 + 1 + 9 + 1}{5 \cdot 4}} 10^{-4} \text{ mm} = 0,009 \text{ mm}.$$

Suponiendo que el error instrumental estándar del micrómetro es igual a su precisión ($S''_d = 0,01 \text{ mm}$), hallamos el error

estándar del diámetro de la bola: $S_d = \sqrt{0,009^2 + 0,01^2} \text{ mm} = 0,0134 \text{ mm} \approx 0,013 \text{ mm}$.

La escritura correcta del resultado de la medición será

$$d = (5,290 \pm 0,013) \text{ mm}.$$

Ejemplos de escritura incorrecta del resultado de las mediciones:

1) $d = (5,29 \pm 0,01) \text{ mm}$, el error se ha rebajado en más del 15—20% por haberse infringido la regla 1.

2) $d = (5,29 \pm 0,013) \text{ mm}$, se ha infringido la regla 2.

3) $d = (5,2900 \pm 0,0134) \text{ mm}$, no se ha cumplido la regla 1.

12°. Reglas para el cálculo de los errores en las mediciones indirectas.

Supongamos que para las mediciones indirectas de una magnitud física A se aprovecha una dependencia funcional conocida de A respecto de una serie de otras magnitudes independientes B, C, D, E, F, \dots, Q , dada en la forma $A = f(B, C, D, E, F, \dots, Q)$.

Entre las variables B, C, \dots, Q puede haber magnitudes de 3 tipos:

1) magnitudes que se determinan por mediciones directas (por ejemplo, las magnitudes E, F, \dots, Q), las cuales, una vez hechas dichas mediciones, se representan en la forma estándar:

$$E = \langle E \rangle \pm S_E, F = \langle F \rangle \pm S_F, \dots, Q = \langle Q \rangle \pm S_Q;$$

2) datos del dispositivo (por ejemplo, las magnitudes B y C), es decir, las características del dispositivo experimental, conocidas por mediciones anteriores (de comprobación); estas magnitudes también deben darse en forma análoga *): $B = \langle B \rangle \pm S_B$ y $C = \langle C \rangle \pm S_C$;

3) magnitudes tabulares (por ejemplo, la magnitud D), o sea magnitudes que en el experimento dado no se miden, sino que se toman de tablas.

La magnitud tabular puede ser constante (por ejemplo, $D = \pi$). En este caso debe tomarse de las tablas con una exactitud tal, que el error relativo de D sea mucho menor que los

*) En caso contrario se considera, por lo general, que el valor dado sin indicar el error se ha medido con una exactitud de hasta la mitad de la unidad del último orden decimal de dicho valor (por ejemplo, si $B = 11,3 \text{ mm}$, será $S_B = 0,05 \text{ mm}$, y si $B = 11 \text{ mm}$, será $S_B = 0,5 \text{ mm}$).

errores relativos de las demás magnitudes que figuran en la expresión funcional de la magnitud A que se busca. Pero si D es una función (dada en forma de tabla) de otra magnitud T que se mide directamente, hay que representarla en la forma estándar:

$$D = \langle D \rangle \pm S_D,$$

aquí $\langle D \rangle$ es el valor tabular correspondiente a $\langle T \rangle$: $S_D = \left| \frac{\partial D}{\partial T} \right| S_T$ y $\frac{\partial D}{\partial T}$ se determina por la tabla.

El mejor valor de la magnitud A , cuando la medición se hace indirectamente, será

$$\langle A \rangle = f(\langle B \rangle, \langle C \rangle, \langle D \rangle, \langle E \rangle, \langle F \rangle, \dots, \langle Q \rangle),$$

y el error estándar de A se toma igual a

$$S_A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2 S_B^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)^2 S_C^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial D}\right)^2 S_D^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial Q}\right)^2 S_Q^2}.$$

El resultado definitivo también se representa en la forma estándar:

$$A = \langle A \rangle \pm S_A.$$

13°. Las fórmulas para calcular los errores cuando las mediciones son indirectas, se dan, para varios casos muy simples, en la tabla IX.11.

14°. Ejemplos de elaboración de los resultados de las mediciones indirectas.

Ejemplo 2. Determinar la densidad ρ de un cuerpo homogéneo basándose en los resultados de las mediciones directas de su masa $m = (25,4 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$ kg y de su volumen $V = (2,94 \pm 0,05) \cdot 10^{-6}$ m³.

El mejor valor de la densidad del cuerpo es

$$\langle \rho \rangle = \frac{25,4 \cdot 10^{-3}}{2,94 \cdot 10^{-6}} \text{ kg/m}^3 = 8,639 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

El error relativo estándar de la densidad es

$$\frac{S_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{0,5}{25,4}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{2,94}\right)^2} = 10^{-2} \sqrt{3,87 + 2,89} = 2,6 \cdot 10^{-2}.$$

Tabla IX.11

Forma de dependencia funcional	Error estándar S_A	Error relativo estándar S_A/A
$A = B + C$	$\sqrt{S_B^2 + S_C^2}$	$\sqrt{S_B^2 + S_C^2} / B \pm C $
$A = BC$	$\sqrt{C^2 S_B^2 + B^2 S_C^2}$	$\sqrt{\left(\frac{S_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{S_C}{C}\right)^2}$
$A = \frac{B}{C}$	$\sqrt{\frac{S_B^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^4} S_C^2}$	$\sqrt{\left(\frac{S_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{S_C}{C}\right)^2}$
$A = B^\alpha C^\beta \dots$ $\dots Q^\tau$	-	$\sqrt{\alpha^2 \left(\frac{S_B}{B}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{S_C}{C}\right)^2 + \dots}$ $\dots + \tau^2 \left(\frac{S_Q}{Q}\right)^2$

El error estándar de la densidad

$$S_\rho = 8,639 \cdot 10^3 \cdot 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3 = 225 \text{ kg/m}^3.$$

Redondeando los valores de S_ρ y $\langle \rho \rangle$ escribimos el resultado definitivo en la forma

$$\rho = (8,6 \pm 0,2) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Ejemplo 3. Determinar el volumen V de un cilindro por los resultados de las mediciones directas de su diámetro $d = (3,46 \pm \pm 0,04)$ cm y de su altura $h = (4,87 \pm 0,05)$ cm.

El mejor valor del volumen del cilindro se halla por la fórmula

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} \pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle.$$

Antes de hacer los cálculos hay que aclarar la exactitud con que se debe tomar el valor de π de la tabla (ésta da el valor de $\pi = 3,141593$) para que el error de dicha constante no influya sobre la exactitud con que se determina el volumen del cilindro.

El error relativo estándar del volumen es

$$\begin{aligned} \frac{S_V}{V} &= \sqrt{4 \left(\frac{S_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{S_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{S_\pi}{\pi}\right)^2} = \\ &= \sqrt{4 \left(\frac{0,04}{3,46}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{4,87}\right)^2 + \left(\frac{S_\pi}{\pi}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(5,34 + 1,05) \cdot 10^{-4} + \left(\frac{S_\pi}{\pi}\right)^2} = \sqrt{6,04 \cdot 10^{-4} + \left(\frac{S_\pi}{\pi}\right)^2}. \end{aligned}$$

Para que el error del valor de π no influya prácticamente sobre la magnitud S_V/V es suficiente (véase el p. 9°) que se cumpla la desigualdad $(S_\pi/\pi) < 0,012$, es decir, $S_\pi < 0,038$. Esta condición se cumple si nos limitamos al valor $\pi = 3,14$, ya que el error relativo que se comete con π en este caso será

$$\frac{S_\pi}{\pi} = \frac{0,001593}{3,14} = 5 \cdot 10^{-4} < 0,012.$$

Respectivamente,

$$\frac{S_V}{V} = \sqrt{6,40 \cdot 10^{-4}} = 2,53 \cdot 10^{-2},$$

$$\langle \dot{V} \rangle = \frac{1}{4} 3,14 \cdot (3,46 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 4,87 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 45,77 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

El error estándar del volumen

$$S_V = 2,53 \cdot 10^{-2} \cdot 45,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 1,16 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Y el resultado definitivo es

$$V = (45,8 \pm 1,2) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

§ IX.4. Cálculos aproximados sin tener exactamente en cuenta los errores*

1°. Al elaborar mediciones muy numerosas es corriente no calcular los errores de algunos resultados y juzgar el error del valor aproximado de la magnitud (número) por la *cantidad de cifras significativas exactas* que ésta tiene.

* El autor de este párrafo es Yu. A. Selezniiov.

Los ceros a la izquierda de las cifras significativas no se cuentan. Los ceros en medio o al final (a la derecha) del número que indican la ausencia en éste de unidades de los órdenes correspondientes, son cifras significativas. Por ejemplo, en el número 0,08040 los dos primeros ceros no son significativos, el tercero y el cuarto sí lo son.

Los ceros al final (a la derecha) de un número entero, que sustituyen cifras desconocidas y que sólo sirven para determinar los órdenes de las demás cifras, no se consideran significativos. En estos casos es mejor no escribir los ceros al final del número y sustituirlos por la correspondiente potencia del número 10. Por ejemplo, si el número 4200 se ha medido con un error absoluto de ± 100 , el mismo debe escribirse en la forma $42 \cdot 10^2$ ó $4,2 \cdot 10^3$. Tal escritura subraya que dicho número sólo tiene dos cifras significativas.

2°. Si el valor aproximado de la magnitud contiene cifras *excesivas* o no exactas, se *redondea* conservando solamente las cifras significativas exactas y se desprecian las demás. En este caso hay que regirse por las siguientes *reglas de redondeo*:

a) si la primera cifra despreciada es mayor que 4, la última cifra conservada se aumenta en la unidad. Por ejemplo, al redondear hasta centésimas el número 27,3763, debe escribirse 27,38;

b) si la primera cifra despreciada es menor que 4 o igual a 4, la última cifra conservada no varía. Por ejemplo, al redondear hasta centenas el número 13 847, debe escribirse $138 \cdot 10^2$;

c) si la parte despreciada está formada por una cifra 5 solamente, el número se redondea de tal manera que la última cifra conservada sea par. Por ejemplo, al redondear hasta décimas, $23,65 \approx 23,6$, pero $17,75 \approx 17,8$.

3°. Al realizar diversas operaciones matemáticas con números aproximados, deben observarse las siguientes *reglas de cálculo de las cifras*:

a) al sumar y restar se deben conservar (en el resultado) tantas *cifras decimales* como tenga el número con menor cantidad de signos decimales;

b) al multiplicar y dividir se deben conservar (en el resultado) tantas *cifras significativas* como tenga el número aproximado con menor cantidad de cifras significativas.

Se exceptúan de esta regla los casos cuando uno de los factores empieza por la unidad y cuando el factor que contiene el menor número de cifras significativas comienza por cualquiera otra cifra. En estos casos se conserva (en el resultado) una cifra más que en el número con menor cantidad de cifras significativas;

c) el resultado del cálculo de los valores de las funciones x^n , $\sqrt[n]{x}$ y $\lg x$ de un número aproximado x debe conservar tantas cifras significativas como tenga el número x .

Cuando se calculan resultados intermedios se conserva una cifra más que las recomendadas en las reglas a), b) y s) (llamada cifra de reserva). En el resultado final, la cifra de reserva se desprecia.

Si algunos números aproximados contienen más signos decimales (al sumar o restar) o más cifras significativas (al multiplicar, dividir, elevar a potencia, extraer la raíz, etc.) que los demás, hay que redondearlos previamente conservando sólo una cifra de más.

Ejemplo 1. Antes de sumar los números aproximados 0,374; 13,1 y 2,065, el primero y el tercero deben redondearse hasta las centésimas, y éstas han de suprimirse en el resultado final:

$$0,374 + 13,1 + 2,065 \approx 13,1 + 2,06 + 0,37 \approx 15,5.$$

Ejemplo 2. El resultado del cálculo de la expresión $\frac{68,04 \cdot 7,2}{20,1}$ debe contener sólo dos cifras significativas (como el número 7,2):

$$\frac{68,04 \cdot 7,2}{20,1} \approx \frac{68,0 \cdot 7,2}{20,1} \approx 24,4 \approx 24.$$

Ejemplo 3. El producto de los números 13,27 y 0,84 puede escribirse con tres cifras significativas (véase la excepción a la regla b)):

$$13,27 \cdot 0,84 \approx 13,3 \cdot 0,84 \approx 11,2 \text{ (y no 11).}$$

Ejemplo 4. Si se eleva al cubo el número aproximado 216, el resultado debe escribirse solamente con tres cifras significativas:

$$216^3 \approx 101 \cdot 10^6.$$

Índice alfabético de materias

- Aberraciones geométricas del sistema óptico 471
- Absorción de la luz 477
- Absorción de la luz por resonancia 478
- Absorción negativa de la luz 565
- Absorción de neutrones por resonancia 643
- Absorción de la onda 404
- Absorción de los rayos gamma por resonancia 673
- Acción próxima 347
- Aceleración 25
- Aceleración absoluta 113
- Aceleración angular 30
- Aceleración de arrastre 114
- Aceleración axípeta 31
- Aceleración de caída libre 118
- Aceleración centrípeta 26
- Aceleración del centro de inercia 41
- Aceleración circular 31
- Aceleración de Coriolis 114
- Aceleración de la gravedad 118
- Aceleración instantánea 25
- Aceleración lineal 30
- Aceleración en la mecánica relativista 95
- Aceleración media 24
- Aceleración normal 26
- Aceleración del péndulo 386
- Aceleración relativa 113
- Aceleración tangencial 26
- Acelerador 654, 656
- Aceleradores de partículas cargadas 314
- Aceleradores electrostáticos 315
- Aceleradores cíclicos 315
- Aceleradores de inducción 315
- Aceleradores lineales 315
- Aceleradores de resonancia 315
- Actos elementales 669
- Adiabática 145
- Agentes tensoactivos 207
- Agente de transformación 172
- Amortiguación de las oscilaciones 378
- Amperio 674
- Amplificador de ondas electromagnéticas 568
- Amplitud de batimiento 372
- Amplitud inicial 380
- Amplitud de onda 397

- Amplitud de oscilaciones amortiguadas 380
 Amplitud de oscilaciones armónicas 359
 Análisis armónico 374
 Análisis estructural roentgenográfico 470
 Análisis por rayos X 470
 Analizador 490
 Analizador, plano principal 490
 Anchura angular del máximo principal 466
 Anchura de una banda de interferencia 443
 Anchura natural del nivel energético del núcleo 637
 Anchura natural de la raya espectral 637
 Anchura natural de las rayas de radiación 637
 Angulo de Brewster 433, 491
 Angulo de contacto (de enlace) 208
 Angulo de deslizamiento 470
 Angulo de distorsión 570
 Angulo de incidencia 430
 Angulo límite (crítico) de la reflexión interna total 434
 Angulo de reflexión 430
 Angulo de refracción 430
 Angulo de Newton 451
 Aniones 275
 Anisotropía de los cristales 571
 Anodo 275
 Antineutrinos electrónicos 650
 Antipartículas 652
 Apertura de interferencia 442
 Apertura numérica del objetivo 472
 Apertura numérica del objetivo de un microscopio 472
 Area de coherencia espacial 447
 Armaduras del condensador 239
 Armónica fundamental 374
 Armónica primera 374
 Armónica segunda 374
 Armónica tercera 374
 Atomo 546
 Atomos aceptores 611
 Atomos donadores 610
 Autoinducción 323
 Bandas de absorción de la luz 478
 Banda de conducción 606
 Banda energética 603
 Banda híbrida 607
 Bandas prohibidas 604
 Bariones 664
 Barreras de potencial 63, 543
 Base ortonormalizada 19
 Batimientos 372
 Betatrón 348
 Biprisma de Fresnel 442
 Birrefringencia 492
 Bomba de hidrógeno 648
 Bombeo del medio amplificador 567
 Bosones intermediarios 651, 670
 Brazo del dipolo 222
 Brazo de la fuerza 68
 Brazo del par 71
 Bucle de histéresis 253, 344
 Caída libre 118
 Calor 134—136
 Calor específico 140
 Calor específico de fusión 577

- Calor de fusión 577
 Calor interno latente de vaporización 213
 Calor latente de vaporización 213
 Calor de transición de fase 213
 Caminos isócronos 448
 Caminos tautócronos 448
 Candela 674
 Cantidad de calor 134
 Cantidad de calor reducida 180
 Cantidad de cifras significativas inexactas 696
 Cantidad de movimiento de un punto material 37
 Capa de contacto 612
 Capa de contacto en equilibrio 616
 Capa eléctrica doble 612
 Capas electrónicas del átomo 554
 Caones (mesones K) 650
 Capacidad calorífica 140
 Capacidad calorífica molar 140
 Capacidad eléctrica de un acoplamiento de condensadores 241
 Capacidad eléctrica de un conductor aislado 237
 Capacidad eléctrica de un condensador cilíndrico 240
 Capacidad eléctrica de un condensador esférico 240
 Capacidad eléctrica de una esfera aislada 238
 Capacidad eléctrica mutua de los conductores 239
 Capacidades caloríficas de los gases 160
 Capacitancia del circuito 390
 Captura electrónica 630
 Captura de neutrones por resonancia 643
 Carácter absoluto de los intervalos de tiempo 45
 Carácter absoluto de las longitudes 45
 Carácter relativo del movimiento mecánico 20, 32
 Carga bariónica 664
 Carga eléctrica 652
 Carga electrónica 661
 Carga eléctrica elemental 214, 684
 Carga eléctrica de ensayo 219
 Carga eléctrica específica 313
 Carga elemental 684
 Carga específica del electrón 684
 Carga magnética 302
 Carga muónica 661
 Carga taónica 661
 Cargas eléctricas puntuales 216
 Cargas libres 248
 Cargas ligadas 248
 Cargas de polarización superficiales 247
 Cargas de polarización volumétricas 247—248
 Campo alternativo 419
 Campo (físico) 33
 Campo eléctrico 219
 Campo eléctrico homogéneo 219
 Campo eléctrico estacionario 219
 Campo electromagnético 219
 Campo electrostático 218
 Campo electrostático, energía 254
 Campo estacionario 34
 Campo de fuerzas centrales 58
 Campo de gravitación 104

- Campo de gravitación, intensidad 104
 Campo de gravitación, potencial 106
 Campo de gravitación, principio de superposición 105, 107
 Campo de gravitación, relación entre la intensidad y el potencial 108
 Campo de gravitación, trabajo 107
 Campo de interferencias 441
 Campo magnético de una carga móvil 292
 Campo magnético de un conductor rectilíneo 293
 Campo magnético generado por una espira circular con corriente 294
 Campo magnético no homogéneo 288
 Campo magnético homogéneo 288
 Campo magnético intrínseco 340
 Campo magnético 287
 Campo magnético crítico (en superconductibilidad) 593
 Campo magnético propio 340
 Campo magnético rotacional 301
 Campo magnético de un solenoide 297
 Campo magnético de un toroide 296
 Campo potencial 51
 Campo de radiación 424
 Casícontinuidad de los niveles de energía 535
 Catástrofe ultravioleta 511
 Cationes 275
 Cátodo 275
 Centro de curvatura 20
 Centro de fuerzas 58
 Centro de gravedad del cuerpo 117
 Centro de inercia de un sistema 37, 41
 Centro de masas de un sistema 37
 Centro de oscilación del péndulo físico 366
 Centros de impurezas 609
 Centros luminógenos 562
 Centros de vaporización 212
 Ciclo directo de Carnot 173
 Ciclo directo de Carnot en equilibrio, rendimiento térmico 174, 179
 Ciclo directo de Carnot irreversible, rendimiento térmico 179
 Ciclo directo en la termodinámica 173
 Ciclo directo en la termotécnica, rendimiento térmico 174, 179
 Ciclo en la termodinámica 171
 Ciclo inverso de Carnot 174
 Ciclo inverso en la termodinámica 172
 Ciclo termonuclear carbono-nitrógeno 647
 Ciclo termonuclear protón-protón 646
 Ciclotrón 315
 Ciclotrón, condición de «resonancia» 316
 Cifras decimales 697
 Cifras significativas 697
 Cinemática 17
 Cinemática relativista 93
 Circuito magnético 303
 Circuito oscilante 367
 Circuito oscilante, oscilaciones libres 367

- Circulación de la intensidad del campo electrostático 229
 Circulación del vector de inducción magnética 300
 Círculo osculador 20
 Clase de precisión de un instrumento de medida 691
 Coeficiente de amortiguamiento 379
 Coeficiente de conductividad calorífica 168
 Coeficiente de dilatación térmica lineal 572
 Coeficiente de disociación 276
 Coeficiente de elasticidad 574—575
 Coeficiente de la fuerza cuasielástica 575
 Coeficiente de inarmonía de oscilaciones de las partículas en un cristal 572
 Coeficiente lineal de absorción 477
 Coeficiente de Poisson (exponente adiabática) 145
 Coeficiente de polarizabilidad de la molécula 243
 Coeficiente de rozamiento interno 167
 Coeficiente de tensión superficial 207
 Coeficiente de viscosidad, cinemático 167
 Coeficiente de viscosidad, dinámico 167
 Coeficiente de transmisión de las ondas electromagnéticas 434
 Coeficiente de temperatura de una barrera de potencial 543
 Coeficientes medios de dilatación lineal 572
 Colisión 63
 Colláideres 656
 Coherencia espacial de oscilaciones 446
 Coherencia parcial de las ondas 444
 Coherencia de tiempo de las oscilaciones 444
 Composición de las ondas parcialmente coherentes 444
 Composición de las oscilaciones armónicas 369
 Composición de las oscilaciones armónicas de igual dirección 369
 Composición de las oscilaciones armónicas perpendiculares entre sí de igual frecuencia 375
 Concentración equivalente de la solución 279
 Condensador 239
 Condensador esférico 239
 Condensador cilíndrico 240
 Condensador plano 239
 Condensador plano, tensión disruptiva 241
 Constante de Cotton-Mouton 503
 Constante de desintegración 626
 Constante eléctrica 218, 686
 Constante electrodinámica 680
 Constante de enlace 658
 Constante de estructura fina 658, 686
 Constante de Faraday 276, 686
 Constantes físicas universales 683
 Constante de la gravitación 685
 Constante de Hall 312
 Constante de Kerr 502
 Constante magnética 290, 685
 Constante de Planck 513, 685,

- Constante de radiación, primera 686
 Constante de radiación, segunda 686
 Constante de la red de difracción 464
 Constante de rotación 504
 Constante de la solución 504
 Constante de Rydberg 546, 685
 Constante de Stefan-Boltzmann 510, 685
 Constante universal de los gases 685
 Constante de Verdet 504
 Constante de Wien 511
 Condición de la homogeneidad óptica del medio 469
 Condición de normalización de las probabilidades 530
 Condición de Wulff y Bragg 470
 Condiciones de Laue 468
 Condiciones de los máximos de interferencia 441
 Condiciones de los mínimos de interferencia 441
 Condiciones normales 685
 Conducción por huecos 609
 Conductancia unilateral 614
 Conductibilidad calorífica 135
 Conductibilidad por electrones de impureza 610
 Conductibilidad por huecos de impureza 611
 Conductibilidad por impurezas 609
 Conductibilidad por impureza del tipo n 610
 Conductibilidad por impurezas del tipo p 611
 Conductibilidad de los metales, teoría electrónica clásica 264
 Conductibilidad del tipo p 609
 Conductibilidad eléctrica 265
 Conductividad eléctrica 265
 Conductividad térmica 168
 Conductor aislado 237
 Conductores de segunda clase 275
 Configuración de un sistema 56
 Configuración nula de un sistema 57
 Contracción de Lorentz 87
 Contraste de las franjas de interferencia 443
 Contorno conductor con corriente en el campo magnético 299
 Conversión interna 634
 Corriente de autoinducción 325
 Corriente eléctrica alterna cuasiestacionaria 367
 Corriente eléctrica de conducción 261
 Corriente eléctrica continua 262
 Corriente eléctrica de convección 261
 Corriente eléctrica, densidad 262
 Corriente eléctrica, sentido 261
 Corriente fotoeléctrica 517
 Corriente fotoeléctrica de saturación 365, 518
 Corriente de inducción 321
 Corriente orbital en el átomo 331
 Corriente periódica, valor efectivo 391
 Cristal, aristas 571
 Cristal, vértices 571
 Cristales biáxicos 492
 Cristales iónicos 571

- Cristales ópticamente negativos 495
- Cristales ópticamente positivos 495
- Cristales moleculares 571
- Cristales uniáxicos 492
- Cristalitos 571
- Cristalización de la sustancia 579
- Criterio de Rayleigh 445, 471
- Criterio de Lawson 648
- Criterio de estabilidad de los núcleos atómicos 623
- Cronodinámica cuántica 670
- Cronometraje de los sistemas de referencia 82, 85
- Cuantificación (cuantización) espacial 557
- Cuantos de energía 512, 513
- Cuasipartículas 600
- Cuerpo absolutamente inelástico (plástico) 18
- Cuerpo elástico 392
- Cuerpo perfectamente elástico 18
- Cuerpo externo 35
- Cuerpo gris 508
- Cuerpo homogéneo 36
- Cuerpo libre 34
- Cuerpo negro 507
- Cuerpo de referencia 19
- Cuerpo rígido (sólido) invariable 18
- Cuerpo termométrico 127
- Curva de potencial 63
- Curvas de resonancia 385
- Curvas de resonancia del circuito oscilante 389
- Charm (encanto) 665
- Choque 63
- Choque absolutamente inelástico 64
- Choque central 64
- Choque central directo absolutamente inelástico 65
- Choque central oblicuo perfectamente elástico 66
- Choque directo 64
- Choque directo central perfectamente elástico 66
- Choque oblicuo 64
- Choque perfectamente elástico 66
- Decremento logarítmico de amortiguación 380
- Defecto de masa 621
- Defecto de masa de un sistema 101
- Deformación de cortadura 576
- Deformación elástica de un sólido 574
- Deformación longitudinal por rotación (compresión) 575
- Deformación relativa 574
- Deformación residual del cuerpo 576
- Deformación de un sólido 573
- Deformación unidireccional por tracción (compresión) 575
- Deformaciones elásticas 392
- Degeneración de los gases 584
- Densidad espectral de la densidad volumétrica de la energía 506
- Densidad espectral de la densidad volumétrica de la energía fórmula de Planck 513
- Densidad espectral de emitancia energética de un cuerpo 507
- Densidad espectral de luminancia energética 515
- Densidad espectral de radiación en equilibrio 514

- Densidad espectral de radiancia 515
 Densidad lineal de las cargas 222
 Densidad lineal espacial 222
 Densidad lineal volumétrica 222
 Densidad de la corriente 262
 Densidad de la corriente de desplazamiento 350
 Densidad de la corriente de desplazamiento en el vacío 351
 Densidad de la corriente de polarización 351
 Densidad de un cuerpo 36
 Densidad media de un cuerpo 36
 Densidad de probabilidad 530
 Densidad volumétrica de la energía 329
 Densidad volumétrica de la energía cinética del medio 401
 Densidad volumétrica de la energía de un campo electromagnético 422
 Densidad volumétrica de potencia calorífica de la corriente 266
 Derivación 274
 «Des» 315
 Desarrollo de la función en serie de Fourier 374
 Descarga eléctrica disruptiva en un gas 282
 Descarga en un gas 280
 Descarga automantenida en un gas 281
 Descarga automantenida en un gas, tensión de encendido 282
 Descarga no automantenida en un gas 280
 Descarga no automantenida en un gas, corriente de saturación 281
 Desexcitación del átomo 427
 Desintegración radiactiva alfa 629
 Desintegración radiactiva beta 630
 Desintegración radiactiva beta positrónica 630
 Desionización del gas 286
 Deslizamiento relativo 576
 Desplazamiento 576
 Desplazamiento eléctrico 224
 Desplazamiento estático del péndulo 381
 Desplazamiento hacia el rojo gravitatorio 639
 Detectores 654
 Diafragma de apertura 471
 Diagrama de Debye 471
 Diagrama de Laue 471
 Diagrama polar direccional de emisión del oscilador (dipolo) 426
 Diagrama de tensión-deformación 576
 Diagrama termodinámico 139
 Diamagnéticos 337
 Diámetro eficaz de la molécula 129, 194
 Dicroísmo 498
 Dieléctrico neutro 242
 Dieléctrico polarizado 245
 Dieléctricos 242
 Dieléctricos polares 243
 Diferencia de marcha de la onda 409
 Diferencia de marcha óptica de dos ondas 448
 Diferencia de potencial de contacto 612
 Diferencia de potencial de contacto externa 613

- Diferencia de potencial de contacto intrínseca 613
 Diferencia de recorrido de la onda 409
 Difracción de Fraunhofer (de los rayos paralelos) 460
 Difracción de Fresnel 460
 Difracción de Fresnel en un disco pequeño 461
 Difracción de Fresnel en un pequeño orificio redondo 460
 Difracción de la luz 460
 Difracción de la luz, máximos principales 466
 Difracción de la luz, mínimos principales 465
 Difracción de la luz en un gran número de obstáculos principales e igualmente orientados 467
 Difracción de la luz en un orificio redondo 464
 Difracción de la luz en una red de difracción unidimensional 464
 Difracción de la luz en una rendija estrecha 462
 Difracción de los rayos paralelos 460
 Difusión 165
 Difusión de la luz 480
 Difusión de la luz por un medio turbio 480
 Difusión molecular de la luz 480
 Dilatación cúbica (volumétrica) 572
 Dilatación lineal 572
 Dilatación térmica de un sólido 572
 Dimensión de una magnitud física 672
 Dimensiones propias de un cuerpo 88
 Dinámica 17
 Dinámica relativista, ley fundamental 96
 Diodos semiconductores 617
 Dipolo eléctrico 222
 Dipolo eléctrico cuasielástico 243
 Dipolo eléctrico rígido 243
 Dipolo eléctrico rígido en el campo eléctrico homogéneo 243
 Disipación de la energía 61
 Disociación electrolítica 276
 Dispersión elástica de las partículas 654
 Dispersión inelástica de las partículas (reacciones) 654
 Dispersión de la luz 482
 Dispersión de la luz anómala 482
 Dispersión de la luz normal 482
 Dispersión de la luz, teoría electrónica clásica 483
 Dispersión de las ondas 405
 Dispersión Raman de la luz 560
 Dispersión rotativa de la luz 503
 Distribución de Boltzmann 154
 Distribución de Bose—Einstein 582
 Distribución de Fermi—Dirac 582
 Distribución de Maxwell 150
 Distribución de Maxwell—Boltzmann 155
 Distribución de partículas en un campo de potencial 155
 Doblete electrónico 661

- Doblete muónico 661
 Doblete taónico 661
 Dominios 251, 345
 Donadores 610
 Dosis de radiación 635
 Dosis de radiación, de exposición 635
 Dosis de radiación, intensidad 635
 Dualidad ondulatoria-corpúscular de las propiedades de las partículas 525
 Ebullición 212
 Ecuación calórica del estado de un sistema simple 133
 Ecuación de Clapeyron 130
 Ecuación de Clapeyron—Clausius 213
 Ecuación diferencial del movimiento de un punto material 39
 Ecuación diferencial de las oscilaciones forzadas del sistema lineal 383
 Ecuación de la termodinámica del movimiento relativo 115
 Ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico externo 519—520
 Ecuación de estado del gas perfecto 130
 Ecuación fundamental de la dinámica del movimiento de traslación 41
 Ecuación fundamental de la teoría cinética de los gases 149
 Ecuación de Maxwell, primera en forma general 347
 Ecuación de Maxwell, primera en forma diferencial 348
 Ecuación de Maxwell, segunda, en forma diferencial 352
 Ecuación de Maxwell, segunda en forma integral 352
 Ecuación de Mendeléiev—Clapeyron 131
 Ecuación de Mescherski 41
 Ecuación del movimiento relativo en un sistema de referencia asociado a la Tierra 117
 Ecuación de onda 399
 Ecuación de una onda elástica 390
 Ecuación de la onda esférica 399
 Ecuación de la onda plana 397
 Ecuación de la onda sinusoidal 397, 399
 Ecuación de Poisson 145
 Ecuación temporal de Schrödinger 530, 531
 Ecuación térmica de estado de un sistema simple 128
 Ecuación de Van der Waals 195
 Ecuaciones cinemáticas del movimiento del punto 20
 Efecto Cotton—Mouton 503
 Efecto Doppler en la acústica 411
 Efecto Doppler longitudinal para las ondas electromagnéticas 436
 Efecto Doppler para las ondas electromagnéticas 436
 Efecto Doppler transversal para las ondas electromagnéticas 436
 Efecto Faraday 504
 Efecto fotoeléctrico 517

- Efecto fotoeléctrico en los gases 517 518
 Efecto fotoeléctrico interno 517
 Efecto fotoeléctrico polifotónico (no lineal) 520
 Efecto de granalla 186
 Efecto Hall 311
 Efecto isotrópico en la superconductibilidad 593
 Efecto rectificador de contacto 614
 Efecto Kerr 502
 Efecto Knudsen 171
 Efecto Mie 481
 Efecto Mössbauer 636
 Efecto túnel 543
 Efecto túnel. paradoja 535
 Efecto Tyndall 480
 Efecto Vavílov—Cherenkov 487
 Efectos relativistas 81
 Efectos relativistas, contracción de Lorentz 88
 Efectos relativistas, retarda-
 ción de la marcha del tiempo 89
 Eje central de inercia 71
 Eje instantáneo de rotación del sólido 29
 Eje óptico de un cristal 472
 Eje de oscilación del péndulo físico 364
 Eje principal de inercia 73
 Eje de rotación del sólido 27
 Ejes libres de un cuerpo 80
 Elasticidad de forma 392
 Eléctricos de Seignette 251
 Electrodinámica 260
 Electrodinámica cuántica 670
 Electrodo 275
 Electrólisis 275
 Electrólisis, ley segunda 275
 Electrólisis, ley primera 275
 Electrólisis, ley unificada 276
 Electrólitos 275
 Electrón 215, 660. 684
 Electrón Compton 522
 Electrones periféricos 555
 Electrón de rechazo 523
 Electrones 649
 Electrones comunes (sociali-
 zados) 264
 Electrones de conducción 264
 Electrones de conversión 634
 Electrones de valencia 555
 Electroestática 215
 Electroestática, problema fundamental 220
 Elementos de transición 555
 Elementos transuránicos 643
 Elongación del péndulo 384
 Emisión de ondas 424
 Emitancia energética 506
 Escala centígrada internacio-
 nal de temperatura 127
 Escala termodinámica empí-
 rica 127
 Escala termodinámica de tem-
 peraturas 127, 179
 Emisividad de un cuerpo 507
 Emisividad integral de un
 cuerpo 506
 Energía 48
 Energía, ley de la conserva-
 ción 61, 137
 Energía cinética 54, 98
 Energía cinética de una mo-
 lécula de gas 150, 159
 Energía cinética de un punto
 material 362
 Energía cinética del sólido
 que gira 76
 Energía cinética de un sólido
 libre 77
 Energía de un condensador
 cargado 254

- Energía de un conductor cargado solitario 254
- Energía de disociación de la molécula 556
- Energía de enlace del núcleo 621
- Energía de enlace de un nucleón 621
- Energía de enlace de un sistema 101
- Energía específica de enlace nuclear 622
- Energía de Fermi 587
- Energía interna 132
- Energía interna de un gas perfecto 133, 141, 159
- Energía interna del gas de Van der Waals 133
- Energía intrínseca 329
- Energía ligada 182
- Energía libre 182
- Energía mecánica 60
- Energía mecánica, ley de conservación 60
- Energía mutua de las corrientes 331
- Energía de las ondas elásticas, densidad volumétrica 402
- Energía de las ondas electromagnéticas, densidad volumétrica 422
- Energía de la partícula, valores propios 532
- Energía potencia 56
- Energía potencial del medio elásticamente deformado, densidad volumétrica 402
- Energía potencial de un punto material en un campo de fuerzas centrales 58
- Energía potencial de un punto material en un campo de fuerzas homogéneo 57
- Energía potencial mutua de dos moléculas 190
- Energía potencial mutua de dos puntos materiales 59, 105
- Energía potencial de un punto material 363
- Energía potencial de un cuerpo elástico 59
- Energía de punto cero 537
- Energía de reacción nuclear 640
- Energía en reposo 100
- Energía total 99
- Energía total, relación con la masa relativista 99
- Energía total de un sistema termodinámico 131
- Enfoque débil de las partículas en los aceleradores 318
- Enfoque intenso (fuerte) de las partículas en los aceleradores 318
- Enlace interatómico covalente 537
- Enlace interatómico (químico) 555
- Enlace metálico 571
- Ensanchamiento Doppler de las rayas espectrales 437
- Entropía 180, 188
- Entropía, principio de Nernst 188
- Entropía, sentido estadístico (fórmula de Boltzmann) 183
- Entropía de un gas perfecto 181
- Entropía de un sistema cerrado 181
- Equilibrio estable de un sistema 62
- Equilibrio inestable de un sistema 62

- Equilibrio mecánico de un sistema 62
 Equilibrio termodinámico 126
 Equivalente biológico del roentgen (rem o reh) 636
 Equivalente electroquímico 275
 Equivalente químico 275
 Error accidental estándar 690
 Error sistemático estándar 690
 Error burdo (descuido) de medición 688
 Error cuadrático medio (estándar) 689
 Error estándar de la magnitud medida 690
 Error de medición 687
 Error reducido 691
 Error relativo 691, 689
 Errores accidentales de medición 688
 Errores instrumentales de medición 688
 Errores metódicos de medición 688
 Errores sistemáticos de medición 688
 Esfera de acción molecular 195
 Esfuerzo 537
 Esfuerzo normal 574
 Espacio recorrido 20
 Espectro de absorción de la luz 478
 Espectro continuo de absorción de la luz 478
 Espectro de rayas de absorción de la luz 478
 Espectro continuo de las frecuencias de oscilaciones 374
 Espectro discreto de las frecuencias de oscilaciones 374
 Espectro de dispersión de la luz 482
 Espectro energético de bandas de los electrones 603
 Espectro energético de una partícula 532
 Espectro energético discreto de una partícula 532
 Espectro de frecuencias 374, 405
 Espectro de masas de las partículas 313
 Espectro de la molécula, raya de anti-Stokes (violeta) 560
 Espectro de la molécula, rayas satélites rojas 560
 Espectro de la molécula, rayas satélites violetas 560
 Espectro de onda 405
 Espectros de difracción 467
 Espectros moleculares (de bandas) 558
 Espectros moleculares electrónico-vibracionales 559
 Espectros moleculares de rotación 559
 Espectros moleculares de vibración 559
 Espectros moleculares de vibración-rotación 559
 Espectros de rayas de los rayos X 564
 Espectrógrafo de masas 313
 Espectrometría de masas 313
 Espejos de Fresnel 441
 Espin del electrón 332
 Espiralidad del neutrino 653
 Estadística física 125
 Estadística clásica de Maxwell—Boltzmann 155
 Estadística cuántica 580
 Estadística cuántica de Bose—Einstein 581
 Estadística cuántica de Fermi—Einstein 582

- Estado crítico de la sustancia 197, 199
 Estado energético excitado 623
 Estado energético fundamental 623
 Estado de equilibrio 126
 Estado de equilibrio termodinámico 126
 Estado estacionario 127
 Estado fundamental del átomo 547
 Estática 17
 Estereorradián 675
 Evaporación 211
 Exponente adiabático 145
 Extrañeza 665

 Factor de absorción monocromática 507
 Factor de calidad de un sistema oscilante 381
 Factor de multiplicación neutrónica 645
 Factor de potencia 392
 Factor de reflexión de una onda electromagnética 433
 Factor de transmisión de las ondas electromagnéticas 434
 Fase (en la termodinámica) 197
 Fase de la onda plana 398
 Fase de las oscilaciones 359
 Fasotrón 317
 Fenómeno de autoinducción 329
 Fenómeno de inducción electromagnética 319
 Fenómeno de Kerr 502
 Fenómenos de transporte 165
 Fenómenos de transporte, tabla 169

 Ferroeléctricos 251
 Ferromagnéticos 343
 Fiabilidad del resultado de una medición 689
 Figuras de Lissajous 377—378
 Física de las altas energías 649
 Física estadística 127
 Física estadística clásica 147 y siguientes
 Física molecular 123
 Física de las partículas elementales 649 y siguientes
 Fisión espontánea de los núcleos 645
 Fisión de los núcleos, parámetro crítico de fisión 645
 Fluctuación absoluta 185
 Fluctuación relativa 185
 Fluctuaciones 184
 Flujo de desplazamiento 225
 Flujo de energía 403
 Flujo de calor específico 168
 Flujo específico de masa 165
 Flujo magnético de autoinducción del contorno 324
 Flujo magnético de inducción mutua 327
 Flujo de radiación 515
 Fluorescencia 562
 Foco caliente (emisor de calor) 173
 Focos coherentes 408
 Foco frío (receptor de calor) 174
 Fonón, casiimpulso 600
 Fonones 600
 Fórmula barométrica 155
 Fórmula de Boltzmann 183
 Fórmula de Debye—Langevin 246
 Fórmula de Einstein para el movimiento browniano 187
 Fórmula de Hopkinson 303

- Fórmula de Planck 513
 Fórmula de Rayleigh—Jeans 511
 Fórmula de Thomson 368
 Fórmula de Tsiolkovski 42
 Fosforescencia 562
 Fotocátodo 518
 Fotoconductibilidad 517
 Fotoelasticidad 502
 Fotoelectrones 517
 Fotoemisión 517
 Fotoluminiscencia 562
 Fotoluminiscencia, radiación de anti-Stokes 563
 Fotoluminiscencia, regla de Stokes 562
 Fotoluminiscencia, rendimiento cuántico 563
 Fotoluminiscencia, rendimiento energético 563
 Fotoluminiscencia, rendimiento energético, ley de Vavílov 563
 Fotón 521
 Fotón, impulso 521
 Fotón, masa 521
 Fotones 650
 Franjas de interferencia de igual inclinación 450
 Franjas de interferencia de igual espesor 450
 Frecuencias de batimiento 372
 Frecuencia cíclica 359
 Frecuencia cíclica fundamental 373
 Frecuencia cíclica de batimientos 372
 Frecuencia de Lengmur 367
 Frecuencia cíclica de la onda 297
 Frecuencia cíclica de las oscilaciones amortiguadas (convencional) 380
 Frecuencia de la onda 396
 Frecuencia de plasma 367
 Frecuencias propias de las oscilaciones 413
 Frecuencia de rotación 29
 Frecuencia umbral 519
 Frontera de la serie 547
 Fuente de energía eléctrica 261, 268
 Fuente de fem 388
 Fuente ideal 388
 Fuentes de ondas 393
 Fuentes de tensión 388
 Fuerza 33
 Fuerza de Ampère 288
 Fuerza centrífuga 115
 Fuerza centripeta 39
 Fuerza coercitiva 253, 344
 Fuerza electromotriz 269
 Fuerza fotoelectromotriz 518
 Fuerza de frenado 49
 Fuerza de gravedad 117
 Fuerza impulsante (excitatriz) 383
 Fuerza inercial de arrastre 115
 Fuerza inercial centrífuga 115
 Fuerza inercial de Coriolis 115
 Fuerza de interacción magnética de los conductores con corriente 299
 Fuerza de Lorentz 307
 Fuerza de Lorentz generalizada 309
 Fuerza magnetomotriz 303
 Fuerza motriz 49
 Fuerza motriz de autoinducción 323
 Fuerza del oscilador 486
 Fuerza reactiva 42
 Fuerza de resistencia 49
 Fuerza resultante 34
 Fuerzas activas 35
 Fuerzas centrales 58
 Fuerzas coulombianas 216
 Fuerzas cuasielásticas 362, 575

- Fuerzas de choque 64
 Fuerzas disipativas 52
 Fuerzas elásticas 574
 Fuerzas de elasticidad 59
 Fuerzas externas 35, 267
 Fuerzas giroscópicas 52
 Fuerzas de gravitación 102
 Fuerzas intermoleculares 189
 Fuerzas internas 35
 Fuerzas nucleares 624
 Fuerzas nucleares, independencia de la carga 624
 Fuerzas nucleares, radio de acción 624
 Fuerzas ponderomotrices 258
 Fuerzas potenciales 50
 Fuerzas de atracción 189
 Fuerzas de repulsión intermolecular 189
 Fuerzas de Van der Waals 192
 Fuerzas de dispersión de Van der Waals 192
 Fuerzas de inducción de Van der Waals 192
 Fuerzas de orientación de Van der Waals 192
 Función de distribución de Bose—Einstein 581
 Función de distribución de Fermi—Dirac 582
 Función de distribución de Maxwell—Boltzmann 155
 Función de la fuerza 52
 Función de Kirchhoff 509
 Función psi 530
 Funciones de estado 129
 Funciones propias 532

 Gas degenerado 584
 Gas electrónico degenerado en los metales 586
 Gas enrarecido 170
 Gas de Fermi 587
 Gas perfecto 129
 Gas real 189
 Gas de Van der Waals 194
 Generador electrostático lineal 315
 Generador magnetohidrodinámico (GMH) 284
 Generadores cuánticos ópticos 567
 Generadores de luz coherente (GLC) 567
 Giróscopo 74
 Giróscopo astático 75
 Giróscopo, centro de suspensión 75
 Giróscopo pesado 75
 Giróscopo pesado, precesión regular 75
 GLC, esquema de tres niveles 567
 Gluones 670
 Grado de elasticidad 574
 Grado de coherencia de la luz 445
 Grado de disociación 276
 Grado de ionización 283
 Granos cristalinos 471
 Grupo de ondas 405
 Grupos de bandas 558

 Haces de choque 654
 Hadrones 659, 664
 Hadrones estables 664
 Haz objeto (en holografía) 473
 Haz de referencia (en holografía) 473
 Hibridación 606
 Hidrógeno isoelectrónico 546
 Hidrogenoides 546
 Hipersonido 394
 Hipótesis cuántica de Planck 512

- Histéresis dieléctrica 253
 Histéresis magnética de los ferromagnéticos 343
 Holografía 432
 Holograma del objeto 473
 Homogeneidad del espacio 43
 Homogeneidad del tiempo 61
 Hueco positivo 609
- Iluminación energética 515
 Imanación remanente 344
 Imanación de saturación 344
 Impedancia 391
 Impedancia de onda del circuito oscilante 368
 Impulso del fotón 521
 Impulso de la fuerza 38
 Impulso de un punto material 37
 Impulso relativista 97
 Impulso relativista, ley de la conservación 97
 Impulso relativista, relación con la energía total de la partícula 99
 Impulso de un sistema 37
 Impulso de un sistema, ley de conservación 43
 Incidencia oblicua de la luz
 Índice absoluto de refracción de un medio 430
 Índice complejo de refracción del medio 478
 Índice principal de absorción del medio 477
 Índice relativo de refracción de dos medios 430
 Índice de refracción del cristal para el rayo extraordinario 494
 Índice de refracción del cristal para el rayo ordinario 494
- Índice del campo magnético 287
 Inducción eléctrica 224
 Inducción electromagnética 319
 Inducción magnética 287
 Inducción mutua 326
 Inductancia estática 324
 Inductancia mutua 327
 Inercia 32
 Infrasonido 394
 Ingravidez 120
 Instalaciones con haces de choque 656
 Instante inicial 20
 Instrumentos de medida 687
 Integral de Fourier 374
 Intensidad del campo, relación con el potencial del campo 233
 Intensidad del campo eléctrico 219
 Intensidad del campo electrostático del dipolo eléctrico 223
 Intensidad del campo electrostático de una carga puntual 221
 Intensidad del campo electrostático de un sistema de cargas puntuales 221
 Intensidad del campo magnético 342
 Intensidad de un campo de gravitación 104
 Intensidad de la corriente 262
 Intensidad energética de la luz 515
 Intensidad de ionización 283
 Intensidad de la luz 424
 Intensidad de magnetización 337
 Intensidad de una onda 404

- Intensidad de una onda electromagnética 423
 Intensidad de una onda esférica 300
 Intensidad de radiación de la luz 515
 Intensidad retardante del campo magnético 344
 Intensidad de rozamiento 167
 Interacción de conductores 298
 Interacción mecanocuántica de intercambio 557
 Interacción nuclear fuerte 620—621
 Interacciones directas 641
 Interacciones indirectas 641
 Intercambio de calor 135
 Intercambio de calor por conductibilidad calorífica 135
 Intercambio de calor por convección 135
 Intercambio de calor por radiación 135, 505
 Interferencia de la luz en películas delgadas 447
 Interferencia de ondas 408
 Intervalo espacio-tiempo 91
 Intervalo espacio-tiempo cuasiespacial 92
 Intervalo espacio-tiempo cuasitemporal 92
 Ionización 279
 Ionización del átomo 547
 Ionización volumétrica 282
 Ionización por choque 279
 Ionosfera 283
 Irradiancia 515
 Isoespín 664
 Isoespín, proyecciones 664
 Isomultipletes 664
 Isoterma 145
 Isoterma crítica de un gas real 196
 Isotropía del espacio 78
 Kelvin 674
 Kilogramo 673
 Lámina cuarto de onda 500
 Lámina onda 500
 Lámina semionda 500
 Leptones 660, 666
 Ley de adición de las velocidades en la cinemática clásica 47
 Ley de Ampère 288
 Ley de Avogadro 131
 Ley de Beer 477
 Ley de Biot—Savart—Laplace 290
 Ley de Boltzmann 155
 Ley de Bouguer 477
 Ley de Bouguer—Lambert 477, 566
 Ley de Bouguer—Lambert—Fabrikant 566
 Ley de Bruster 491
 Ley de conservación de la carga eléctrica 215
 Ley de conservación de la energía 61, 100, 137
 Ley de conservación de la energía mecánica de un sistema 60
 Ley de conservación del impulso 43
 Ley de conservación del impulso relativista 97
 Ley de conservación de la masa 36, 101
 Ley de conservación de la masa relativista 97
 Ley de conservación del momento de impulso 78
 Ley de la corriente total en una sustancia 341
 Ley de la corriente total en el vacío 301

- Ley de Coulomb 216
- Ley de desintegración radiactiva 626
- Ley de la dinámica del sólido que gira sobre un eje fijo 76
- Ley de distribución de las moléculas de gas perfecto según las velocidades 150
- Ley de distribución de los recorridos libres de las moléculas de un haz 157
- Ley de equipartición de la energía por grados de libertad 158
- Ley de Faraday 320
- Ley de Faraday para la electrólisis, primera 275
- Ley de Faraday para la electrólisis, segunda 275
- Ley de Fick 166
- Ley de Fourier 168
- Ley fundamental de la dinámica del punto material 537
- Ley fundamental de la dinámica del sólido que gira alrededor de un punto fijo 74
- Ley de Geiger—Nuttall 630
- Ley de la gravitación universal 102
- Ley de Hooke 392, 574
- Ley de Hooke para la deformación volumétrica 392—393
- Ley de la inducción electromagnética 320
- Ley de la inercia 32
- Ley de Joule—Lenz 272
- Ley de Joule—Lenz en forma diferencial 266
- Ley de Kirchhoff 508
- Ley de Kirchhoff para los circuitos eléctricos 272
- Ley de Kerr 502
- Ley de Lambert 515
- Ley de Maxwell (distribución de las moléculas por velocidades) 150
- Ley de Moseley 564
- Ley de movimiento del centro de inercia 41
- Ley de Newton, primera 31
- Ley de Newton, segunda, 37
- Ley de Newton, tercera 39
- Ley de Newton de rozamiento interno 167
- Ley de Ohm para un circuito cerrado 271
- Ley de Ohm para la densidad de corriente (en forma diferencial) 265
- Ley de Ohm para la densidad de la corriente en los electrolitos 278
- Ley de Ohm generalizada 270
- Ley de propagación rectilínea de la luz 458
- Ley de Rayleigh 480
- Ley de reflexión de la luz 457
- Ley de reflexión de las ondas electromagnéticas 431
- Ley de refracción de la luz 457
- Ley de refracción de las ondas electromagnéticas 431
- Ley de la relación (equivalencia) entre la masa y la energía 99
- Ley de Stefan—Boltzmann 509
- Ley de Stoletov 519
- Ley de la suma de velocidades en la cinemática relativista 94
- Ley de la termodinámica, primera 137

- Ley de la termodinámica, segunda 178
 Ley de la termodinámica, tercera 188
 Ley unificada de Faraday para las electrólisis 276
 Ley de la variación del impulso del sistema 40
 Ley de variación del momento del impulso de un sistema 74
 Ley de Wiedemann—Franz 266
 Leyes de desplazamiento de Fajans y Soddy 628
 Leyes de Kepler 110, 111
 Leyes de Kirchhoff para los circuitos magnéticos 304
 Ligadura 35
 Límite del espectro continuo 563
 Límite de fluencia 576
 Límite de la serie 547
 Límite de proporcionalidad 575
 Línea de acción de la fuerza 34
 Línea de choque 63
 Líneas de fuerza del campo eléctrico 220
 Líneas de fuerza del campo magnético 288
 Líneas de inducción magnética 287
 Líneas de intensidad del campo eléctrico 220
 Líquido, movilidad de las moléculas 205
 Líquido, presión sobre la superficie curvada 210
 Líquido en ebullición 197
 Líquido que moja 208
 Líquido que no moja 208
 Líquido recalentado 198
 Líquidos 201
 Líquidos, ángulo de contacto 208
 Líquidos, difusión 204
 Líquidos, energía de activación 204
 Líquidos, fluidez 203
 Líquidos, ordenación próxima 202
 Líquidos, presión interna 206
 Líquidos, regiones cibotáxicas 202
 Líquidos, rozamiento interno 206
 Líquidos, tensión superficial 207
 Líquidos, teoría de los huecos 202
 Líquidos, tiempo de relajación 203
 Longitud de coherencia 440
 Longitud de la coherencia espacial 447
 Longitud de enlace de los átomos en la molécula 556
 Longitud de onda 398
 Longitud de onda de Compton para el electrón 522, 523
 Longitud de onda de Compton del neutrón 684
 Longitud de onda de Compton del protón 684
 Longitud de onda de la luz en el vacío 448
 Longitud óptica del camino 448
 Longitud reducida de un péndulo físico 366
 Longitud del tren armónico 440
 Luminancia energética 515
 Luminiscencia 561

- Luminóforo 561
 Luz natural 489
 Luz parcialmente polarizada 489
 Luz no polarizada 489
 Luz visible 429

 Macrocorrientes 340
 Magnéticos 331
 Magnetización 337
 Magnetón de Bohr 333
 Magnetón nuclear 619, 684
 Magnitudes físicas cuantizadas (cuantificadas) 534
 Mancha de Poisson 461
 Masa 651
 Masa relativista 96
 Masa relativista, dependencia respecto de la velocidad 96
 Masa relativista, ley de conservación 97
 Masa de un punto material 35
 Masa en reposo 96
 Masa polar 130
 Máser 567
 Materiales magnéticos blandos 345
 Materiales magnéticos duros 345
 Máximos de interferencia 455
 Máximos principales de interferencia 453
 Mecánica 17
 Mecánica clásica 17
 Mecánica cuántica 17, 527
 Mecánica newtoniana 17
 Mecánica relativista 17, 81
 Media aritmética 689
 Medición 542
 Medición directa 683
 Medición indirecta 687

 Medio continuo 394
 Medio homogéneo 395
 Medio isótropo 395
 Medio lineal 395
 Menisco 208
 Metales 571
 Método de choque de haces 319
 Método de dispersión 654
 Método estadístico de investigación 125
 Método termodinámico de investigación 125
 Método de Young de realización de la interferencia 446
 Metro 673
 Microcampos promediados 374
 Microcorrientes (corrientes moleculares) 340
 Microscopio, poder resolutivo 472
 Mínimos de interferencia 453, 454
 Moderadores 643
 Modulación de amplitud 375
 Modulación de fase 375
 Modulación de frecuencia 375
 Modulación de oscilaciones 374
 Módulo de cizallamiento 576
 Módulo de elasticidad volumétrica 393
 Mol 674
 Molécula 555
 Moléculas atómicas (homopolares) 557
 Molécula iónica (heteropolar) 557
 Momento eléctrico del dipolo 223
 Momento eléctrico inducido de una molécula 243
 Momento de una fuerza con respecto a un eje fijo 68

- Momento de una fuerza con respecto a un punto fijo 68
- Momento del impulso de un cuerpo con respecto a un punto fijo 70
- Momento de impulso orbital en el átomo 332
- Momento de impulso propio del electrón 332
- Momento de impulso de un sistema, ley de conservación 78
- Momento del impulso de un sistema respecto de su centro de inercia 71
- Momento del impulso de un sistema con respecto a un eje fijo 69
- Momento de impulso orbital de un átomo 334
- Momento de inercia de un cuerpo 72
- Momento de inercia de un cuerpo, tabla 73
- Momento de inercia de un cuerpo, teorema de Steiner 72
- Momento de inercia de un sistema mecánico 71
- Momento magnético de un contorno con corriente 294
- Momento magnético cuadrupolar 620
- Momento magnético del electrón 684
- Momento magnético del espín 333
- Momento magnético del núcleo 619
- Momento magnético orbital de un átomo 333
- Momento magnético orbital del electrón 331—332
- Momento magnético del protón 684
- Momento magnético de un solenoide 297
- Momento resultante de un sistema de fuerzas con respecto al centro de inercia 71
- Momento resultante de un sistema de fuerzas con respecto a un eje fijo 69
- Momento resultante de un sistema de fuerzas con respecto a un punto fijo 68
- Momentos de inercia centrífugos de un cuerpo 72
- Momentos principales centrales de inercia 74
- Momentos principales de inercia del cuerpo 74
- Monocristal 471
- Monocristales 571
- Móvil perpetuo de primera especie 138
- Móvil perpetuo de segunda especie 178
- Movilidad de moléculas en los líquidos 205
- Movimiento absoluto 113
- Movimiento acelerado de un punto 23
- Movimiento aperiódico 382
- Movimiento browniano 186
- Movimiento de un cuerpo de masa variable 41
- Movimiento curvilíneo de un punto 20
- Movimiento por inercia 32
- Movimiento mecánico 17
- Movimiento de las partículas cargadas en el campo magnético 306
- Movimiento plano de un punto 20

- Movimiento plano (plano paralelo) de un sólido 31
- Movimiento rectilíneo de un punto 20
- Movimiento relativo 113
- Movimiento relativo, ecuación fundamental de la dinámica de un punto 114—115
- Movimiento retardado de un punto 23
- Movimiento de rotación de un sólido 27, 29
- Movimiento de un sólido libre 77
- Movimiento térmico 123
- Movimiento de traslación de un sólido 27
- Movimiento uniforme de un punto 23
- Movimiento uniformemente acelerado 26
- Movimiento uniformemente retardado 26
- Movimiento uniformemente variado 26
- Movimientos independientes 21
- Muerte térmica del Universo 184
- Muones 90, 660
- Número integral del cuerpo 509
- Neutrino electrónico 6660
- Neutrino muónico 6660
- Neutrino taónico 6600
- Neutrones 650
- Neutrones de fisión 6445
- Neutrones fríos y ultrafríos 643
- Neutrones inmediatos (secundarios) 645
- Neutrones lentos 643
- Neutrones rápidos 643
- Neutrones retardados 645
- Neutrones térmicos 643
- Nitidez de las franjas de interferencia 443
- Nivel energético, anchura natural 637
- Niveles energéticos colectores (aceptores) 611
- Niveles energéticos locales 610
- Niveles de energía 535
- Niveles de energía, casicontinuidad 535
- Niveles de energía de las impurezas 610
- Nodos de la onda estacionaria 411
- Normal principal 20
- Nuclón 619, 650
- Núcleo 619
- Núcleo ascendiente del átomo 625
- Núcleo del átomo, espín 619
- Núcleo-blanco 640
- Núcleo compuesto del átomo 641
- Núcleo descendiente 625
- Núcleo hijo 625
- Núcleo padre del átomo 625
- Núcleo precursor del átomo 625
- Núcleos especulares de átomos 624
- Nodo de un circuito eléctrico 272
- Nudo del circuito magnético 304
- Nudos de la red cristalina 124
- Número cuántico de espín 552
- Número cuántico interno (total) de espín 619

- Número cuántico principal 547
- Número de Debye 284
- Número de Faraday 276, 686
- Número de grados de libertad de un cuerpo 157
- Número de grados de libertad de una molécula 158
- Número de grados de libertad de un sistema 21
- Número magnético de espín 551, 552
- Número másico (de masa) del núcleo del átomo 618
- Número medio de colisiones de una molécula 156
- Número de onda 398
- Números cuánticos 535
- Ojo, límite angular de resolución 472
- Onda elástica longitudinal 394
- Onda elástica superficial 395
- Onda elástica transversal 394
- Onda estacionaria, amplitud 411
- Onda estacionaria, longitud 411
- Onda extraordinaria 493
- Onda monocromática 420
- Onda monocromática plana 420
- Onda monocromática plana polarizada circularmente 420
- Onda monocromática plana polarizada elípticamente 420
- Onda ordinaria 493
- Onda plana 397
- Onda plana estacionaria 411
- Onda de referencia 473
- Onda señal (en holografía) 473
- Onda sinusoidal 396, 400
- Ondas acústicas 393
- Ondas coherentes 408
- Ondas coherentes parcialmente 444
- Ondas de De Broglie 528
- Ondas de De Broglie, sentido probabilista estadístico 530
- Ondas elásticas 393
- Ondas elásticas transversales, velocidad de fase 401
- Ondas electromagnéticas 416
- Ondas electromagnéticas, efecto Doppler 436
- Ondas electromagnéticas transversales 418
- Ondas estacionarias 410
- Ondas hertzianas 427
- Ondas mecánicas 393
- Ondas móviles 395
- Ondas *p* 431
- Ondas progresivas 395
- Ondas *s* 431
- Ondas sonoras 393
- Ondas sonoras, velocidad de fase 400
- Ondas transversales, velocidad de propagación a lo largo de una cuerda 401
- Optica 438
- Optica cuántica 517
- Optica no lineal 438
- Optica ondulatoria 438
- Orden del máximo principal 453, 455, 464
- Orden del mínimo de interferencia 409
- Orden remoto (en los cristales) 571
- Ordenación próxima (en los líquidos) 202

- Oscilación completa 359
 Oscilación elípticamente polarizada 376
 Oscilaciones amortiguadas 378
 Oscilaciones amortiguadas, coeficiente de resistencia 379
 Oscilaciones amortiguadas, decremento de amortiguación 380
 Oscilaciones amortiguadas, ecuación diferencial 379
 Oscilaciones amortiguadas, tiempo de relajación 380
 Oscilaciones amortiguadas libres en un circuito oscilante eléctrico 379
 Oscilaciones amortiguadas libres de un péndulo de resorte 379
 Oscilaciones armónicas, amplitud 359
 Oscilaciones armónicas, ecuación diferencial 361
 Oscilaciones armónicas, fase 359
 Oscilaciones armónicas, frecuencia 358
 Oscilaciones armónicas mecánicas 362
 Oscilaciones armónicas, método de diagramas vectoriales 361
 Oscilaciones cofásicas 371
 Oscilaciones cuasiperiódicas 374
 Oscilaciones cuasiperiódicas electromagnéticas 358
 Oscilaciones cuasiperiódicas electromecánicas 358
 Oscilaciones eléctricas forzadas 387
 Oscilaciones eléctricas forzadas en el circuito, ecuación diferencial 380
 Oscilaciones electromagnéticas del circuito 369
 Oscilaciones forzadas 358
 Oscilaciones forzadas estacionarias 383
 Oscilaciones inarmónicas periódicas 373
 Oscilaciones incoherentes 371
 Oscilaciones isocrónicas 365
 Oscilaciones libres 358
 Oscilaciones libres de electrones en el plasma 366
 Oscilaciones mecánicas 358
 Oscilaciones neutrónicas 664
 Oscilaciones en oposición de fase 371
 Oscilaciones parcialmente coherentes, composición 444
 Oscilaciones periódicas 358
 Oscilaciones periódicas complejas 374
 Oscilaciones polarizadas circularmente 376
 Oscilaciones polarizadas linealmente 376
 Oscilaciones propias 358
 Oscilaciones de punto cero 538
 Oscilador 425
 Oscilador armónico lineal 363, 425
 Oscilador armónico lineal cuántico 535
 Oscilador lineal (unidimensional) 535
 Pantallas complementarias 467
 Paquete de ondas 405
 Par de fuerzas 70
 Paradoja del efecto túnel 545

- Paradoja de los relojes (del tiempo) 91
- Parámetros críticos del estado 196
- Parámetros críticos del estado del gas de Van der Waals 199
- Parámetros de degeneración 584
- Parámetros de estado de un sistema 126
- Parámetros externos de estado de un sistema 128
- Parámetro de fisión crítico del núcleo 645
- Parámetros internos de estado de un sistema 128
- Partícula libre (en mecánica cuántica) 532
- Partícula del medio 394
- Partícula en un pozo de potencial 533
- Partículas elementales 649
- Partículas compuestas 667
- Partículas elementales, color 670
- Partículas elementales, desintegración 651
- Partículas elementales, espín 652
- Partículas elementales, intensidad de una interacción 658
- Partículas elementales, generaciones 667
- Partículas elementales, interacción débil 657
- Partículas elementales, interacción electromagnética 657
- Partículas elementales, interacción fuerte 657
- Partículas elementales, interacciones fundamentales 657
- Partículas elementales, leyes de conservación 654
- Partículas elementales, momento magnético 652
- Partículas elementales, resonancias 664
- Partículas elementales, simetría cuarque—leptón 667
- Partículas elementales, tablas 662, 663
- Partículas elementales con encanto 651
- Partículas elementales extrañas 650
- Partículas elementales con hechizo 651
- Partículas fundamentales 666
- Partículas fundamentales, portadores de las interacciones 669
- Partículas fundamentales, (cuarques) 667
- Partículas verdaderamente neutras 653
- Péndulo físico 364
- Péndulo matemático 365
- Péndulo de resorte 363
- Percusión 63
- Perímetro de contacto 208
- Período de batimiento 372
- Período convencional de las oscilaciones amortiguadas 380
- Período medio 627
- Período de la red de difracción 464
- Período de rotación 29
- Período de semidesintegración 627
- Permeabilidad magnética de la sustancia 342
- Permitividad dieléctrica compleja del medio 485

- Permeabilidad relativa 250
 Peso de un cuerpo 119
 Pirometría óptica 514
 Pirómetro óptico 514
 Pirómetro de radiación 515
 Plano de incidencia 430
 Plano de las oscilaciones 421
 Plano osculador 20
 Plano de polarización 421
 Plano principal de un cristal uniáxico 492
 Planos atómicos del cristal 470
 Planos reticulares del cristal 470
 Plasma 198
 Plasma de alta temperatura 283
 Plasma débilmente ionizado 283
 Plasma de descarga gaseosa 286
 Plasma gaseoso 284
 Plasma isotérmico 285
 Plasma moderadamente ionizado 283
 Plasma totalmente ionizado 283
 Plasma, grado de ionización 283
 Plasma, propiedades 184
 Pleocroísmo 498
 Poder absorbente de un cuerpo 507
 Poder emisor de un cuerpo 507
 Poder resolutivo del instrumento óptico 471
 Polarizabilidad de la molécula 243
 Polarización (vector de polarización) 245
 Polarización del dieléctrico 145
 Polarización del dieléctrico por deformación 245
 Polarización del dieléctrico, electrónica 245
 Polarización del dieléctrico, espontánea de dominios 251
 Polarización del dieléctrico, iónica 245
 Polarización del dieléctrico por orientación 245
 Polarización de la luz 489
 Polarización de la luz, constante de rotación 503
 Polarización de las ondas sinusoidales transversales 396
 Polarizador, plano principal 490
 Polarizadores 489
 Polaroides 498
 Policristales 571
 Portadores de carga 261
 Posición inicial 20
 Positrón 243, 653
 Postulados de Bohr 549
 Postulado de los estados estacionarios 549
 Postulados de la teoría especial de la relatividad 81, 82
 Potencia 53
 Potencia activa 391
 Potencia instantánea 53
 Potencia instantánea de la corriente 391
 Potencia instantánea media 53
 Potencial de campo electrostático 229, 231
 Potencial de campo electrostático, relación con la intensidad 233

- Potencial del campo electrostático de un sistema de cargas puntuales 230
 Potencial de ionización 279, 547
 Potencial retardador 518
 Pozo de potencial 533
 Presión 126
 Presión interna 195
 Presión de la luz 521
 Presión de las ondas electromagnéticas 424
 Principio de autoestabilización 317
 Principio (teorema) de Babinet 467
 Principio de correspondencia de Bohr 535
 Principio de equilibrio detallado 508
 Principio de exclusión (de Pauli) 552
 Principio de Huygens 456
 Principio de Huygens—Fresnel 457
 Principio de imposibilidad de alcanzar el cero absoluto 189
 Principio de la independencia de la acción de los campos eléctricos 221
 Principio de la independencia de la acción de las fuerzas 39
 Principio de indistinguibilidad de las partículas idénticas 580
 Principio de invariancia de la velocidad de la luz 82
 Principio de liberación 35
 Principio local de la equivalencia 121
 Principio mecánico de la relatividad 48
 Principio de Nernst 188
 Principio de Pauli 552
 Principio relativista de Einstein 81
 Principio de la relatividad de Galileo 48
 Principio de superposición de los campos eléctricos 221
 Principio de superposición de los campos de gravitación 105, 107
 Principio de superposición de las ondas 405
 Principio de la termodinámica para un gas ideal 142
 Principio de la termodinámica, primero 137
 Principio de la termodinámica, segundo 178
 Principio de la termodinámica, tercero 188
 Prisma polarizador 497
 Probabilidad termodinámica de un estado 183
 Problema fundamental de la electrodinámica 346
 Proceso termodinámico cerrado 171
 Proceso termodinámico compensador 177
 Proceso termodinámico cuasiestático 129
 Proceso termodinámico en desequilibrio 129
 Proceso termodinámico en equilibrio 129
 Proceso termodinámico irreversible 176
 Protón 215
 Pulsaciones 372
 Punto crítico 196
 Punto de Curie 252, 344
 Punto de ebullición 213

- Punto material 18
 Punto de suspensión del péndulo físico 364
 Radiación en equilibrio 505
 Radiación forzada (inducida, estimulada) 565
 Radiación infrarroja 428
 Radiación isótropa 506
 Radiación luminiscente 562
 Radiación óptica 428
 Radiación Roentgen 429
 Radiación térmica 505
 Radiación ultravioleta 429
 Radiación Vavilov—Cherenkov 487
 Radiación visible de la luz 429 -
 Radiación X, límite de espectro continuo 563
 Radiación X característica 564
 Radiactividad artificial 625
 Radiactividad natural 625
 Radián 674
 Radiancia energética 515
 Radio de apantallamiento de Debye 283
 Radio de curvatura 20
 Radios de acción molecular 195
 Raya de Stokes (roja) 560
 Rayas espectrales, ensanchamiento Doppler 437
 Rayo 396
 Rayo extraordinario 493
 Rayo incidente 430
 Rayo ordinario 493
 Rayo reflejado 430
 Rayo refractado 430
 Rayos gamma 633
 Rayos Roentgen 563
 Rayos X 429, 563
 Rayos X blancos (de frenado) 563
 Reacción de fisión 645
 Reacción de fisión en cadena 645
 Reacciones de ligadura 35
 Reacciones nucleares 639
 Reacciones nucleares, canales de acceso 640
 Reacciones nucleares, sección transversal eficaz 640
 Reacciones nucleares endotérmicas 640
 Reacciones nucleares exotérmicas 640
 Reacciones termonucleares 646
 Reacciones termonucleares de fusión 646
 Reactancia del circuito 391
 Recombinación 276, 279
 Reconstrucción de la imagen de un objeto 474
 Recorrido libre medio de las moléculas 156
 Rechazo del núcleo atómico 637
 Red cristalina 571
 Red cristalina, período 571
 Red de difracción 464
 Red de difracción espacial 468
 Red de difracción tridimensional 468
 Reflexión interna total de ondas electromagnéticas, ángulo límite (crítico) 434
 Reflexión (total) interna 434
 Refracción doble 492
 Regiones cibotáxicas 202
 Reglas de cálculo de las cifras 697

- Reglas para el cálculo de los errores en las mediciones directas 693
 Reglas de redondeo 697
 Regla de los contornos 273
 Regla de cuantificación de las órbitas 549
 Regla de Dulong y Petit 593
 Regla de las frecuencias 549
 Regla de Lenz 321
 Regla de la mano izquierda 289
 Regla de los nudos 272
 Regla del tornillo 28
 Reh 636
 Relación de Gell—Mann—Nishijima 665
 Relación giromagnética nuclear 620
 Relación giromagnética de los momentos de espín 333
 Relación giromagnética de los momentos orbitales 332
 Relaciones de incertidumbre de Heisenberg 540
 Relaciones de indeterminación de Heisenberg 540
 Rem 636
 Resistencia adicional 274
 Resistencia eléctrica 265
 Resistencia magnética 303
 Resistencia magnética, conexión en paralelo 304
 Resistencia magnética, conexión en serie 303
 Resistencia máxima a la tracción 576
 Resistencia óhmica 391
 Resistencia del tramo del circuito eléctrico 270
 Resistividad eléctrica del electrólito 278
 Resonancia mecánica 385
 Resonancias bariónicas 664
 Resonancias mesónicas 664
 Retardación relativista de la marcha del tiempo 89
 Reversibilidad de los movimientos mecánicos 176
 Roentgen 635
 Roentgenograma de la muestra 471
 Rotación específica 503
 Rotación inercial (libre) 80
 Rotación magnética del plano de polarización de la luz 504
 Rotación del sólido alrededor de un eje fijo 27
 Rotación del sólido alrededor de un punto fijo 29
 Rotación uniforme 29
 Rozamiento interno 167
 Salto de potencial 612
 Saturación del enlace covalente 557
 Saturación de imanación 340
 Saturación magnética del ferromagnético 343
 Sección eficaz 654
 Sección principal de un cristal uniáxico 492
 Sección de la reacción 640
 Segundo 673
 Semiconductores extrínsecos por defecto 611
 Semiconductores extrínsecos por exceso 610
 Semiconductores de tipo *n* 610
 Semiconductores de tipo *p* 611
 Semiperíodo 627
 Serie de Fourier 374
 Serie de Balmer 547

- Serie de Brackett 547
 Serie de Humphrey 547
 Serie de Lyman 547
 Serie de Paschen 547
 Serie de Pfund 547
 Seudovectores 28
 Shuntado 274
 Sincrofasotróon 318
 Sincronización de la marcha de relojes 85
 Sincrotrón 317
 Sistema absoluto de unidades CGS 679
 Sistema absoluto de unidades de Gauss 679
 Sistema aislado (en mecánica) 35
 Sistema aislado (en termodinámica) 137
 Sistema aislado adiabáticamente 137
 Sistema aislado (en mecánica) 35
 Sistema cerrado (en termodinámica) 137
 Sistema completo de ecuaciones de Maxwell 355
 Sistema conservativo 52
 Sistema disipativo 61
 Sistema eléctricamente aislado 215
 Sistema electrostático de unidades 679
 Sistema emisor 424
 Sistema heliocéntrico de referencia 32
 Sistema Internacional de unidad (SI) 673 y siguientes
 Sistema mecánico 18
 Sistema periódico de los elementos de Mendeléiev 553
 Sistema de puntos materiales 18
 Sistema de referencia 19
 Sistema de referencia inicial 32
 Sistema de referencia del laboratorio 32
 Sistema termodinámico aislado (cerrado) 137
 Sistema termodinámico aislado adiabáticamente (en relación al calor) 137
 Sistema termodinámico simple 126
 Sistema de unidades, prefijos 673
 Solenoide 297
 Sólido 470
 Sólido amorfo 470
 Sólido cristalino 470
 Soluciones sólidas 579
 Sonidos audibles 394
 Subgrupo (subcapa) de electrones en el átomo 554
 Sublimación 577
 Sustancia activa 172
 Sustancias ópticamente activas 503
 Sustancias paramagnéticas 338
 Superconductividad 592
 Superconductividad, campo magnético crítico 593
 Superconductividad, efecto isotrópico 593
 Superconductores de II orden 596
 Superficie de cizallamiento 574
 Superficie de cortadura 574
 Superficie equipotencial 235
 Superficie de Gauss 226
 Superficie de la onda 386
 Superficie radial de la onda en un cristal 494
 Superficie tangencial 574

- Superfluidez 200
 Superfluidez del helio 200
 Susceptibilidad dieléctrica compleja del medio 485
 Susceptibilidad dieléctrica de la sustancia 246
 Susceptibilidad magnética 338

 Telescopio, límite angular de resolución 472
 Telescopio, poder resolutivo 472
 Temperatura 127
 Temperatura, cero absoluto 127
 Temperatura, escalas 127
 Temperatura, imposibilidad de alcanzar el cero absoluto 189
 Temperatura absoluta (termodinámica) 127
 Temperatura característica 598
 Temperatura característica de Debye 601
 Temperatura de color 516
 Temperatura de cristalización 579
 Temperatura crítica 196
 Temperatura de degeneración 585
 Temperatura de ebullición 213
 Temperatura electrónica 286
 Temperatura de fusión 577
 Temperatura de luminancia 516
 Temperatura de radiación 516
 Temperatura termodinámica (absoluta) 127
 Temperatura de transición al estado superconductor 592
 Temperaturas bajas 601
 Tensión 575
 Tensión eléctrica 270
 Tensión eléctrica disruptiva 282
 Tensión eléctrica de encendido 292
 Tensión eléctrica de retardo 518
 Teorema (principio) de Babinet 467
 Teorema de Carnot 179
 Teorema de Koenigs 56
 Teorema de Larmor 336
 Teorema de Ostrogradski—Gauss para el campo electrostático en el dieléctrico 249
 Teorema de Ostrogradski—Gauss para el campo electrostático en el vacío 226
 Teorema de Ostrogradski—Gauss para el campo magnético 302
 Teorema de Steiner (sobre la traslación de los ejes de inercia) 72
 Teoría cinética de los gases 147
 Teoría cinético-molecular de la estructura de la materia 123
 Teoría cuántica de la conductibilidad de los metales 590
 Teoría electrónica clásica de la conductibilidad de los metales 264
 Teoría electrónica clásica de los metales, defectos 266
 Teoría especial de la relatividad 81
 Teoría especial de la relatividad, postulados 81
 Teoría especial de la relatividad, transformación de las velocidades, aceleraciones 95

- Teoría especial de la relatividad, transformación de las velocidades 93
- Teoría especial de la relatividad, transformaciones de Lorentz 86
- Teoría general de la relatividad 108
- Teoría relativista 81
- Teoría relativista de la gravitación 108
- Termodinámica 126
- Tiempo característico 659
- Tiempo de coherencia de la onda no monocromática 440
- Tiempo medio de desexcitación del átomo 427
- Tiempo propio del objeto 89
- Tiempo de relajación 371, 380
- Tipo de estadística 652
- Toroide 296
- Trabajo 134, 135
- Trabajo 134, 135
- Trabajo en un campo magnético 305
- Trabajo de expansión 134
- Trabajo de expansión, representación gráfica 139
- Trabajo de la fuerza 49
- Trabajo de ionización 279
- Trabajo de salida 612
- Tramo activo del circuito eléctrico 270
- Tramo pasivo del circuito eléctrico 270
- Transformación adiabática de un gas perfecto 144
- Transformación isobárica de un gas perfecto 143
- Transformación isocora de un gas perfecto 143
- Transformación isotérmica de un gas perfecto 144
- Transformación del gas ideal, tabla 146
- Transformación de Lorentz 86
- Transformación termodinámica adiabática 129
- Transformación termodinámica en equilibrio, representación gráfica 139
- Transformación termodinámica isobárica 129
- Transformación termodinámica isocora 129
- Transformación termodinámica isotérmica 129
- Transformación termodinámica reversible 175
- Transformaciones de Galileo 45
- Transformaciones «iso» 129
- Transición de fase de I orden, 198
- Transición de fase de I orden, ecuación de Clapeyron—Clausius 213
- Transición de fase de II orden 200
- Transistores 617
- Transparencia de una barrera de potencial 543
- Trayectoria de un punto 20
- Trenes de ondas 439
- Tres familias radiactivas 628
- Ultrasonido 394
- Umbral fotoeléctrico 519
- Unidad de magnitud física 673
- Unidad de magnitud física derivada 673
- Unidad de magnitud física fundamental 673

- Unidad de masa atómica 684
 Unión electrón—hueco ($p - n$) 615—616
- Vacío 170
 Valor numérico de la magnitud 683
 Valores medios de las magnitudes físicas 125
 Vapor 189
 Vapor húmido 197
 Vapor saturado, presión sobre la superficie curvada del líquido 211
 Vapor saturado seco 197
 Vapor sobresaturado 198
 Vector de densidad del flujo de energía de la onda 403—404
 Vector luz 438
 Vector magnetización 337
 Vector de onda 398
 Vector de polarización (polarización) 245
 Vector de Poynting 423
 Vector resultante de las fuerzas externas 40
 Vector traslación 21
 Vector de Umov 422
 Vectores axiales 28
 Vectores polares 28
 Velocidad absoluta media del movimiento variado 23
 Velocidad angular de precesión de Larmor 335
 Velocidad aritmética media de las moléculas 153
 Velocidad de arrastre 114
 Velocidad característica de un cohete 43
 Velocidad característica de un cohete compuesto 43
 Velocidad del centro de inercia 37
 Velocidad circular 111
 Velocidad cósmica primera 111
 Velocidad cósmica segunda 111
 Velocidad cósmica tercera 112
 Velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas 149
 Velocidad de deriva de los iones 278
 Velocidad de evaporación 211
 Velocidad de fase 400
 Velocidad de fase de las ondas sonoras 400
 Velocidad de grupo 405
 Velocidad instantánea de un punto 22
 Velocidad lineal 29
 Velocidad de la luz en el vacío 82, 95
 Velocidad media de un punto 24
 Velocidad parabólica 111
 Velocidad del péndulo 385
 Velocidad más probable de las moléculas de un gas 152
 Velocidad radial de un punto 24
 Velocidad radial de la onda 494
 Velocidad del rayo extraordinario 494
 Velocidad del rayo de la fuente 416
 Velocidad del rayo ordinario 494
 Velocidad relativa media de las moléculas 154
 Velocidad relativa de dos partículas en la cinemática relativista 97

- Velocidad sectorial de un punto 24
 Velocidad del sonido en un gas o líquido 400
 Velocidad tangencial de un punto 24
 Velocidad del transporte de la energía por la onda 403
 Velocidades relativistas 81
 Vibrador simple 425
 Vida media 627, 651
 Vientres de la onda estacionaria 44
 Viscosidad 167
 Visibilidad de las franjas de interferencia 443
 Volumen específico 126
 Volumen molar 130
 Zonas de Fresnel 458

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Matvéev A.

Electricidad y magnetismo

7. edición, 1951
1.128 páginas
(1951 - 2)

La exposición del material en este trabajo se basa en las representaciones relativistas acerca del espacio y el tiempo. Esto permite, desde el principio, revelar la naturaleza relativista del campo magnético, así como representar el campo eléctrico y el campo magnético en su unidad. Por lo tanto, hay dos caminos de argumentación de la teoría del electromagnetismo: con la teoría de la relatividad y sin ésta. En esta obra el lector encontrará ambos caminos, aunque, desde el punto de vista teórico, se da preferencia al primero, ya que en el mismo, la teoría de la relatividad interviene como la teoría general del espacio y el tiempo, en la cual debe basarse toda la teoría física.

Por su contenido teórico muy especial, recomendamos este libro a los estudiantes de las facultades de física de las universidades y de los centros de enseñanza técnica superior.

Este libro es una excelente introducción a la teoría del electromagnetismo y a la teoría de la relatividad. Es un libro muy interesante y útil para los estudiantes de física y para los ingenieros que se dedican a la enseñanza superior.